

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

*Journal of Applied Mathematics and Physics*  
*Journal de Mathématiques et de Physique appliquées*

## ZAMP

Editores: J. Ackeret, E. Baumann, P. Niggli, P. Scherrer  
E. Stiefel, F. Stüssi, H. Ziegler

---

Redactor: R. Sängler

VOL. IV - 1953



VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL  
SCHWEIZ · SWITZERLAND · SUISSE

Nachdruck verboten  
Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der  
Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten  
Copyright 1953 by Verlag Birkhäuser AG., Basel

Printed in Switzerland

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

*Survey Articles · Comptes rendus*

	Seite Page	Nr. Issue
BRANDENBERGER, E.: Paul Niggli (1888–1953). Seine Verdienste um die Lehre des festen Körpers . . . . .	415	(6)
COLLATZ, L.: Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis . . . . .	327	(5)
LABHART, H.: Antiferromagnetismus . . . . .	1	(1)
WEBER, H.: Methodik der Berechnung von Regulierungen – Servotechnik . .	233	(4)
ZIEGLER, H.: Linear Elastic Stability (First Part) . . . . .	89	(2)
Second Part . . . . .	167	(3)

ORIGINALARBEITEN

*Original Papers · Articles originaux*

BRUNNER, TH.: Energiebedarf zur Verhütung von Vereisungen an Freileitungen . . . . .	24	(1)
BURRI, C.: Zur Theorie und Praxis der Drehkompensatoren nach Berek und Ehringhaus . . . . .	418	(6)
BUSCH, G., und JAGGI, R.: Messung des Hall-Effekts in Zylindern ohne äusseres Magnetfeld . . . . .	425	(6)
DÖRR, J.: Untersuchung einiger Integrale mit Bessel-Funktionen, die für die Elastizitätstheorie von Bedeutung sind . . . . .	122	(2)
ERICKSEN, J. L.: Characteristic Surfaces of the Equation of Motion for Non-Newtonian Fluids . . . . .	260	(4)
LIU, H.-C.: Beitrag zur Kenntnis der Eigenschwingung einer idealen Flüssigkeit in kommunizierenden Röhren . . . . .	185	(3)
MOOSER, E.: Ein Gerät zur graphischen Bestimmung der Fermi-Grenzenergie in Halbleitern . . . . .	433	(6)
ÖKUBO, H.: Torsion of a Circular Shaft with Diameter Varying Periodically along its Length . . . . .	197	(3)
RUPPEL, W., und WEBER, R.: Le calcul de flutter en régime supersonique . .	128	(2)
RUTISHAUSER, H.: Beiträge zur Kenntnis des Biorthogonalisierungs-Algorithmus von Lanczos . . . . .	35	(1)
SÖHNGEN, H.: Luftkräfte an einem schwingenden Schaufelkranz kleiner Teilung . . . . .	267	(4)
SCHAEFFI, N.: Beeinflussung der Charakteristik einer Cs-Sb-Photokathode durch Zusatz fremder Elemente . . . . .	450	(6)
SCHULTZE, E.: Zur Berechnung der Druckpunktverteilung über die Spannweite für Flügel mit kleinem Seitenverhältnis . . . . .	207	(3)
TRAUPEL, W.: Wirbelsysteme in Schaufelgittern und Turbomaschinen . . .	298	(4)
TREADWELL, W. D., und WERNER, W.: Zur Kenntnis der Dampfdrucke von Zäsium-, Rubidium- und Kaliumchlorid . . . . .	459	(6)

	Seite Page	Nr. Issue
TRILLING, L.: Transonic Flow Past a Wedge at Zero Angle of Attack . . . . .	358	(5)
WEBER M.: Theorie der Kombinationsseismographen . . . . .	57	(1)
WEYL, H.: Über die kombinatorische und kontinuumsmässige Definition der Überschneidungszahl zweier geschlossener Kurven auf einer Fläche . . . . .	471	(6)
WITTING, H.: Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Be- rechnung laminarer Grenzschichten . . . . .	376	(5)

## KURZE MITTEILUNGEN

*Brief Reports · Communications brèves*

BÖSCH, W.: Rechnen mit komplexen Zahlen auf einer mechanischen Multi- pliziermaschine . . . . .	214	(3)
BURGAT, P.: Résolution de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles . . . . .	146	(2)
COLLATZ, L.: Über die Instabilität beim Verfahren der zentralen Differenzen für Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	153	(2)
ERDÖS, P.: Kleine Schwingungen dynamischer Systeme . . . . .	215	(3)
GRUSCHWITZ, E.: Über eine Gefahr, die durch Ruderausschläge bei schallnahen Geschwindigkeiten entstehen kann . . . . .	219	(3)
HAYES, W. D.: On the Equation for a Damped Pendulum under Constant Torque . . . . .	398	(5)
LAURIKAINEN, K. V., und EURANTO, E. K.: Beiträge zur numerischen Behand- lung der Schrödinger-Gleichung im Falle des Yukawa-Potentials . . . . .	155	(2)
LEE, J. F.: Specific Heat of Gases at the Critical Point . . . . .	401	(5)
LIST, R., und DE QUERVAIN, M.: Zur Struktur von Hagelkörnern . . . . .	492	(6)
NIGAM, S. D., and RANGASAMI, K. S. I.: Growth of Boundary Layer on a Rotating Sphere . . . . .	221	(3)
PARKER, R. L.: Eine praktische Methode zur Transformation von Kristall- stereogrammen in gnomonische Projektion . . . . .	497	(6)
SAMELSON, K., und BAUER, F. L.: Optimale Rechengenauigkeit bei Rechen- anlagen mit gleitendem Komma . . . . .	312	(4)
SCHAETTI, N., und BAUMGARTNER, W.: Zur Frage des Dunkelstromes in Photo- multipliern . . . . .	159	(2)
STEINEMANN, S.: Kammeis, eine anomale Wachstumsform der Eiskristalle . . . . .	500	(6)
TROESCH, H., und GRASSMANN, P.: Zum Verteilungsgesetz der Tropfengrößen bei der Zerstäubung . . . . .	81	(1)

## VARIA

*Miscellaneous · Divers*

Eine neue Standardfarbenkarte . . . . .	405	(5)
Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. Mai 1953 in Genf, Berichte über angewandte Physik und Mathematik . . . . .	317	(4)
X. Generalversammlung der Union Radio-Scientifique Internationale (U.R.S.I.) (GERBER, W.) . . . . .	160	(2)
Heineman Foundation for Research, Educational, Charitable, and Scientific Purposes, Inc. . . . .	224	(3)



	Seite Page	Nr. Issue
Instruments and Measurements Conference Stockholm 1952 (SCHAETTI, N.) . . . . .	86	(1)
International Congress of Mathematicians 1954 . . . . .	224	(3)
International Union of Crystallography . . . . .	405	(5)
International Union of Pure and Applied Physics . . . . .	85	(1)
4. Kongress der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Cambridge und London 1952 (WANZENRIED, H.) . . . . .	161	(2)
3. Österreichischer Mathematikerkongress vom 9. bis 14. September 1952 in Salzburg (STIEFEL, E.) . . . . .	86	(1)
Schweizerische Physikalische Gesellschaft . . . . .	161	(2)
Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 21. bis 25. April 1953 in Aachen. . . . .	162	(2)

BUCHBESPRECHUNGEN

Book Reviews · Notices bibliographiques

AMERICAN INSTITUTE OF ELECTRICAL ENGINEERS: Review of Electronic Digital Computers (American Institute of Electrical Engineers, New York, 1952) (Ref. A. P. Speiser) . . . . .	232	(3)
BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen (Verlag Birkhäuser, Basel 1952) (Ref. M. Jeger) . . . . .	411	(5)
BRUYNE, N. A. DE, and HOUWINK, R.: Adhesion and Adhesives (Elsevier Publishing Comp., Amsterdam, 1951) (Ref. F. Held) . . . . .	164	(2)
BUCKLEY, H. E.: Crystal Growth (John Wiley & Sons, New York, 1951) (Ref. P. Niggli) . . . . .	228	(3)
CHESTNUT, H., and MAYER, R. W.: Servomechanisms and Regulating System Design (John Wiley & Sons, New York, 1951) (Ref. H. Weber) . . . . .	225	(3)
COURANT, R., and FRIEDRICHS, K. O.: Supersonic Flow and Shock Waves (Interscience Publishers, New York, 1948) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	163	(2)
HALD, A.: Statistical Tables and Formulas (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. A. Linder) . . . . .	323	(4)
HALD, A.: Statistical Theory with Engineering Applications (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. A. Linder) . . . . .	323	(4)
HERRMANN, H.: Übungen zur projektiven Geometrie (Verlag Birkhäuser, Basel 1952) (Ref. M. Jeger) . . . . .	226	(3)
HORN, J.: Partielle Differentialgleichungen (W. de Gruyter, Berlin 1949) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	166	(2)
JELLINGHAUS, W.: Magnetische Messungen an ferromagnetischen Stoffen (W. de Gruyter & Co., Berlin 1952) (Ref. H. Labhart) . . . . .	407	(5)
JORDAN, P.: Schwerkraft und Weltall (Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1952) (Ref. M. R. Schafroth) . . . . .	323	(4)
KEMP THORNE, O.: The Design and Analysis of Experiments (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. A. Linder) . . . . .	229	(3)
LANDAU, L., and LIFSHITZ, E.: The Classical Theory of Fields (Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass., 1951) (Ref. M. R. Schafroth) . . . . .	227	(3)
LATHAM, R., KING, A. H., and RUSHFORTH, L.: The Magnetron (Chapman & Hall, London, 1952) (Ref. F. Lüdi) . . . . .	165	(2)
LOCHER-ERNST, L.: Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven (Verlag Birkhäuser, Basel 1952) (Ref. G. Bol) . . . . .	322	(4)

	Seite Page	Nr. Issue
LOHR, E.: Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker (W. de Gruyter & Co., Berlin 1950) (Ref. F. Baebler) . . . . .	228	(3)
MARTON, L.: Advances in Electronics, Vol. 3 (Academic Press, New York, 1951) (Ref. A. A. Rusterholz) . . . . .	230	(3)
MERCIER, A.: Leçons sur les principes de l'électrodynamique classique (Editions du Griffon, Neuchâtel 1952) (Ref. W. Baumgartner) . . . . .	87	(1)
MERTEN, R.: Hochfrequenztechnik und Weltraumfahrt (Verlag S. Hirzel, Zürich 1951) (Ref. F. Tank) . . . . .	230	(3)
MURNAGHAN, F. D.: Finite Deformation of an Elastic Solid (John Wiley & Sons, New York, 1951) (Ref. H. Kauderer) . . . . .	407	(5)
NIKOLSKY, A.: Helicopter Analysis (John Wiley & Sons, New York, 1951) (Ref. K. Remenyik) . . . . .	231	(3)
NOWACKI, W.: Fouriersynthese von Kristallen (Verlag Birkhäuser, Basel 1952) (Ref. W. Epprecht) . . . . .	406	(5)
PÍCONE, M., e VIOLA, T.: Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione (Edizioni scientifiche Einaudi, 1952) (Ref. M. Plancherel) . . . . .	408	(5)
PRÖLL, A.: Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik (Springer-Verlag, Wien 1951) (Ref. J. Ackeret) . . . . .	409	(5)
RANDALL, R. H.: An Introduction to Acoustics (Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass., 1951) (Ref. W. Furrer) . . . . .	325	(4)
RAO, C. RADHAKRISHNA: Advanced Statistical Methods in Biometric Research (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. A. Linder) . . . . .	412	(5)
SAUER, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik (Springer-Verlag, Berlin 1951) (Ref. R. Sänger) . . . . .	325	(4)
A SYMPOSIUM: The Theory of Electromagnetic Waves (Interscience Publishers, New York, 1951) (Ref. W. Baumgartner) . . . . .	87	(1)
SCHELKUNOFF, S. A., and FRIIS, H. T.: Antennas, Theory and Practice (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. H. Hagger) . . . . .	326	(4)
STAFF OF THE COMPUTATION LABORATORY: Description of a Magnetic Drum Calculator (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1952) (Ref. A.-P. Speiser) . . . . .	405	(5)
STAFF OF THE COMPUTATION LABORATORY: Tables of the Error Function and of the First Twenty Derivatives (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1952) (Ref. H. Rutishauser) . . . . .	166	(2)
STRSCHELETZKY, M.: Hydrodynamische Grundlagen zur Berechnung der Schiffsschrauben (Verlag G. Braun, Karlsruhe 1950) (Ref. J. Ackeret) . . . . .	409	(5)
WACHENDORF, F. (Bearbeitung B. SCHRADER): Allgemeine mathematische Berechnungen auf Brunsviga-Doppelrechenmaschinen (Selbstverlag der Brunsviga AG., Braunschweig 1951) (Ref. E. Stiefel) . . . . .	88	(1)
WADE, T. L.: The Vector Algebra of Vectors and Matrices (Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass., 1951) (Ref. Th. Stutz) . . . . .	163	(2)
WILKES, M. V., WHEELER, D. J., and GILL, S.: The Preparation of Programs for an Electronic Digital Computer (Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass., 1951) (Ref. H. Rutishauser) . . . . .	88	(1)
WILLERS, F. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente (Akademie-Verlag, Berlin 1951) (Ref. A. P. Speiser) . . . . .	232	(3)
ZEITSCHRIFT «DIE FARBE» (Verlag für angewandte Wissenschaften GmbH., Wiesbaden 1952) (Ref. W. Grossmann) . . . . .	410	(5)
ZIMEN, K. E.: Angewandte Radioaktivität (Springer-Verlag, Berlin 1952) (Ref. W. Epprecht) . . . . .	411	(5)

## AUTORENREGISTER

*Index of Authors · Table des auteurs*

- Z = Zusammenfassende Berichte - Survey Articles - Comptes rendus  
 O = Originalarbeiten - Original Papers - Articles originaux  
 M = Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves  
 V = Varia - Miscellaneous - Divers  
 B = Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

## A

- ACKERET, J., B 409, 410  
 ANLIKER, M., TRÖSCH, A., und  
 ZIEGLER, H., V 317

## B

- BAEBLER, F., B 228  
 BAUER, F. L., und SAMELSON, K., M 312  
 BAUMGARTNER, W., und SCHÄETTI, N.,  
 M 159  
 BAUMGARTNER, W., B 87, 88  
 BOL, G., B 322  
 BOREL, L., V 321  
 BÖSCH, W., M 214  
 BRANDENBERGER, E., Z 415  
 BRUNNER, TH., O 24  
 BURGAT, P., M 146  
 BURRI, C., O 418  
 BUSCH, G., und JAGGI, R., O 425

## C

- CHAIX, B., und HENRICI, P., V 319  
 COLLATZ, L., Z 327, M 153

## D

- DÖRR, J., O 122

## E

- EPPRECHT, W., B 406, 411  
 ERDŐS, P., M 215  
 ERICKSEN, J. L., O 260  
 EURANTO, E. K., und LAURIKAINEN, K. V.,  
 M 155  
 EVANS, R. C., V 405

## F

- FRIES, J. R. DE, V 321  
 FURRER, W., B 325

## G

- GERBER, W., V 160  
 GRASSMANN, P., und TROESCH, H., M 81  
 GREGORIG, R., V 319  
 GROSSMANN, W., B 410  
 GRUSCHWITZ, E., M 219

## H

- HAGGER, H., B 326  
 HAYES, W. D., M 398  
 HELD, F., B 164  
 HENRICI, P., und CHAIX, B., V 319

## I

- ISERLAND, K., V 320

## J

- JAGGI, R., und BUSCH, G., O 425  
 JEGER, M., B 226, 411

## K

- KAUDERER, H., B 407

## L

- LABHART, H., Z 1, B 407  
 LAURIKAINEN, K. V., und EURANTO, E. K.,  
 M 155  
 LEE, J. F., M 401  
 LINDER, A., B 229, 323, 323, 412  
 LIST, R., und QUERVAIN, M. DE, M 492  
 LIU, H.-C., O 185  
 LÜDI, F., B 165

## M

- MOOSER, E., O 433

## N

- NIGAM, S. D., und RANGASAMI, K. S. I.,  
 M 221  
 NIGGLI, P., B 228

## O

- ÖKUBO, H., O 197

## P

- PARKER, R. L., M 497  
 PLANCHEREL, M., B 408

## Q

- QUERVAIN, M. DE, und LIST, R., M 492



## R

- RANGASAMI, K. S. I., und NIGAM, S. D.,  
M 221  
REMENYIK, K., B 231  
ROTH-DESMEULES, E., B 163, 166  
RUPPEL, W., und WEBER, R., O 128  
RUSTERHOLZ, A. A., B 230  
RUTISHAUSER, H., O 35, B 88, 166

## S

- SAMELSON, K., und BAUER, F. L., M 312  
SÄNGER, R., B 325  
SCHAETTI, N., O 450, V 86  
SCHAETTI, N., und BAUMGARTNER, W.,  
M 159  
SCHAFROTH, M. R., B 227, 323  
SCHULTZE, E., O 207  
SÖHNGEN, H., O 267  
SPEISER, A. P., V 317, B 232, 232, 405  
STEINEMANN, S., M 500  
STIEFEL, E., V 86, B 88  
STUTZ, TH., B 163

## T

- TANK, F., B 230  
TRAUPEL, W., O 298, V 318  
TREADWELL, W. D., und WERNER, W.,  
O 459  
TRILLING, L., O 358  
TROESCH, H., und GRASSMANN, P., M 81  
TRÖSCH, A., ANLIKER, M., und  
ZIEGLER, H., V 317

## W

- WANZENRIED, H., V 161  
WEBER, H., Z 233, B 225  
WEBER, M., O 57  
WEBER, R., und RUPPEL, W., O 128  
WERNER, W., und TREADWELL, W. D.,  
O 459  
WEYL, H., O 471  
WITTING, H., O 376

## Z

- ZIEGLER, H., Z 89, 167  
ZIEGLER, H., ANLIKER, M., und  
TRÖSCH, A., V 317

Fasc. 1 (15. 1. 1953)	. . .	pag. 1- 88
Fasc. 2 (15. 3. 1953)	. . .	pag. 89-166
Fasc. 3 (15. 5. 1953)	. . .	pag. 167-232
Fasc. 4 (15. 7. 1953)	. . .	pag. 233-326
Fasc. 5 (15. 9. 1953)	. . .	pag. 327-412
Fasc. 6 (15. 11. 1953)	. . .	pag. 413-506



# Antiferromagnetismus

Zusammenfassender Bericht

Von HEINRICH LABHART, Zürich<sup>1)</sup>

## Inhaltsverzeichnis

I. Allgemeine Übersicht . . . . .	1
II. Die Wechselwirkung der Elementarmagnete . . . . .	2
1. Direkte Wechselwirkung . . . . .	2
2. Indirekte Wechselwirkung . . . . .	4
III. Curie-Temperatur und Ordnungszustand . . . . .	5
1. Molekularfeldtheorien . . . . .	6
2. Strengere Methoden . . . . .	11
3. Neutronenbeugungsexperimente . . . . .	12
IV. Magnetische Eigenschaften . . . . .	13
1. Domänenstruktur, Bloch-Wände, Hystereseerscheinungen . . . . .	13
2. Die Suszeptibilität . . . . .	15
3. Antiferromagnetische Resonanz . . . . .	18
V. Erscheinungen beim Übergang vom paramagnetischen zum antiferromagnetischen Zustand . . . . .	19
VI. Zusammenstellung der bis heute bekannten Antiferromagnetika . . . . .	21
Literaturverzeichnis . . . . .	22

## I. Allgemeine Übersicht

Die ferromagnetischen Stoffe verdanken ihre physikalisch wichtigste Eigenschaft, die spontane Magnetisierung, der Tatsache, dass zwischen benachbarten Elementarmagneten ihres Kristallgitters Austauschkräfte wirken, welche diese Dipole parallel zu stellen suchen. Infolge dieser Kräfte bildet sich unterhalb einer gewissen kritischen Temperatur, der Curie-Temperatur, ein durch eine magnetische Polarisation charakterisierter Ordnungszustand aus.

In der Natur treten jedoch ausser den die Parallelstellung benachbarter Dipole begünstigenden Austauschkräften mindestens ebensohäufig solche auf, welche die Antiparallelstellung benachbarter Dipole bevorzugen. Genau wie im Falle des Ferromagnetismus bildet sich daher unterhalb einer bestimmten kritischen Temperatur (aus Analogiegründen ebenfalls Curie-Temperatur genannt) spontan ein Ordnungszustand in bezug auf die Richtungsverteilung der Dipole aus.

Wenn dieser Ordnungszustand durch eine resultierende Magnetisierung gekennzeichnet ist, spricht man von Ferrimagnetismus, bei verschwindender resultierender Magnetisierung dagegen von Antiferromagnetismus<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> AFIF, Eidgenössische Technische Hochschule.

<sup>2)</sup> Diese Bezeichnungen stammen von NÉEL, der diese Erscheinungskomplexe als erster bearbeitet hat.

Ferrimagnetismus tritt häufig bei komplizierteren Verbindungen auf, bei welchen die wechselwirkenden Dipole auf verschiedenartigen Gitterplätzen sitzen. Die Eigenschaften dieser Substanzen sind ähnlich denen der Ferrimagnetika.

Antiferromagnetismus tritt dagegen vor allem bei einfachen anorganischen Verbindungen, eventuell auch bei Elementen auf. Die magnetische Suszeptibilität dieser Stoffe liegt mit derjenigen gewöhnlicher Paramagnetika in der gleichen Größenordnung, zeigt jedoch unterhalb des Curie-Punktes einen anderen Temperaturverlauf sowie ausgesprochene Feldabhängigkeit. Am Curie-Punkt findet man eine durch eine Gitterverzerrung bedingte Anomalie der thermischen Ausdehnung wie auch die beim Übergang von Order zu Disorder zu erwartende Anomalie der spezifischen Wärme.

Um einen Überblick über die bis heute gewonnenen Erkenntnisse auf dem Gebiete des Antiferromagnetismus zu vermitteln, sollen im folgenden die Fragen besprochen werden, die mit der Wechselwirkung zwischen benachbarten Dipolen, mit der Art des Ordnungszustandes, mit den magnetischen Eigenschaften und mit den Erscheinungen beim Übergang von Order zu Disorder zusammenhängen.

## II. Die Wechselwirkung der Elementarmagnete

Im Falle der ferromagnetischen Stoffe steht fest, dass für die Wechselwirkung der Elementarmagnete quantenmechanische Austauschkräfte verantwortlich gemacht werden müssen. Alle andern Möglichkeiten, zum Beispiel die magnetostatische Dipol-Dipol-Wechselwirkung, liefern viel zu kleine Energien. Man muss daher im Falle elementarer Antiferromagnetika, deren Curie-Punkte in vielen Fällen wesentlich über Zimmertemperatur liegen, einen ähnlichen Wechselwirkungsmechanismus erwarten.

Die meisten der bekannten Antiferromagnetika sind jedoch Verbindungen, in deren Kristallgitter die Dipole durch unmagnetische Ionen separiert sind. Diese experimentelle Tatsache beweist, dass auch indirekte Austauschkräfte bestehen müssen (Superexchange).

### 1. Direkte Wechselwirkung

Die Energie zweier benachbarter Elementarmagnete beträgt nach HEISENBERG [27]<sup>1)</sup>

$$W = -2A (\vec{S}_1 \vec{S}_2), \quad (1)$$

wo  $\vec{S}_1$  und  $\vec{S}_2$  die Spinvektoren der beiden Dipole in Einheiten  $\hbar/(2\pi)$  und  $A$  das

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 25.

## Austauschintegral

$$A = \int \psi_a(x_1, y_1, z_1) \psi_b(x_2, y_2, z_2) H \psi_a(x_2, y_2, z_2) \psi_b(x_1, y_1, z_1) dv_1 dv_2 \quad (2)$$

bedeuten.  $\psi_a$  und  $\psi_b$  sind die Eigenfunktionen, die den beiden beteiligten Elektronen zur Verfügung stehen, deren Koordinaten die Indizes 1 bzw. 2 tragen.  $H$  bedeutet den Hamilton-Operator.

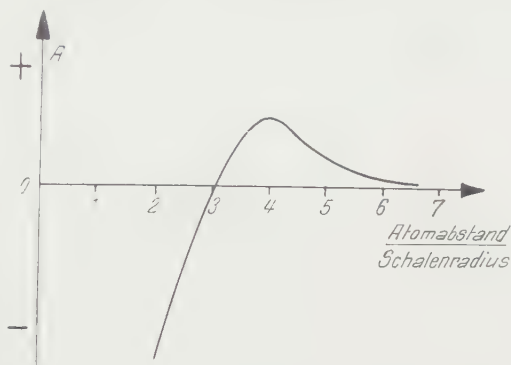


Fig. 1

Abhängigkeit des Austauschintegrals vom Verhältnis Atomabstand : Schalenradius.

Aus Gleichung (1) geht hervor, dass für positives Austauschintegral Parallelstellung der magnetischen Momente, für negatives Austauschintegral dagegen Antiparallelstellung die energetisch günstigere Lage bildet.

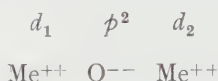
Das Vorzeichen von  $A$  wurde von SLATER [59] diskutiert. In Figur 1 ist die zu erwartende Abhängigkeit des Austauschintegrals vom Verhältnis zwischen Atomabstand und Radius der  $d$ -Schale dargestellt. Antiferromagnetismus wäre demnach für Elemente mit grosser  $d$ -Schale oder kleinem Atomabstand zu erwarten. Darunter fallen Mn, Cr, V, Ti, Sc in der ersten Übergangsreihe, Ru, Rh, Pd in der zweiten und Os, Ir und Pt in der dritten Übergangsreihe. NÉEL [49] berechnete die Grösse des Austauschintegrals aus dem paramagnetischen Verhalten dieser Metalle sowie ihrer binären Legierungen. Die Slatersche Kurve fand sich weitgehend bestätigt. Pd, Mn, Cr, Rh, Pt, V, Ru, Ti, Ir, Os zeigen in dieser Reihenfolge zunehmend negative Austauschwechselwirkung.

ZENER [84] bis [87] vertritt die Auffassung, dass das Austauschintegral zwischen den  $d$ -Elektronen immer negativ sei und dass die starke, zum Ferromagnetismus führende positive Wechselwirkung zwischen den Dipolen durch Vermittlung der Leitungselektronen zustande komme. Auf dieser Basis gelingt die Erklärung einer Reihe von Erfahrungstatsachen, zum Beispiel der raumzentrierten Kristallstruktur der Übergangsmetalle.

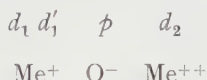
## 2. Indirekte Wechselwirkung

Das Problem der indirekten Wechselwirkung fand seine erste quantenmechanische Bearbeitung durch KRAMERS [35]. ANDERSON [1] legte einer späteren Behandlung des Effektes das folgende Modell zugrunde: Man betrachte von zwei Metallionen  $\text{Me}^{++}$  mit magnetischem Moment je ein Elektron im Zustand  $d_1$  bzw.  $d_2$ .

Zwischen diesen Metallionen sitzt ein unmagnetisches Kopplungsion, zum Beispiel O, von welchem zwei  $p$ -Elektronen in den Austauschmechanismus einbezogen werden. Schematisch:



Aus diesem Grundzustand lässt sich ein angeregter Zustand ableiten durch Übergang eines  $p$ -Elektrons des  $\text{O}^{--}$  zu einem der  $\text{Me}^{++}$ .



Zu diesem Vorgang werde die Energie  $E_{\uparrow\uparrow}$  bzw.  $E_{\downarrow\downarrow}$  benötigt, je nachdem der Spin der  $d_1$ - und  $d'_1$ -Elektronen in  $\text{Me}^+$  parallel oder antiparallel stehen.

Die quantenmechanische Berechnung zeigt bei störungstheoretischer Berücksichtigung des angeregten Zustandes, dass die Energie des Grundzustandes tatsächlich von der gegenseitigen Orientierung der Spin der  $d_1$ - und  $d_2$ -Elektronen abhängt, sofern die  $p$ - und  $d_1$ - bzw.  $p$ - und  $d_2$ -Eigenfunktionen sich genügend überlappen und  $E_{\downarrow\downarrow}$  verschieden von  $E_{\uparrow\uparrow}$  ist.

Die Winkelabhängigkeit der Wechselwirkung ist wie im Falle der direkten Wechselwirkung durch ein Kosinusetz gegeben:

$$W = -2 A_{ind} (\vec{S}_1 \vec{S}_2) \quad (3)$$

mit

$$A_{ind} = \left( \frac{1}{E_{\downarrow\downarrow}^2} - \frac{1}{E_{\uparrow\uparrow}^2} \right) \varrho^2 J, \quad (4)$$

worin

$$\varrho = \int \psi_{d_1}(x, y, z) H \psi_p(x, y, z) dv \quad (5)$$

mit dem Hamilton-Operator  $H$  das 1-Elektron-Resonanzintegral bedeutet und für  $J$  das 2-Elektronen-Austauschintegral

$$J = \int \psi_{d_2}(x_1, y_1, z_1) \psi_p(x_2, y_2, z_2) H \psi_{d_2}(x_2, y_2, z_2) \psi_p(x_1, y_1, z_1) dv_1 dv_2 \quad (6)$$

zu setzen ist.



Der Ausdruck (4) lässt einige physikalisch direkt kontrollierbare Schlüsse zu.

a) *Das Vorzeichen von  $A_{ind}$*

Da  $J$  einer normalen chemischen Bindung entspricht, bei welcher die Spin sich absättigen, ist es negativ. Damit  $A_{ind}$  negativ wird, wodurch Antiferromagnetismus bedingt ist, muss daher  $|E_{\uparrow}| < |E_{\downarrow}|$  gelten, das heisst, die antiparallele Anlagerung eines weiteren Elektrons im  $Me^{++}$  muss energetisch günstiger sein. Wie aus magnetischen und spektroskopischen Untersuchungen bekannt ist, trifft dies bei den zweiwertigen Ionen der ersten Übergangsreihe  $Sc^{++}$ ,  $Ti^{++}$ ,  $V^{++}$ ,  $Cr^{++}$ ,  $Mn^{++}$ ,  $Fe^{++}$ ,  $Co^{++}$ ,  $Ni^{++}$  nur für die Ionen zwischen  $Mn^{--}$  und  $Ni^{--}$  zu, weshalb zum Beispiel  $MnTe$  antiferromagnetisch,  $CrTe$  dagegen ferromagnetisch gefunden wird.

b) *Die absolute Grösse von  $A_{ind}$*

Sie hängt besonders stark von der Grösse  $\varrho$  ab. Es ist daher verständlich, dass stark elektronegative Kopplungsionen, bei denen die Überlappung der  $\psi$ -Funktion gering und damit  $\varrho$  klein ist, zu kleinerer Wechselwirkung Anlass geben als weniger stark elektronegative. Man erwartet daher, dass zum Beispiel in der Reihe  $MnO$ ,  $MnS$ ,  $MnSe$ , in welcher die Elektronegativität des Kopplungsions abnimmt, die Wechselwirkung zunimmt, was durch die Reihe der entsprechenden Curie-Punkte ( $122^\circ K$  für  $MnO$ ,  $165^\circ K$  für  $MnS$  und  $247^\circ K$  für  $MnSe$ ) experimentell bestätigt wird.

c) *Winkelabhängigkeit*

Die den  $p$ -Elektronen im Kopplungsion entsprechende Ladungsverteilung ist hantelförmig, was bedingt, dass  $\varrho$  am grössten und damit die Wechselwirkung am stärksten wird, wenn die drei betrachteten Ionen in einer Geraden liegen.

### III. Curie-Temperatur und Ordnungszustand

Die Frage nach dem sich unterhalb der Curie-Temperatur infolge der Wechselwirkung zwischen den Dipolen einstellenden Ordnungszustand lässt sich bei den Antiferromagneten im wesentlichen nach denselben Methoden behandeln wie bei den Ferromagneten.

Im Vordergrund steht die bei grosser Einfachheit durch ihre erstaunliche Leistungsfähigkeit sich auszeichnende Molekularfeldtheorie, welche sich aus der alten Langevin-Weiss-Theorie des Ferromagnetismus ableitet. Die Schwäche dieser Methode besteht vor allem in der Vernachlässigung der Rückwirkung der Dipole auf ihre Umgebung.

Das Problem ist deshalb auch mit verschiedenen exakteren Methoden angegriffen worden, die sich aber häufig bei tragbarem mathematischem Aufwand

nur auf die lineare Kette anwenden lassen. Eine Aufzählung dieser Arbeiten folgt im zweiten Abschnitt dieses Kapitels.

Für die theoretisch abgeleiteten Ordnungszustände besteht eine experimentelle Prüfungsmöglichkeit durch Interferenz von Neutronen am Gitter, über welche wir im dritten Abschnitt berichten.

### 1. Molekularfeldtheorien

Da nach Definition des Antiferromagnetismus der unterhalb des Curie Punktes sich einstellende Ordnungszustand ohne äusseres Feld keine resultierende Magnetisierung besitzen soll, müssen wir annehmen, dass sich die Elementarmagnete innerhalb sehr kleiner Bereiche absättigen. Aus Energiegründen werden hierbei zum Beispiel nach links gerichtete Dipole im Gitter periodisch mit nach rechts gerichteten Dipolen abwechseln. Diese Überlegung führt zwangsläufig dazu, ein Antiferromagnetikum als aus zwei oder mehreren ineinander geschachtelten Untergittern bestehend zu behandeln, deren jedes ein durch die Magnetisierung des andern beeinflusstes Ferromagnetikum oder Antiferromagnetikum darstellt.

Diese auf NÉEL [49], [50], [51] zurückgehende Behandlungsweise wurde später durch ANDERSON [2] und VAN VLECK [75], [76] weiter ausgebaut. In bezug auf die magnetischen Ionen einfach kubische und kubisch raumzentrierte Gitter lassen sich, wie die Figuren 2 und 3 zeigen, ohne weiteres so in zwei Untergitter *A* und *B* aufteilen, dass jeder Elementarmagnet von *A* lauter solche von *B* als nächste Nachbarn hat und umgekehrt. Bei kubisch flächenzentrierten Gittern sind, wie man sich an Hand von Figur 4 überzeugt, die nächsten Nachbarn eines herausgegriffenen Dipols zum Teil unter sich wieder nächste Nachbarn. Der Idealfall, in dem alle nächsten Nachbarn eines beliebigen Dipols zu

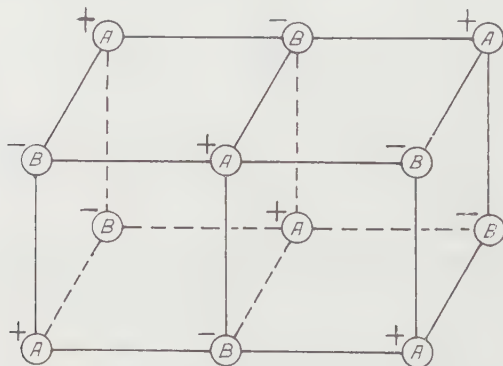


Fig. 2

Aufteilung des einfach kubischen Gitters in zwei antiparallele Untergitter.

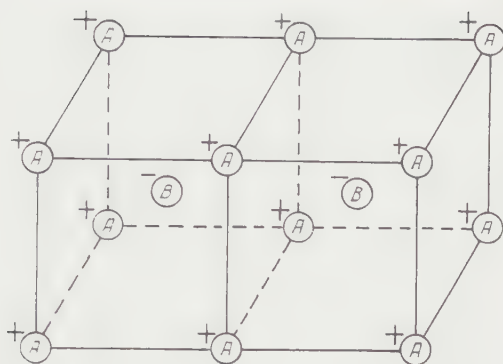


Fig. 3

Ordnung erster Art im kubisch raumzentrierten Gitter.

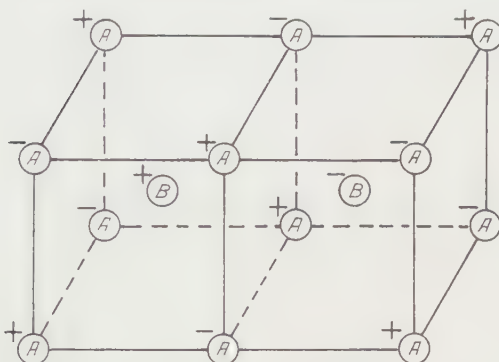


Fig. 3a

Ordnung zweiter Art im kubisch raumzentrierten Gitter.

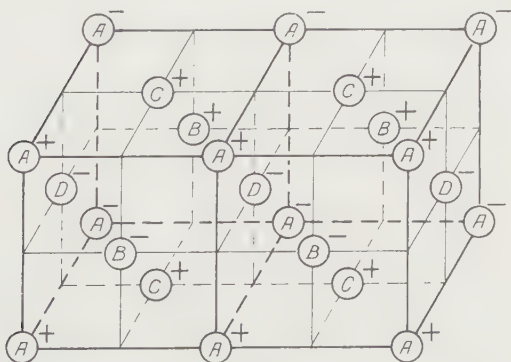


Fig. 4

Aufteilung des kubisch flächenzentrierten Gitters in vier Untergitter A, B, C und D.  
Ordnung erster Art.

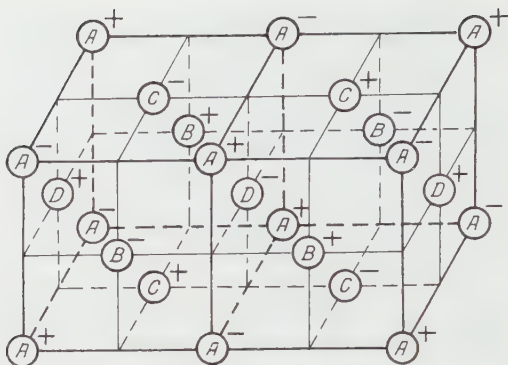


Fig. 4a

Ordnung zweiter Art im kubisch flächenzentrierten Gitter.

diesem antiparallel orientiert sind, lässt sich daher beim flächenzentrierten Gitter nicht realisieren. Zur Behandlung dieses Gittertyps ist eine Aufteilung in vier einfach kubische Gitter  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  notwendig.

a) *Einfach kubische und kubisch raumzentrierte Gitter*

Das innere Feld  $H_{iA}$  am Ort eines Dipols  $A$  wird einerseits der Magnetisierung  $M_A$  des Untergitters  $A$  und anderseits derjenigen des Untergitters  $B$  proportional gesetzt:

$$H_{iA} = -\alpha M_A - \gamma M_B \quad (7a)$$

und entsprechend

$$H_{iB} = -\alpha M_B - \gamma M_A. \quad (7b)$$

Da gemäss der Unterteilung in Untergitter keine zwei Dipole desselben Untergitters nächste Nachbarn sind, entsprechen die Glieder  $-\alpha M_A$  und  $-\alpha M_B$  der Mitberücksichtigung der zweitnächsten Nachbarn.

Die Wechselwirkungskonstanten  $\gamma$  und  $\alpha$  hängen folgendermassen von den Zahlen  $Z_{AB}$  und  $Z_{AA}$  der nächsten bzw. übernächsten Nachbarn sowie von den entsprechenden Austauschintegralen  $A_{AB}$  und  $A_{AA}$  ab:

$$\gamma = \frac{-2 Z_{BA} A_{AB}}{N_B g^2 \beta^2}, \quad \alpha = \frac{-2 Z_{AA} A_{AA}}{N_A g^2 \beta^2}. \quad (8)$$

$N_A$  und  $N_B$  bedeuten die Zahlen der Atome der Untergitter  $A$  und  $B$  in der Volumeneinheit,  $g$  den Landé-Faktor und  $\beta$  das Bohrsche Magneton. Die Vorzeichen in (7) sind so gewählt, dass bei antiferromagnetischer Wechselwirkung  $\alpha$  und  $\gamma$  positiv werden. Die Ausdrücke (8) können sich je nach der Berechnungsweise um kleine Faktoren ändern.



Für hohe Temperaturen kann man Sättigungserscheinungen vernachlässigen und bei einem äussern Feld  $\vec{H}$  für die Magnetisierung der beiden Untergitter entsprechend der Langevin-Theorie des Paramagnetismus das Gleichungssystem

$$\vec{M}_A = \frac{C}{2T} (\vec{H} - \alpha \vec{M}_A - \gamma \vec{M}_B), \quad \vec{M}_B = \frac{C}{2T} (\vec{H} - \alpha \vec{M}_B - \gamma \vec{M}_A) \quad (9)$$

anschreiben, worin

$$C = \frac{N \beta^2 g^2 S(S+1)}{3k}$$

( $N$  = Zahl der Dipole je Kubikzentimeter,  $S$  = Spinquantenzahl der Elementarmagnete,  $k$  = Boltzmann-Konstante) und die Klammerausdrücke das in den Gitterpunkten  $A$  bzw.  $B$  wirkende totale Feld bedeuten. Berücksichtigt man, dass die totale Magnetisierung  $\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B$ , so erhält man hieraus sofort für hohe Temperaturen eine Suszeptibilität

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta} \quad (10)$$

mit einer sogenannten asymptotischen Curie-Temperatur

$$\Theta = -\frac{1}{2} (\alpha + \gamma) C. \quad (10a)$$

Lässt man andererseits das äussere Feld  $H$  verschwinden, so berechnet man aus der Forderung, dass das nunmehr homogene Gleichungssystem (9) eine nicht-triviale Lösung besitze (Determinante = 0), die eigentliche Curie-Temperatur  $T_c$ , unterhalb der sich ein Ordnungszustand im Kristall aufbaut, zu

$$T_c = \frac{1}{2} (\gamma - \alpha) C. \quad (11)$$

Es ist nun interessant, zu bemerken, dass dem Verhältnis der beiden Curie-Temperaturen

$$\frac{\Theta}{T_c} = -\frac{\gamma + \alpha}{\gamma - \alpha}$$

gewisse Grenzen gesetzt sind, indem sich zeigen lässt, dass für  $\alpha > \gamma/2$  beim raumzentrierten Gitter eine Ordnung zweiter Art (Figur 3a) energetisch günstiger wird, bei welcher die Untergitter  $A$  und  $B$  in sich selbst antiferromagnetisch werden. In Funktion von  $\alpha/\gamma$  wird deshalb  $\Theta/T_c$  den in Figur 5a gezeigten Verlauf nehmen, das heisst, wenn  $\Theta$  bekannt ist, kann man für  $T_c$  bestimmte Grenzen angeben.

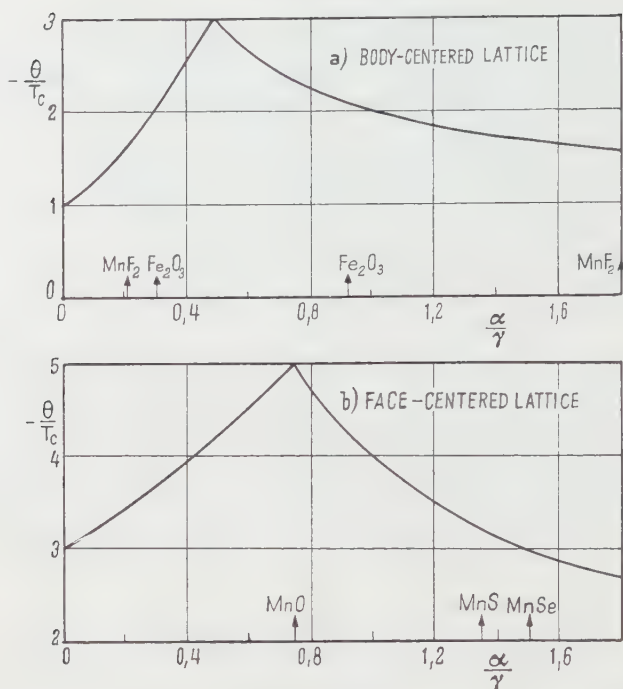


Fig. 5  
(Nach VAN VLECK [76].)

### b) Flächenzentrierte Gitter

Wenn  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$  und  $M_D$  die Magnetisierungen der vier einzuführenden Untergitter bedeuten, so wird für das innere Feld  $H_{iA}$  am Ort eines Dipols in analoger Weise zu setzen sein:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}_{iA} &= -\alpha \vec{M}_A - \gamma (\vec{M}_B + \vec{M}_C + \vec{M}_D) \\ \vec{H}_{iB} &= -\alpha \vec{M}_B - \gamma (\vec{M}_A + \vec{M}_C + \vec{M}_D) \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die entsprechende Durchführung der Rechnung ergibt für eine Ordnung gemäß Figur 4, welche ANDERSON [2] als die bei kleinen positiven Werten von  $\alpha$  energetisch günstigste erkannte

$$\Theta = -\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{3\gamma}{4}\right) C, \quad T_c = \left(\frac{\gamma}{4} - \frac{\alpha}{12}\right) C, \quad \frac{\Theta}{T_c} = -\frac{3\gamma + \alpha}{\gamma - \alpha/3}. \quad (1)$$

Diese Ordnung geht bei  $\alpha > 3\gamma/4$  wieder in eine solche zweiter Art über, bei der die Untergitter gemäß Figur 4a in sich antiferromagnetisch werden, so dass  $\Theta/T_c$  den in Figur 5b aufgetragenen Verlauf nimmt.

Eine auf derselben Grundlage beruhende, etwas allgemeiner gefasste Theorie wurde jüngst von SMART [60] veröffentlicht. Die verschiedenen möglichen Arten von Ordnungen können auf Grund einer Arbeit von LÜTTINGER [44] auch streng rechnerisch bestimmt werden. GORTER und HAANTJES [23] modifizieren die Néelsche Theorie zur Anwendung auf rhombische Kristalle am absoluten Nullpunkt.

LI 41 betont, dass die Lage des Curie-Punktes von der Grösse des angelegten Magnetfeldes abhängt. In diesem Zusammenhang zeigt GARRETT [20], dass Antiferromagnetismus auch beim absoluten Nullpunkt nur möglich ist, solange das Magnetfeld kleiner ist als

$$H_c = \frac{k T_c}{\mu} \quad (14)$$

( $\mu$  = magnetisches Moment der Ionen). Dieser Effekt wird besonders deutlich bei tiefen Umwandlungstemperaturen, weil es dann mit den laboratoriums-mässig herstellbaren Feldern möglich ist,  $H_c$  zu erreichen. Experimentell ist die Erscheinung von SQUIRE 63 an Mn-Verbindungen, vor allem MnSe, von SHALYT [55] an  $\text{FeCl}_2$ ,  $\text{CoCl}_2$  und  $\text{NiCl}_2$ , von POULIS, HANDEL, UBBINK, POULIS und GORTER [53] an  $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$  und von GORTER [22] und GARRETT [21] an Alaunen festgestellt worden.

So leistungsfähig die Molekularfeldmethode auch scheint, so haften ihr, wie KRAMERS [36] zu bedenken gibt, doch wesentliche Schwächen an. Zum Beispiel wird nach den strenger Berechnungen von BETHE [4] und HULTHÉN [31] die lineare Kette nie antiferromagnetisch, während die Molekularfeldmethode auch in diesem Falle einen Curie-Punkt liefert.

## 2. Strengere Methoden

Die Berücksichtigung der Rückwirkung eines Dipols auf seine Umgebung gibt zu einer starken Komplizierung der mathematischen Behandlungsweise Anlass, so dass es in vielen Fällen nur möglich ist, den eindimensionalen Fall (lineare Kette) zu meistern.

Nachdem BETHE [4] als erster eine strenge quantenmechanische Berechnung der Eigenfunktionen der linearen Atomkette versucht hatte, modifizierte HULTHÉN [31] diese Methode und wandte sie speziell auf den Fall der antiferromagnetischen Kette an. Er fand, dass dieses Modell keinen Curie-Punkt besitzt und somit auch bei tiefen Temperaturen in keinen ausgedehnten Ordnungszustand übergeht. Später verallgemeinerte KASTELEIJN [33] HULTHÉNS Rechnungen unter Einbeziehung eines Kristall-Anisotropiegliedes. Er konnte zeigen, dass dieses einen Minimalwert besitzen muss, wenn sich ein Ordnungszustand einstellen soll.

WANNIER [79] bewies, dass ein ebenes Dreiecknetz bei noch so tiefen Temperaturen nicht antiferromagnetisch wird.

Hingegen erhalten WAKEFIELD [77] mit statistischen Methoden und ANDERSON [3] auf Grund einer halbklassischen Modifikation der Blochschen Spin-Wave-Methode [9] durch HELLER und KRAMERS [28] im räumlichen Modus schon für das einfach kubische Gitter bei genügend tiefen Temperaturen ein Ordnungszustand, dessen Energie innerhalb gewisser Grenzen abgeschätzt werden kann.

Die auf BETHE [5] zurückgehende statistische Methode zur Behandlung des Ferromagnetismus ist neuerdings von LI [42], in der durch WEISS [80] ausgearbeiteten Form, auf Antiferromagnetika mit einfach kubischem und raumzentriert kubischem Gitter angewendet worden. Obschon die Wechselwirkung mit den übernächsten Nachbarn vernachlässigt wurde, was bei der Molekularfeldtheorie auf  $-\Theta - T_c$  führt, erhält LI  $-\Theta = 1,5 T_c$  bzw.  $-\Theta = 1,25 T_c$ . Diese Faktoren reichen aber nicht aus, um die grossen beobachteten Quotienten  $\Theta/T_c$  bis 5 zu erklären, so dass vorläufig die Betrachtung der übernächsten Nachbarn nicht entbehrlich scheint.

ZIMAN [88] leitet ebenfalls die Hilfe des Bethe-Verfahrens im wesentlichen die gleichen Resultate ab wie GARRETT [20] mit der Molekularfeldtheorie. Eine weitere Bearbeitung mit den statistischen Methoden der Theorie der Überstruktur in Metallen hat SATO [54] publiziert.

BROOKS und DOMB [10] berechnen das zweidimensionale antiferromagnetische Ising-Modell auf Grund einer von KRAMERS und WANNIER [37] vorbereiteten strengen Anwendung der Boltzmann-Statistik.

TSUYA [71] gelang die Darstellung der Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von MnSe durch Anwendung der Energiebandtheorie des Ferromagnetismus von MIYAHARA [47] auf den Fall negativer Austauschintegrale.

STREET [65] soll die theoretischen Arbeiten bis 1951 resümieren.

### 3. Neutronenbeugungsexperimente

Die experimentelle Bestätigung der schon 1936 von NÉEL [49] vorausgesagten Aufteilung der Dipole eines Antiferromagnetikums in zwei (oder mehrere) antiparallel magnetisierte Untergitter liess mangels passender Methoden lange auf sich warten. Die Röntgenmethoden mussten für einen direkten Nachweis des Ordnungszustandes versagen, weil der Röntgen-Streuquerschnitt von der Orientierung der magnetischen Dipole gegen die Einfallrichtung der Röntgenquanten unabhängig ist.

1949 fanden SHULL und SMART [56] in der Neutronenstreuung eine Methode zum direkten Nachweis magnetischer Ordnungszustände. Für kleine Streuwinkel liegt der Neutronen-Streuquerschnitt der Hülle in der gleichen Grösseordnung wie derjenige des Atomkerns und hat die Eigenschaft, von der Orientierung des Hüllenmomentes gegen die Streuebene abhängig zu sein.

Für einen Ordnungszustand gemäss Figur 3a zum Beispiel wird die magnetische Elementarzelle linear doppelt so gross wie die chemische, was sich in



Neutronenbeugungsdiagramm durch Auftreten von Überstrukturlinien äussern muss.

Dieser Effekt ist tatsächlich bei den untersuchten Antiferromagneten gefunden worden. Aus den Intensitätsverhältnissen lässt sich schliessen, dass in  $\text{MnO}$ ,  $\text{MnS}$ ,  $\text{MnSe}$ ,  $\text{FeO}$ ,  $\text{NiO}$  und  $\text{CoO}$ , welche alle im NaCl-Typ kristallisieren und daher in bezug auf die Metallionen flächenzentriert sind, unterhalb der Curie-Temperatur eine Ordnung zweiter Art (vgl. Figur 4a) sich einstellt. SHULL, STRAUSSER und WOLLAN [57] konnten ebenfalls zeigen, dass die Dipole wie bei den Ferromagneten im Kristall an gewisse Vorzugslagen gebunden sind, in diesen Fällen die 100- und äquivalenten Richtungen.

Die Tatsache, dass eine Ordnung zweiter Art vorliegt, besagt gemäss Abschnitt III 1, dass die Wechselwirkung zwischen übernächsten Nachbarn besonders stark sein muss. Nach den in II.2 dargestellten theoretischen Überlegungen ist dies auch zu erwarten, da ja in den in Frage stehenden Stoffen die übernächsten Nachbarn mit dem die indirekte Wechselwirkung vermittelnden Kopplungslinien auf einer Geraden liegen, während zwischen nächsten Nachbarn sowohl die direkte Wechselwirkung infolge des grossen Abstands der Ionen als auch die indirekte Wechselwirkung infolge des gewinkelten Kopplungsweges klein sind.

Ebenfalls eine Ordnung zweiter Art fand ERIKSON [13], [14] bei dem in bezug auf die Mn-Ionen tetragonal raumzentrierten  $\text{MnO}_2$ . Hingegen zeigen  $\text{MnF}_2$  und  $\text{FeF}_2$  bei gleichem Kristallgitter eine Ordnung erster Art. Die Vorzugsrichtung der Spin steht senkrecht zur  $c$ -Achse.

Bei dem in der NiAs-Struktur kristallisierenden CrSb fand SNOW [62], dass alle Dipole in einer Netzebene senkrecht zur  $c$ -Achse unter sich parallel, jedoch antiparallel zu den Dipolen der benachbarten Netzebenen stehen, wodurch eine Schichtstruktur resultiert. Die magnetische Vorzugslage ist die  $c$ -Achse.

Von den Übergangsmetallen (vgl. II/1), welche nach NÉEL [49] antiferromagnetisch sein sollten, haben SHULL und WILKINSON [58] V, Cr, Mn, Nb, Mo und W nach der Methode der Neutroneninterferenzen untersucht. Sie konnten aber nur bei Cr mit Sicherheit einen antiferromagnetischen Ordnungszustand feststellen. Der Curie-Punkt scheint im Widerspruch zu den später zu besprechenden Suszeptibilitätsmessungen von MCGUIRE und KRIESSMAN [46] bei zirka  $150^\circ\text{C}$  zu liegen. Die Resultate bezüglich Mn sind noch nicht veröffentlicht.

#### IV. Magnetische Eigenschaften

##### 1. Domänenstruktur, Bloch-Wände, Hystereseerscheinungen

Man kann sich mit NÉEL [50] fragen, ob der Ordnungszustand unterhalb der Curie-Temperatur sich gleichmässig über den ganzen Kristall ausdehnt oder ob in Analogie zu den Ferromagneten Weiss-Bezirke vorliegen. An sich stellen diese ja im ferromagnetischen Fall das Mittel dar, das die Natur benutzt,

um die magnetostatische Energie der spontanen Magnetisierung möglichst zu halten. Beim Antiferromagnetismus wäre wegen der verschwindenden spontanen Magnetisierung aus diesem Grunde eine Aufteilung in Weiss-Bezirke nicht nötig. Wir wissen aber vom Ferromagnetismus her, dass infolge von inneren mechanischen Spannungen einzelne, im spannungsfreien Zustand in anderen gleichberechtigte Magnetisierungsrichtungen energetisch bevorzugt werden. Ändert der Spannungszustand in einem antiferromagnetischen Kristall räumlich, so lässt sich vermuten, dass damit auch antiferromagnetische Weiss-Bezirke auftreten. Ihre Form und Grösse sind aber im Gegensatz zum ferromagnetischen Fall nicht wesentlich durch die Gestalt des Körpers, sondern vielmehr durch seinen Spannungszustand, Reinheit usw. bestimmt.

Wenn Weiss-Bezirke vorhanden sind, müssen auch Grenzen zwischen verschiedenen Bezirken auftreten. Man kann wiederum durch Vergleich zum Ferromagnetismus auf die Struktur dieser Bloch-Wände schliessen. Die örtliche Änderung der Spinrichtung in diesen Übergangsgebieten erfolgt so, dass die Energie, die sich aus Austauschenergie und Kristallenergie zusammensetzt, über die Wanddicke integriert, minimal wird. Bei den Antiferromagneten sind diese Beiträge von der gleichen Grössenordnung wie bei den Ferromagneten. Man kann daher für die Dicke der Wände ebenfalls zirka 100 Atomabstände und für ihre Energie ungefähr  $1 \text{ erg/cm}^2$  einsetzen.

Da die Bloch-Wände der Antiferromagnete gleiche Struktur wie diejenigen der Ferromagnete besitzen, wird ihre Beweglichkeit im Kristallgitter auch von der gleichen Grössenordnung sein, das heisst, man braucht für eine Wandverschiebung denselben «magnetischen Druck», welcher durch den Energiegewinn bei der Verschiebung eines Quadratcentimeters Wand um 1 cm dargestellt wird. Die kritische Feldstärke  $H_{krit}$ , bei welcher im Antiferromagnetikum Wandverschiebungen vor sich gehen, lässt sich daher aus der folgenden Gleichung abschätzen

$$J_s H_c = \chi H_{krit}^2. \quad (1)$$

Setzt man hierin für die spontane Magnetisierung  $J_s$  des Ferromagnetikums 1700 Gs, für seine Koerzitivkraft  $H_c$  1 Oe und für die Suszeptibilität des Antiferromagnetikums  $\chi = 3 \cdot 10^{-4}$ , so wird  $H_{krit}$  von der Grössenordnung 3000 Oe, das heisst die Wandverschiebungen gehen erst bei wesentlich höheren Feldstärken als in Ferromagneten vor sich. Entsprechend erwartet man die Drehung der Magnetisierungsrichtung, die sich bei Ferromagneten im allgemeinen oberhalb 100 Oe abspielt, erst bei Feldstärken über 30000 Oe.

Der Hysteresis der Magnetisierung bei den ferromagnetischen Stoffen entspricht in unserem Falle eine Hysteresis der Suszeptibilität.

Eine solche ist bis heute allerdings noch nicht beobachtet worden. Wo aber stellten GORTER [22] an  $\text{CrK}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$  und KURTI [38] an ammoniakalischem Eisenalaun bei  $0,03^\circ \text{ K}$  deutliche Hysterese der Magnetisierung fest.

## 2. Die Suszeptibilität

Die Berechnung der Suszeptibilität oberhalb des Curie-Punktes ist in Abschnitt III 1 beschrieben. Im Anschluss an Arbeiten von NÉEL [49], [50], BITTER [7] und VAN VLECK [75], [76] lässt sich die Behandlung des Suszeptibilität und Magnetisierung der Untergitter unterhalb  $T_c$  folgendermassen skizzieren:

Die Magnetisierung der Untergitter ergibt sich aus der Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_{A\infty} B_j \left( \frac{(\vec{H} + \vec{H}_{iA}) \mu}{k T} \right), \quad \vec{M}_B = \vec{M}_{B\infty} B_j \left( \frac{(\vec{H} + \vec{H}_{iB}) \mu}{k T} \right). \quad (16)$$

$M_{i\infty}$  und  $M_{e\infty}$  sind die Sättigungsmagnetisierungen der Untergitter A und B am absoluten Nullpunkt,  $\mu$  das magnetische Moment der Dipole und  $B_j(z)$  die Brillouin-Funktion für den Spin  $j$

$$B_j(z) = \frac{2j+1}{2j} \operatorname{ctgh} \left( \frac{2j+1}{2j} z \right) - \frac{1}{2j} \operatorname{ctgh} \left( \frac{z}{2j} \right). \quad (17)$$

Für  $H_{iA}$  und  $H_{iB}$  müssen die Ausdrücke (7) bzw. (12) eingesetzt werden.

Es ist klar, dass eine geschlossene Lösung von (16) für beliebige Temperaturen nicht möglich ist. Die Berechnung der Suszeptibilität  $\chi = (\vec{M}_A + \vec{M}_B) \cdot \vec{H}$  ist daher unter der Annahme durchgeführt, dass nur die Richtung, nicht aber der Absolutbetrag der Magnetisierung der Untergitter durch das äussere Feld verändert werde. Gleichzeitig wird angenommen, dass sich die Kristallanisotropie durch die gegenüber der Kopplungsenergie der Untergitter kleine Energie  $W_K = -K_1 \cos 2\theta$  darstellen lasse, wo  $\theta$  den Winkel zwischen der magnetischen Vorzugsrichtung  $A$  und der Magnetisierungsrichtung bedeutet. Das Magnetfeld  $\vec{H}$  schliesse den Winkel  $\beta$  mit  $A$  ein.

Unter der Wirkung des Feldes drehen sich die Magnetisierungen der Untergitter, wie aus Figur 6 ersichtlich, aus der Vorzugsrichtung  $A$  heraus und sind nicht mehr genau antiparallel, was zu einer resultierenden Magnetisierung  $\vec{M}$  führt. Da wegen der starken Wechselwirkung zwischen  $\vec{M}_A$  und  $\vec{M}_B$  der Winkel zwischen diesen Magnetisierungen noch nahezu ein gestreckter ist, kann man nach wie vor von einer Richtung  $\Sigma$  der antiparallelen Magnetisierung sprechen. Ihr Winkel mit dem äusseren Feld  $H$  sei  $\psi$ .

Aus der Bedingung für das Momentengleichgewicht erhält man

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta - (H^2/2\gamma K_1)}. \quad (18)$$

Man berechnet hieraus unter der Annahme, dass sich im Mittel die Komponente

der resultierenden Magnetisierung senkrecht zu  $\vec{H}$  aufhebt, die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{1}{\gamma} \sin^2 \psi. \quad (1)$$

Die Ausdrücke (18) und (19) enthalten die folgenden Aussagen:

a) Für Felder  $H \ll H_{krit} = \sqrt{2} \gamma K_1$  bleibt die Magnetisierung in der  $VO$  zugslage liegen. Oberhalb der kritischen Feldstärke  $H_{krit}$  richtet sie sich

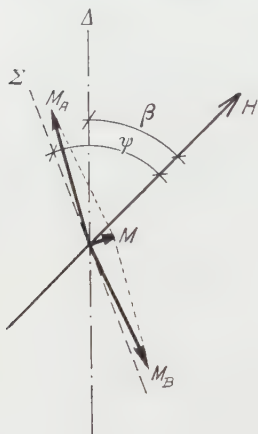


Fig. 6

Zur Berechnung der  
Suszeptibilität unterhalb  $T_c$ .

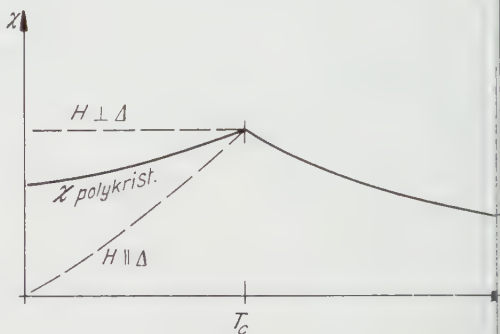


Fig. 7

Theoretische Kurven der  
Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität.

gegen in zunehmendem Mass senkrecht zum äusseren Feld.  $H_{krit}$  hat bei den meisten Antiferromagneten die Grössenordnung  $10^4$  Oe ( $K_1 = 10^5$  erg/cm<sup>3</sup>  $\gamma = 50$ ).

b) Die Suszeptibilität ist bei schwachen Feldern abhängig vom Winkel zwischen  $H$  und  $\Delta$ . Sie verschwindet für  $\beta = 0$  und hat ihr Maximum  $\chi_{max} = 1$  wenn  $H \perp \Delta$ .

c) In der Nähe der kritischen Feldstärke wird sie feldabhängig, weil dann eine Funktion des Feldes ist. Die Suszeptibilität steigt mit zunehmendem Felde.

d) Da bei  $H \perp \Delta$  die temperaturabhängige Kristallenergie und Magnetisierung der Untergitter keine Rolle spielen (die Magnetisierung bleibt bei allen Feldstärken in  $\Delta$  liegen), ist unter den getroffenen Annahmen eine temperaturunabhängige Suszeptibilität  $\chi = 1/\gamma$  zu erwarten. Dieser Wert schliesst, wie aus (10) und (11) ersichtlich, an den paramagnetischen Suszeptibilitätswert bei  $T_c$  ohne Sprung an. Der hieraus zu erwartende Temperaturverlauf der Suszeptibilität ist in Figur 7 aufgetragen. Die Temperaturabhängigkeit von  $\chi$  folgt aus der Lösung des Gleichungssystems (16) für diese spezielle Orientierung.



Für einen Polykristall wird

$$\chi_{poly} = \frac{2\chi_{\perp} + \chi_{\parallel}}{3}, \quad (20)$$

was erwarten lässt, dass die Suszeptibilität am absoluten Nullpunkt auf zwei Drittel des Wertes beim Curie-Punkt  $T_c$  gefallen ist.

Diese theoretischen Resultate können mit experimentellen Daten verglichen werden. Als Einkristalle sind vor allem  $\text{FeCO}_3$ ,  $\text{MnF}_2$ ,  $\text{MnO}_2$  und  $\text{MnO}$  durch BIZETTE [8] untersucht. Bei der ersten, rhomboedrisch kristallisierenden Substanz sowie beim tetragonalen  $\text{MnF}_2$  besteht eine Vorzugslage  $\Delta$  für die Magnetisierung. In Übereinstimmung mit der Theorie ist die Suszeptibilität unterhalb  $T_c$  praktisch temperaturunabhängig, wenn  $H \perp \Delta$ . Ebenso strebt sie erwartungsgemäss mit abnehmender Temperatur gegen Null, wenn  $H \parallel \Delta$ .

Beim ebenfalls tetragonalen  $\text{MnO}_2$  bilden die  $a$ - und  $b$ -Achsen die Vorzugsrichtungen. Man findet daher bei Magnetisierung in  $c$ -Richtung temperaturunabhängige Suszeptibilität, während in  $a$ - und  $b$ -Richtung immer eine Komponente parallel  $H$  zeigt und deshalb gegen den absoluten Nullpunkt hin ein Abfall der Suszeptibilität beobachtet wird. Das kubische  $\text{MnO}$  verhält sich isotrop.

Bei allen diesen Substanzen konnte unterhalb  $T_c$  die theoretisch verständliche Zunahme der Suszeptibilität mit steigender Feldstärke festgestellt werden.

Figur 8 demonstriert an Hand von Messungen an polykristallinen Proben von  $\text{MnF}_2$  und  $\text{MnO}$ , dass die theoretisch erwartete Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von Figur 7 gut bestätigt wird. Die Bedingung  $\chi(0) = 2\chi(T_c)/3$  wird allerdings nur innerhalb sehr weiter Grenzen erfüllt. Hierüber berichtet VAN VLECK [76] Näheres.

LINDSAY [43] stellte bei  $\text{MnSe}$  eine sehr starke Temperaturhysterese der Suszeptibilität fest, welche durch Annahme einer langen Einstellzeit für das thermodynamische Gleichgewicht zwischen verschiedenen Kristallmodifikationen des  $\text{MnSe}$  erklärt wird.

Der charakteristische Temperaturverlauf der Suszeptibilität von Figur 7 und 8 kann als eines der hauptsächlichsten Kennzeichen für das Auftreten von Antiferromagnetismus gewertet werden. In diesem Sinne interessant sind die erwähnten Messungen von Mc GUIRE und KRIESSMAN [46] an Cr, welche eine bis  $1400^\circ \text{C}$  stetig ansteigende Suszeptibilität ergeben, was sich durch Antiferromagnetismus mit sehr hohem  $T_c$  deuten liesse. Eigenartigerweise wird oberhalb  $150^\circ \text{C}$  mit Neutroneninterferenzen keine Überstruktur mehr gefunden. Ähnliche Schlüsse lassen die Suszeptibilitätsmessungen von HOARE und MATTHEWS [29] an Pt, Rh und Pd zu. Während Pt bis zu  $20^\circ \text{K}$  hinunter einen negativen Temperaturkoeffizienten von  $\chi$  zeigt, ist derjenige von Rh im untersuchten Temperaturgebiet, das heisst hinauf bis zu  $300^\circ \text{K}$ , positiv, was wiederum auf Antiferromagnetismus mit relativ hohem  $T_c$  hindeutet. Infolge seines typischen Suszeptibilitätsmaximums bei  $80^\circ \text{K}$  könnte Pd unterhalb dieser Temperatur ebenfalls antiferromagnetisch sein.



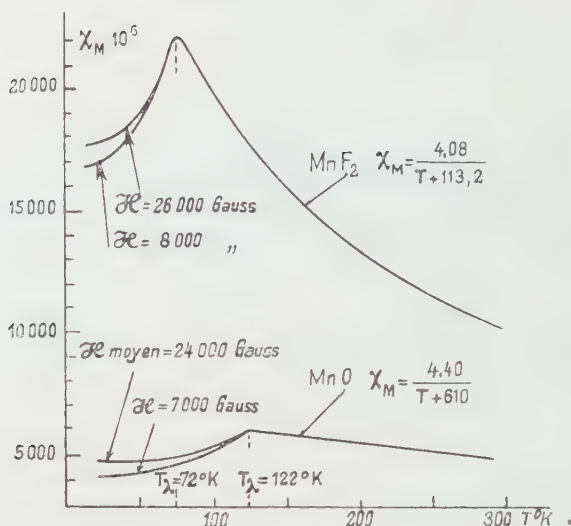


Fig. 8

Experimentelle Kurven der Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von  $\text{MnF}_2$  und  $\text{MnO}$  (nach BIZETTE [8]).

### 3. Antiferromagnetische Resonanz

Ein magnetischer Dipol besitzt in einem Magnetfeld  $H_{\text{eff}}$  eine Resonanzfrequenz

$$\omega = \frac{g \mu_B}{\hbar} H_{\text{eff}}, \quad (1)$$

welche experimentell durch ein Absorptionsmaximum für elektromagnetische Wellen entsprechender Frequenz erkannt wird. Eine gewisse Schwierigkeit liegt in der Berechnung von  $H_{\text{eff}}$ , welches mit dem von aussen an einen Probekörper angelegten Feld durchaus nicht identisch ist, sondern wesentlich durch das er magnetisierende Feld  $H_D$ , durch das Austauschfeld  $H_i$  und durch das die Kristallanisotropie darstellende Feld  $H_A$  mitbestimmt ist. Bei den Ferromagneten liegt  $H_{\text{eff}}$  immer in der Richtung der Magnetisierung  $\vec{M}$  und spielt, wie aus der Bewegungsgleichung ( $\vec{D}$  = Drall des Elementarmagneten)

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = [\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}}] \quad (2)$$

ersichtlich ist, keine Rolle. Aus Abschnitt IV/2, Figur 6, geht jedoch hervor, dass in Antiferromagneten die Richtung von  $\vec{M}$  im allgemeinen nicht mit der Richtung von  $H_{\text{eff}}$  zusammenfällt, was bedeutet, dass unterhalb des Curiepunktes  $H_i$  nicht mehr vernachlässigt werden darf. Die Resonanzfrequenz

verschiebt sich deshalb beim Abkühlen unter den Curie-Punkt plötzlich stark. Da bei  $T_c = 100$  K  $H_i$  in der Grössenordnung  $10^6$  Oe liegt und im allgemeinen bei äusseren Feldern von einigen  $10^3$  Oe und Frequenzen um  $10^{10}$  Hz gearbeitet wird, verlagert sich die Resonanzstelle gewöhnlich ausserhalb des Messbereiches der verwendeten Anordnungen. Hingegen konnten UBBINK, POULIS, GERRITSEN und GORTER [74] im Falle der tiefen Curie-Temperatur von  $4,3^\circ$  K bei  $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  die Absorptionsfrequenzen infolge des entsprechenden kleinen  $H_i$  weiter beobachten.

Die oben skizzierte Theorie des Effektes wurde in grosser Allgemeinheit durch KEEFER und KITTEL [34] und WANGSNESS [78] entwickelt. Eine frühere Bearbeitung stammt von NAGAMIYA [48]. UBBINK [73] behandelt den Fall eines rhombischen Kristalls im Hinblick auf die eben erwähnten Messungen an  $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ . Messungen von OKAMURA, TORIZUKA und KOJIMA [52] an  $\text{MnO}$ ,  $\text{MnS}$  und  $\text{MnSe}$ , von TROUNSON, BLEIL, WANGSNESS und MAXWELL [70] an  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , von HUTCHISON [32] an  $\text{MnF}_2$  und von BICKFORD [6] an  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  bei der Umwandlungstemperatur von  $118^\circ$  K zeigen alle teils schlagartiges, teils allmähliches Verschwinden der Absorptionsmaxima unterhalb der Curie-Temperatur. Bei  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  ist das Auftreten von zwei neuen Absorptionsmaxima bei kleiner äusserer Feldstärke beobachtet worden.

TSUYA und ICHIKAWA [72] wie auch KEEFER und KITTEL [34] diskutieren die Breite der Absorptionslinien.

MAXWELL [45] gibt einen kurzen Überblick über die experimentellen Arbeiten auf dem Gebiete der antiferromagnetischen Resonanz.

## V. Erscheinungen beim Übergang vom paramagnetischen zum antiferromagnetischen Zustand

Wenn der Übergang vom paramagnetischen zum antiferromagnetischen Zustand wie beim Ferromagnetismus einem Übergang von Disorder zu Order entspricht, so müssen beim Antiferromagnetismus die typischen, beim Ferromagnetismus mit gerader Potenz von der Magnetisierung abhängigen Übergangserscheinungen auftreten, also Anomalie der spezifischen Wärme, Gitterverzerrung und Anomalie der thermischen Ausdehnung sowie Beeinflussung des Elastizitätsmoduls.

Über die *Anomalie der spezifischen Wärme* liegen nur wenige Messungen vor. Zu erwähnen sind diejenigen von SHALYT [55] an  $\text{NiCl}_2$ ,  $\text{CoCl}_2$ ,  $\text{FeCl}_2$  und  $\text{CrCl}_2$ . Die erwarteten Maxima bei der Curie-Temperatur sind beobachtet, jedoch sind keine Angaben über ihre Höhe und ihre Fläche publiziert.

*Gitterverzerrungen* unterhalb des Curie-Punktes wurden in den Arbeiten von TOMBS und ROOKSBY [67], [68] sowie von GREENWALD und SMART [24], [25] nachgewiesen. Die oberhalb der Curie-Temperatur exakt kubischen Gitter von

MnS, MnO, FeO und NiO deformieren sich unterhalb  $T_c$  zu rhomboedrischen Strukturen. Das kubische CoO wird tetragonal, wobei die  $c$ -Achse um 0,5% kürzer als die  $a$ -Achse wird. Dieses unterschiedliche Verhalten ist erstaunlich, da nach den Shull'schen Neutroneninterferenzversuchen der Ordnungszustand in CoO derselbe ist wie bei MnO, FeO und NiO.  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , das Korundstruktur besitzt, zieht sich, wenn es antiferromagnetisch wird, längs der 111-Richtung zusammen.

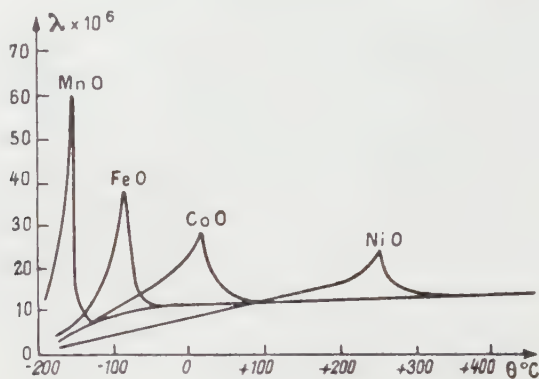


Fig. 9

Anomalie der thermischen Ausdehnung beim Curie-Punkt (nach FOEX [16]).

Solche Strukturänderungen müssen sich auch im Verlauf des *thermischen Ausdehnungskoeffizienten* äussern, was FOEX [16] (vgl. Figur 9) bei MnO, FeO, CoO und NiO tatsächlich beobachtete.

Eine weitere Folge der Strukturänderung ist der von STREET und LEWIS [17] bei NiO und CoO bei steigender Temperatur beobachtete Anstieg des Elastizitätsmoduls um 75 bzw. 150% am Curie-Punkt. Interessant ist auch die Beobachtung einer wesentlich vergrösserten mechanischen inneren Dämpfung im antiferromagnetischen Zustand, welche in ähnlicher Weise wie die grosse innere Dämpfung der Ferromagnetika durch hysteresebefahene Veränderung der Domänenstruktur zu erklären versucht wird.

Obschon nur lose in diesen Zusammenhang gehörend, sei noch auf die Beobachtung von FOEX und WUCHER [19] hingewiesen, wonach  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  im amorphen Zustand erwartungsgemäss nicht antiferromagnetisch wird. Hervorzuheben ist die gefundene Abnahme des magnetischen Momentes der Elementarmagnete im amorphen Zustand, welche möglicherweise durch eine Kompensation der Spinmomente durch die frei werdenden Bahnmomente verursacht wird.

Endlich führen wir noch die Arbeit von CORLISS, DELABARRE und ELLIOTT [12] an, welche sich auf Mischkristalle von  $\text{MnF}_2$  mit  $\text{ZnF}_2$  bezieht, bei welchen sich der Curie-Punkt linear mit dem  $\text{ZnF}_2$ -Gehalt gegen Null verschiebt, was

einen Anhaltspunkt dafür liefert, dass man in der Molekularfeldtheorie die Wechselwirkungskonstanten gemäss Gleichung (8) proportional der mittleren Zahl der nächsten magnetischen Nachbarn setzen darf.

VI. Zusammenstellung der bis heute bekannten Antiferromagnetika

In der folgenden Tabelle sind diejenigen Substanzen zusammengestellt, welche heute mit einiger Sicherheit als Antiferromagnetika gelten dürfen. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass diese Liste im Laufe der Zeit noch wesentlich erweitert werden muss. Einerseits ist nämlich die Untersuchung vieler Substanzgruppen, zum Beispiel der intermetallischen Verbindungen, von denen das antiferromagnetische CrSb ein Vertreter ist, noch lange nicht abgeschlossen, andererseits ist sicher, dass sehr viele der bis heute als normal paramagnetisch bekannten Stoffe sich bei sehr tiefen Temperaturen antiferromagnetisch erweisen, wie zum Beispiel die Alaune.

Zusammenstellung antiferromagnetischer Substanzen

Substanz	$T_c$ °K	$-\Theta$ °K	$\chi_{mol} \cdot 10^3$ max.	Kristall- struktur	Vor- zugs- lage	Literatur
Cr . . . . .	420		1,8			[46], [58]
MnO . . . . .	122	610	6	NaCl	100	[8], [63]
FeO . . . . .	198	570	8	NaCl	100	[8]
CoO . . . . .	291	280	5,3	NaCl	100	[8], [40], [69]
NiO . . . . .	647	2470		NaCl	100	[8], [40], [69]
MnS . . . . .	165	528	6,0	NaCl		[8], [63]
MnSe . . . . .	247	740	19	NaCl		[43], [63]
MnTe . . . . .	307		4,6	NiAs		[63]
CrSb . . . . .	700		1,9	NiAs		[62]
MnO <sub>2</sub> . . . . .	92		2,8	Rutil	c	[8] [17]
V <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	173		1,0			[18], [19], [30]
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	320			hexagonal		[11]
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> — $\alpha$ . . . . .	950	2000		hexagonal		[8]
FeCO <sub>3</sub> . . . . .	57	14	48	hexagonal	c	
MnF <sub>2</sub> . . . . .	72	113	22	Rutil	a, b	[8], [26]
FeF <sub>2</sub> . . . . .	79	117	22	Rutil	a, b	[8], [55]
CrCl <sub>2</sub> . . . . .	70					[55]
FeCl <sub>2</sub> . . . . .	24					[55]
CoCl <sub>2</sub> . . . . .	25					[55]
NiCl <sub>2</sub> . . . . .	50					[55]
VCl <sub>3</sub> . . . . .	30					[64]
CuCl <sub>2</sub> · 2H <sub>2</sub> O . . . . .	4,3			rhomb.	100	[53]
(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> CrK <sub>2</sub> · 12H <sub>2</sub> O . .	0,004		2 · 10 <sup>6</sup>	kubisch		[22], [38]
(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> FeNH <sub>4</sub> · 12H <sub>2</sub> O .	0,043		10 <sup>3</sup>			[22], [38]
(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> Mn(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> · 6H <sub>2</sub> O	0,12					[22], [38]
(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> CuK <sub>2</sub> · 6H <sub>2</sub> O . .	0,05					[22], [38]



Diese sehr tiefen Curie-Temperaturen rühren möglicherweise von magnetischer Dipol-Dipol-Wechselwirkung her.

Neben den reinen Antiferromagneten scheinen auch Übergangssubstanzen zum Ferrimagnetismus bekannt zu sein, bei denen sich die Magnetisierung der Untergitter im feldlosen Zustand nicht exakt kompensieren. Solche Verhältnisse glaubt YOSIDA [81], [82], [83] in den Systemen  $\text{FeS}_n$ ,  $\text{CrS}_n$  und bei  $\text{Pr}_6\text{O}_{11}$  anzutreffen.

Den Fall ausgeprägten Ferrimagnetismus findet man vor allem bei den in Spinellgitter kristallisierenden Ferriten, welche wegen ihrer technischen Bedeutung als Ferromagnetika mit sehr schlechtem elektrischem Leitvermögen besonders eingehend untersucht sind. Zusammenfassende Darstellungen hierüber publizierten FAIRWETHER et al. [15], SNOEK [61] und LABHART [39].

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Studium des Antiferromagnetismus in den letzten Jahren einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis der magnetischen Eigenschaften fester Körper geliefert und darüber hinaus wertvolle Gesichtspunkte und Anregungen zur Behandlung kooperativer Phänomene im allgemeinen beige-steuert hat.

Die Entwicklung befindet sich aber noch in vollem Gange, und die Tragweite der neuen Erkenntnisse für die Physik des festen Körpers oder gar für die Technik ist noch keineswegs abgegrenzt.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ANDERSON, P. W., Phys. Rev. 79, 350 (1950).
- [2] ANDERSON, P. W., Phys. Rev. 79, 705 (1950).
- [3] ANDERSON, P. W., Phys. Rev. 86, 694 (1952).
- [4] BETHE, H. A., Z. Phys. 71, 205 (1931).
- [5] BETHE, H. A., Proc. Roy. Soc. (London) [A] 150, 552 (1935).
- [6] BICKFORD, L. R., Phys. Rev. 78, 449 (1950).
- [7] BITTER, F., Phys. Rev. 54, 79 (1937).
- [8] BIZETTE, H., J. Phys. Rad. 12, 13 (1951).
- [9] BLOCH, F., Z. Phys. 61, 206 (1930).
- [10] BROOKS und DOMB, Proc. Roy. Soc. (London) [A] 207, 343 (1951).
- [11] CHEVALLIER, R., J. Phys. Rad. 12, 24 (1951).
- [12] CORLISS, DELABARRE und ELLIOT, J. chem. Phys. 18, 1256 (1950).
- [13] ERIKSON, R. A., Phys. Rev. 85, 745 (1952).
- [14] ERIKSON und SHULL, Bull. Amer. Phys. Soc. 26, Nr. 3, 17 (1951).
- [15] FAIRWETHER et al., Rep. Phys. Soc. Progr. Phys. 15, 142 (1952).
- [16] FOEX, G., C. r. Acad. Sci. Paris 227, 193 (1948).
- [17] FOEX, G., J. Phys. Rad. 12, 5 (1951).
- [18] FOEX und GRAFF, C. r. Acad. Sci. Paris 209, 160 (1939).
- [19] FOEX und WUCHER, C. r. Acad. Sci. Paris 232, 2193 (1951).
- [20] GARRETT, C. G. B., J. chem. Phys. 19, 1154 (1951).
- [21] GARRETT, C. G. B., J. Phys. Rad. 12, 71 (1951).
- [22] GORTER, C. J., J. Phys. Rad. 12, 127 (1951).
- [23] GORTER und HAANTJES, Physica 18, 285 (1952).

- [24] GREENWALD und SMART, Phys. Rev. 82, 113 (1951).
- [25] GREENWALD und SMART, Nature 166, 523 (1950).
- [26] GRIFFEL und STOUT, J. chem. Phys. 18, 1455 (1950).
- [27] HEISENBERG, W., Z. Phys. 49, 619 (1928).
- [28] HELLER und KRAMERS, Proc. Roy. Acad. Sci. Amsterdam 37, 378 (1934).
- [29] HOARE und MATTHEWS, Proc. Roy. Soc. (London) [A] 272, 137 (1952).
- [30] HONDA und SONE, Sci. Rep. Tôhoku Univ. 3, 223 (1914).
- [31] HULTHÉN, L., Arkiv Mat. Astr. Fys. [A] 26, Nr. 11 (1938).
- [32] HUTCHISON, zitiert bei MAXWELL [45].
- [33] KASTELEIJN, P. W., Physica 78, 104 (1952).
- [34] KEFFER und KITTEL, Phys. Rev. 85, 329 (1952).
- [35] KRAMERS, H. A., Physica 7, 182 (1934).
- [36] KRAMERS, H. A., Physica 78, 101 (1952).
- [37] KRAMERS und WANNIER, Phys. Rev. 60, 252, 263 (1941).
- [38] KURTI, N., J. Phys. Rad. 72, 133 (1951).
- [39] LABHART, H., Mitteilungen GFF 7, 17 (1951).
- [40] LA BLANCHETAIS, C. H., J. Phys. Rad. 72, 765 (1951).
- [41] LI, Y. Y., Phys. Rev. 80, 457 (1951).
- [42] LI, Y. Y., Phys. Rev. 84, 721 (1951).
- [43] LINDSAY, R., Phys. Rev. 84, 569 (1951).
- [44] LÜTTINGER, J. M., Phys. Rev. 81, 1015 (1951).
- [45] MAXWELL, L. R., Amer. J. Phys. 20, 80 (1952).
- [46] MCGUIRE und KRIESSMAN, Phys. Rev. 85, 452 (1952).
- [47] MIYAHARA, S., Proc. Phys. Math. Soc. Japan 22, 528 (1940).
- [48] NAGAMIYA, T., Progr. Theor. Phys. 6, 342, 350 (1951).
- [49] NÉEL, L., Ann. Phys. 5, 232 (1936).
- [50] NÉEL, L., Ann. Phys. 3, 137 (1948).
- [51] NÉEL, L., Ann. Inst. Fourier 7, 163 (1949).
- [52] OKAMURA, TORIZUKA und KOJIMA, Phys. Rev. 82, 285 (1951) L.
- [53] POULIS, VAN DEN HANDEL, UBBINK, POULIS und GORTER, Phys. Rev. 82, 552 (1951) L.
- [54] SATO, H., Sci. Rep. Tôhoku Univ. [A] 7, 71 (1949).
- [55] SHALYT, S., Nature 143, 799 (1939).
- [56] SHULL und SMART, Phys. Rev. 76, 1256 (1949).
- [57] SHULL, STRAUER und WOLLAN, Phys. Rev. 83, 333 (1951).
- [58] SHULL und WILKINSON, Bull. Amer. Phys. Soc. 27, Nr. 1, 24 (1952).
- [59] SLATER, J. C., Phys. Rev. 36, 57 (1930).
- [60] SMART, J. S., Phys. Rev. 86, 968 (1952).
- [61] SNOEK, J. L., J. Phys. Rad. 72, 80 (1951).
- [62] SNOW, A. I., Phys. Rev. 85, 365 (1952) L.
- [63] SQUIRE, C. F., Phys. Rev. 56, 922 (1937).
- [64] STARR, BITTER und KAUFMANN, Phys. Rev. 58, 977 (1940).
- [65] STREET, R., Sci. Progr. 39, 258 (1951).
- [66] STREET und LEWIS, Nature 168, 1036 (1951) L.
- [67] TOMBS und ROOKSBY, Acta cryst. 4, 474 (1951).
- [68] TOMBS und ROOKSBY, Nature 165, 442 (1950); 167, 364 (1951).
- [69] TROMBE, M. F., J. Phys. Rad. 72, 22 (1951).
- [70] TROUNSON, BLEIL, WANGSNES und MAXWELL, Phys. Rev. 79, 227 (1950).
- [71] TSUYA, N., Sci. Rep. Tôhoku Univ. [A] 7, 387 (1949).
- [72] TSUYA und ICHIKAWA, Phys. Rev. 83, 1065 (1951).
- [73] UBBINK, J., Phys. Rev. 86, 567 (1952) L.

- [74] UBBINK, POULIS, GERRITSEN und GORTER, *Physica* 18, 361 (1952).
- [75] VAN VLECK, J. H., *J. chem. Phys.* 9, 85 (1941).
- [76] VAN VLECK, J. H., *J. Phys. Rad.* 12, 114 (1951).
- [77] WAKEFIELD, A. J., *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 47, 419 (1951).
- [78] WANGSNESS, R. K., *Phys. Rev.* 86, 146 (1952).
- [79] WANNIER, G. H., *Phys. Rev.* 79, 357 (1950).
- [80] WEISS, P. R., *Phys. Rev.* 74, 1493 (1948).
- [81] YOSIDA, K., *J. chem. Phys.* 20, 202 (1952) L.
- [82] YOSIDA, K., *Progr. theor. Phys.* 6, 356 (1951).
- [83] YOSIDA, K., *Physica* 17, 794 (1951) L.
- [84] ZENER, C., *Phys. Rev.* 81, 440 (1951).
- [85] ZENER, C., *Phys. Rev.* 82, 403 (1951).
- [86] ZENER, C., *Phys. Rev.* 83, 299 (1951).
- [87] ZENER, C., *Phys. Rev.* 85, 324 (1952).
- [88] ZIMAN, J. M., *Proc. Phys. Soc. (London)* [A] 64, 1108 (1951).

(Eingegangen: 19. September 1952.)

## Energiebedarf zur Verhütung von Vereisungen an Freileitungen<sup>1)</sup>

Von THOMAS BRUNNER<sup>2)</sup>, Weissfluhjoch, Davos

### 1. Das Problem

Nachdem MELCHER [1]<sup>3)</sup> in seiner Arbeit über Vereisungserscheinungen die Entstehung von Reif und Eis im Windkanal eingehend untersucht hat, soll abgeklärt werden, wie gross der Energieaufwand ist, um Vereisungen bei den verschiedensten meteorologischen Bedingungen zu verhüten.

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, eine Freileitung durch Wärmeeinwirkung vor gefährlichen Vereisungen zu schützen: Entweder wird die Leitung, sobald sich eine gewisse Eismenge gebildet hat, mit einem starken Stromstoss belastet, so dass das Eis an der Leiteroberfläche schmilzt und abfällt, oder es wird die Leitung dauernd etwas überbelastet, so dass die erzeugte Wärme ausreicht, die Eiseisbildung zu verhüten.

Die erste Methode lässt sich nur anwenden, wenn die Leitung nicht unter Hochspannung steht; wenn nämlich die Eislast plötzlich abfällt, beginnen die Leitungen zu schwingen (galloping conductors [2]), was bei gegenseitiger Berührung zu einem Kurzschluss führt. Auch besteht die Gefahr, dass eine ganze Reihe von Masten umgelegt wird. Das Problem schwingender Leitungen ist bei [2] eingehend behandelt.

<sup>1)</sup> Ausgeführt am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung im Auftrag der Schweizerischen Kommission für Vereisungsfragen.

<sup>2)</sup> Siehe Bemerkung ZAMP 3, 460 (1952), Fussnote 1.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 34.

Günstiger scheint es deshalb, eine Leitung dauernd eisfrei zu halten. Eisfrei bedeutet in diesem Zusammenhang nicht völliges Fehlen von Eis; Spuren von Eis schaden ja nichts, falls die Menge im Laufe der Zeit nicht zunimmt.

2. Erzeugung des Eises

Die Versuche wurden in einem offenen Windkanal, der in einem Kältelabor von  $-10^{\circ}\text{C}$  aufgestellt ist, durchgeführt. Die Temperatur liess sich in einem Bereich von  $-15^{\circ}$  bis  $-5^{\circ}$ , die Windgeschwindigkeit zwischen 0 und 20 m/s regulieren.

Erzeugung von Eis durch Kondensation von Dampf kam für diese Versuche nicht in Frage, da diese Methode keine schweren Vereisungen zu erzeugen gestattet. Die Zerstäubung von Wasser nach dem Prinzip der Spritzpistole schien uns nicht geeignet, weil eine genaue Justierung der Düsen und somit die Einhaltung einer einheitlichen Tröpfchengrösse unmöglich ist. Das Hindurchpressen von Wasser durch enge Bohrungen ergibt zwar feine Wasserstrahlen, aber viel zu grosse Tröpfchen. Die für die folgenden Untersuchungen benutzte Düse arbeitet nach dem Prinzip der Selbstzerstäubung (Herrn Prof. Dr. EICHELBERG von der ETH, danke ich für die Überlassung einer solchen Düse). Auf einer Düsennadel, welche die Form eines Zylinders mit aufgesetztem Kegelstumpf hat (Figur 1), sind vier zirka 0,05 mm tiefe Rillen eingeritzt. Setzt man auf die Düsennadel einen konischen Ring (Figur 2), so sind Ring und Nadel längs



Fig. 1

Düsennadel mit wasserführenden Rillen.

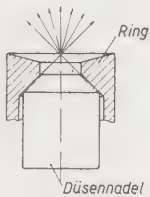


Fig. 2

Düse zur Wasserzerstäubung im Aufriss.

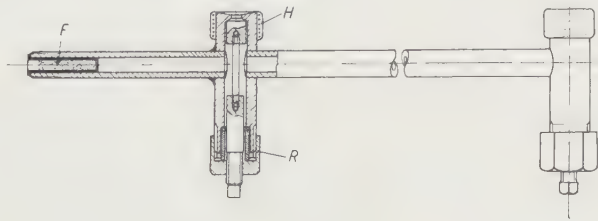


Fig. 3

Anordnung der mit Reguliervorrichtung (R), Heizwicklung (H) und Wattefilter (F) versehenen Düsen.



des ganzen Umfanges, mit Ausnahme der vier Rillen, dicht. Presst man Wasser zwischen Ring und Nadel, so entstehen vier feine Strahlen, die sich etwas aussenhalb der Düse treffen. Durch das Aufeinanderprallen der vier Wasserstrahlen entstehen feine Wassertropfchen, die gleichmässig in einen kegelförmigen Raum ausgestrahlt werden.

Um eine gleichmässige Verteilung der Tropfchen über den Kanalquerschnitt zu erreichen, wurden zwei Düsen nebeneinander angeordnet (Figur 3). Eine Einrichtung gestattet, Nadel und Ring in einer bestimmten gegenseitigen Lage zu fixieren. Auf diese Weise wird erreicht, dass die Düsen bei allen Versuchen gleich arbeiten. Ein Wattefilter *F* hält Verunreinigungen des Wassers, die die Rillen verstopfen könnten, zurück. Eine Heizwicklung *H* (30–60 W) verhindert das Einfrieren der Düsen. Die Wicklung wurde in eine Talk-Wasserglas-Paste eingebettet, die zum Schutze gegen Tropfwasser mit Zaponlack lackiert wurde.

### 3. Versuchskörper und Apparatur

Als Versuchskörper für die Anreifung dient ein 27 cm langes Aluminiumrohr von 10 mm Aussendurchmesser, in dessen innere Bohrung von 6,8 mm ein Heizelement gebracht wurde. Dieses besteht aus einem Pyrostearrohr, auf dem ein 0,2 mm dicker, oxydisch isolierter Konstantdraht eng aufgewickelt wurde. Der geringe Zwischenraum zwischen Drahtwicklung und Wand des Aluminiumrohres wurde mit Wasserglas ausgefüllt, so dass keine wärmeisolierende Luftschicht vorhanden ist (Figur 4).

Die Enden des Heizelementes sind zum Schutze gegen Wärmeableitung in Glas gefasst und zur Vermeidung der Konvektion mit Glaswolle verstopft.

Der Stab wird mit Wechsellspannung, die mittels eines Variac (Reguliertransformer) von 20–150 V reguliert wird, geheizt. Die Netzspannung, mit der



Fig. 4

Detail des zylindrischen Versuchskörpers ( $d = 10$  mm).

der Variac betrieben wird, ist stabilisiert; die benötigte Heizenergie wird an einem Wattmeter abgelesen.

Auf den Versuchsstab sind zwei *Thermoelemente* aufgeklemmt, eines in der Mitte, eines 4 cm von einem Stabende entfernt.

Die *Windgeschwindigkeit* wird mit einem Handanemometer bestimmt, die *Lufttemperatur* mittels eines Quecksilberthermometers, das in den Windkanal ragt, ohne von den Tropfchen getroffen zu werden.

#### 4. Bestimmung der Tröpfchengrösse, des Gehaltes an flüssigem Wasser und der Reifrate

Eine direkte Bestimmung der *Tröpfchengrösse* unter dem Mikroskop ist einer indirekten Methode vorzuziehen. MELCHER hat die Tröpfchen auf einer Gelatineschicht, die er blau einfärbte, aufgefangen und unter dem Mikroskop betrachtet. Diese Methode liefert keine Absolutwerte. Die Schwierigkeit der Erzeugung einer gleichmässigen Gelatineschicht und einer günstigen Einfärbung fällt weg, wenn man Photoplatten verwendet, auf die ein leichter Schleier entwickelt wird.

Die Bestimmung des *Gehaltes an flüssigem Wasser* wurde nicht wie von MELCHER einfach aus dem Verbrauch des Wassers berechnet. Tropfwasser an den Düsen sowie Reifbildung an den Wänden des Windkanals würden Fehler verursachen. Es wurden deshalb 5 bzw. 10 cm oberhalb des heizbaren Probestabes zwei weitere, aber ungeheizte Aluminiumstäbe in den Windkanal gebracht. Die während der Versuchsdauer auf ihnen abgelagerte Eismenge ist ein Mass für den Gehalt an flüssigem Wasser  $G_{\frac{1}{2}}^{100}$ . Dabei nimmt man an, dass alle Tröpfchen, die im angeblasenen Querschnitt vorhanden sind, sich auf dem Stab ablagern. Diese Annahme ist gemäss der Theorie von LANGMUIR [3] unter den herrschenden Bedingungen erfüllt.

Als *Reifrate* bezeichnen wir die pro Quadratzentimeter und Stunde abgelagerte Eismenge in Gramm.  $R_0$  ist dabei die Reifrate, wie sie an einem Stab ermittelt wird, dessen Querschnitt sich während der Eisablagerung nicht vergrössert hat,  $R$  diejenige eines Stabes, dessen Querschnitt im Laufe der Zeit zugenommen hat.

Der Zusammenhang zwischen  $R_0$  und  $R$  hängt stark von den Versuchsbedingungen ab.

Bei der Bestimmung der Reifrate ist noch zu berücksichtigen, dass die Verteilung der Wassertröpfchen über den Querschnitt des Windkanals nicht immer gleichmässig ist. Die grösseren Tröpfchen haben nämlich bei kleinen Windgeschwindigkeiten Zeit, einen gewissen Teil der Höhe des Kanales zu durchfallen, wodurch dann die Tröpfchendichte oben klein und unten gross wird. Durch Vorversuche kann diese Verteilung für verschiedene Windgeschwindigkeiten gemessen und als Korrektur bei den eigentlichen Versuchen angebracht werden.

Der Gehalt an flüssigem Wasser pro Kubikmeter nimmt – bei konstanter Leistung der Düsen – mit zunehmender Windgeschwindigkeit ab. Wenn der Wassergehalt für verschiedene Windgeschwindigkeiten konstant gehalten werden musste, wurden bei kleinen Windgeschwindigkeiten die Düsen während kürzerer oder längerer Zeit periodisch mittels eines Schiebers zugedeckt. Der Wassergehalt schwankt daher. Da aber das ganze Heizsystem eine gewisse Trägheit hat, werden dadurch die Resultate nicht verfälscht. Eine andere Re-

gulierung des Wassergehaltes kam nicht in Frage, denn zum Beispiel eine Erhöhung des Wasserdrukkes oder eine Vergrösserung der Rillen in der Düse hätte sofort auch eine Veränderung der Tröpfchengrösse und -verteilung zur Folge.

## 5. Der Wärmeübergang an einem trockenen, zylindrischen Stab

Die Heizleistung wird bestimmt, um den Stab bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten auf einer bestimmten Temperatur zu halten (zum Beispiel 15°C über Labortemperatur). Die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  ist definiert durch

$$W_t = \alpha F \Delta T,$$

wo  $W_t$  die pro Zeiteinheit abgeführte Wärmemenge,  $F$  die Oberfläche des zylindrischen Stabes und  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz bedeutet.

NUSSELT [4] bekommt für die Wärmeübergangszahl eines trockenen, zylindrischen Stabes, der senkrecht angeblasen wird, folgenden Ausdruck:

$$\alpha = 0,067 \lambda_m (1273 + Re)^{0,716} \quad \text{cal/cm}^2 \text{ Grad} \cdot \text{s}$$

$\lambda_m$  bedeutet die mittlere Leitfähigkeit der Grenzschicht, für Luft:

$$5,7 \cdot 10^{-5} \text{ cal/s cm Grad.}$$

$Re$  bedeutet die Reynoldssche Zahl.

$$Re = \frac{V d \varrho}{\eta},$$

wobei  $V$  = Windgeschwindigkeit,  $d$  = Durchmesser des Stabes,  $\varrho$  = Luftdichte,  $\eta$  = Zähigkeit der Luft bedeuten.

Tabelle 1 gibt die nach NUSSELT berechneten Werte der Wärmeübergangszahl, berechnet für  $\varrho = 0,97 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta = 166 \cdot 10^{-6} \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$  sowie die nötige Heizleistung  $W_{10}$ , um einen zylindrischen Stab von 1 cm Durchmesser und 100 cm Länge auf einer Temperatur von 10°C über der Lufttemperatur halten.

Tabelle 1  
Wärmeübergangszahl und Wärmeverlust  
berechnet für zylindrischen Stab (1 cm Durchmesser, 100 cm Länge,  $\Delta T = 10^\circ$ )

$V$ [m/s]	1,0	2,0	5,0	10,0	15,0	20,0
$Re$ . . . . .	585	1170	2925	5850	8800	11700
$\alpha$ [ $10^{-3} \text{ W/cm}^2 \text{ Grad}$ ] .	3,48	4,25	6,35	9,05	11,7	14,1
$W_{10}$ [W] . . . . .	11,0	13,35	20,0	28,5	36,8	44,4

Die graphische Darstellung (Figur 5) zeigt die berechneten und die gemessenen Werte der Wärmeübergangszahl  $\alpha$ .

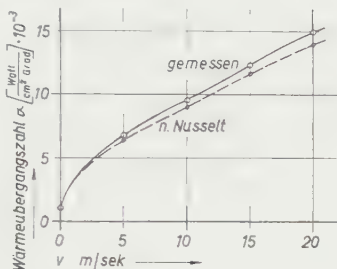


Fig. 5

Wärmeübergangszahl  $\alpha$  eines zylindrischen Stabes von 1 cm Durchmesser in Funktion der Windgeschwindigkeit  $v$ .

Die Abweichung zwischen gemessenen und berechneten Werten mag von der Schwierigkeit herrühren, die Oberflächentemperatur zu bestimmen.

Die Wärmeübergangszahl bei der Windstärke 0 m/s (Windstille) enthält den Einfluss der freien Konvektion, der Strahlung und der Ableitung.

## 6. Eisfreihaltung eines Stabes

Zuerst wird der Stab so stark geheizt, dass sich auf ihm nur Tropfen und keine Spuren von Eis zeigen; die aufgewendete Heizleistung bedeutet eine obere Grenze der zur Eisfreihaltung benötigten Energie. Dann wird die Heizung gedrosselt, bis alles Wasser gefriert, wodurch sich eine untere Grenzenergie ergibt. Dann wird die Heizleistung innerhalb dieser Grenzen so lange variiert, bis sich ein Gleichgewicht zwischen Wasser und Eis auf dem Stab bildet, wobei nur eine geringe Eismenge, die sich nicht vermehren darf, zugelassen wird. Die Feststellung, wann dieses Gleichgewicht erreicht ist, ist natürlich in gewissem Masse eine Ermessensfrage. Immerhin scheint eine Genauigkeit von  $\pm 10\%$  möglich.

Im folgenden sollen nun die Einflüsse der verschiedenen meteorologischen Faktoren auf den Energiebedarf untersucht werden.

### a) Verdunstung

Der zusätzliche Wärmebedarf, den ein feuchter Stab gegenüber einem trockenen benötigt, rührt in der Hauptsache von der Verdunstung her. Diese wiederum ist abhängig von der Dampfdruckdifferenz zwischen Stab und umgebender Luft sowie von der Windgeschwindigkeit. Man kann analog zum Wärmeübergang einen Massenübergang definieren. Die für die Verdunstung aufzuwendende Leistung  $W_f$  ist proportional der Dampfdruckdifferenz  $\Delta e$  und der Fläche  $F$ , an der Verdunstung stattfindet:

$$W_f = \beta \varepsilon F \Delta e ; \quad (4)$$



Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist. Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

Der gesamte Energiegehalt der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

$$Q = \frac{1}{2} \rho V c_p \Delta T$$

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

$$Q = \frac{1}{2} \rho V c_p \Delta T$$

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

$$Q = \frac{1}{2} \rho V c_p \Delta T$$

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

Die mittlere Temperatur der Luft in der Kammer ist durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben, welche durch die Temperatur der Luft in der Kammer gegeben ist.

den Luftdruck  $p$  sowie die Abhängigkeit von  $T$  und  $\Delta e$  mit Gleichung 5 berechnet. Hierbei sind die relativen Feuchtigkeiten zu 100% angenommen worden. Für den speziellen Fall eines Stabes von 100 cm Länge, 1 cm Durchmesser und 0° Oberflächentemperatur sei die Leistung mit  $W_0$  bezeichnet.

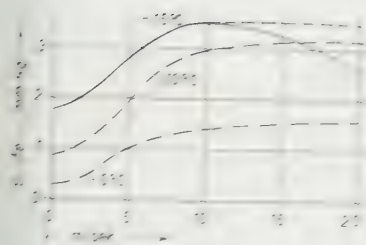


Fig. 6

Werte von  $\epsilon \cdot \Delta e$ , berechnet gemäß Gleichung 7 in Funktion der Windgeschwindigkeit.

$\Delta e$  = Sättigungsdefizit der anströmenden Luft, bezogen auf die Temperatur des Vereisungsstabes 0° C.

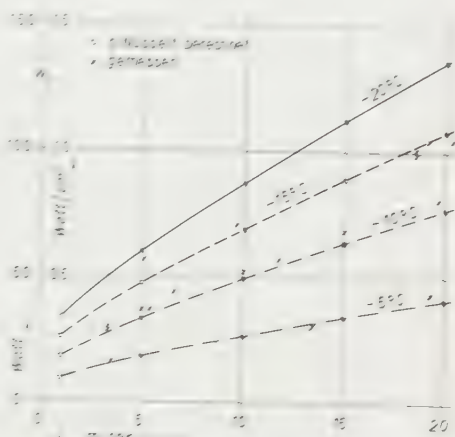


Fig. 7

Energieverlust  $W_0$  eines ringsum feuchten Stabes von 1 cm Durchmesser und 0° C Temperatur, der von einer seitlichen Strömung und Windstärke angeblasen wird.

Linke Ordinatenkala: bezogen auf eine Stablänge von 100 cm; rechte Ordinatenkala: bezogen auf 1 cm<sup>2</sup> projizierter Fläche.

Tabelle 2

Energiebedarf  $W_0$   $W_0$  eines feuchten, auf 0° C gehaltenen Stabes Luftfeuchtigkeit 100%; Stablänge 100 cm, Durchmesser 1 cm,  $\epsilon = 1,0$

	Windgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde					
	1	2	5	10	15	20
$T = -10^\circ \text{C}$ $\Delta e = 1,17 \text{ mm Hg}$	10,9	12,6	14,5	20,7	33,7	41,7
$T = -15^\circ \text{C}$ $\Delta e = 2,43 \text{ mm Hg}$	19,0	21,7	24,4	32,4	51,0	77,1
$T = -20^\circ \text{C}$ $\Delta e = 3,34 \text{ mm Hg}$	26,6	32,6	48,6	69,3	89,4	108,1
$T = -25^\circ \text{C}$ $\Delta e = 3,81 \text{ mm Hg}$	33,7	41,0	61,2	87,3	112,6	136,3

b) *Reifrate*

Da die Nebeltröpfchen unterkühlt sind, ist ein gewisser Energiebetrag nötig, um sie auf  $0^{\circ}\text{C}$  zu erwärmen. Die benötigte Leistung beträgt bei einer extrem grossen Reifrate von  $4\text{ g cm}^{-2}\text{ h}^{-1}$  und einer Unterkühlung von  $-10^{\circ}\text{C}$   $0,046\text{ W}$  pro Quadratzentimeter projizierter Fläche oder  $4,6\text{ W}$  für einen Stab von einem Meter Länge. Dieser Betrag fällt mit zunehmender Windgeschwindigkeit immer weniger ins Gewicht, da der Betrag  $W_0$  im allgemeinen bedeutend grösser ist.

Die gleiche Überlegung gilt natürlich auch in bezug auf den in der Luft enthaltenen Niederschlag (Schnee). Ein extrem starker Schneefall mag eine Wassermenge von  $10\text{ mm/h}$  ergeben, entsprechend  $1\text{ g/cm}^2$  je Stunde. Die Wassermenge beträgt also nur einen Viertel der oben angenommenen Reifrate und hat deshalb ebenfalls keinen grossen Einfluss.

c) *Gehalt an flüssigem Wasser*

Viele Messungen haben ergeben, dass der Gehalt an flüssigem Wasser  $G_w^{100}$  keinen oder höchstens einen ganz geringen Einfluss auf den Energiebedarf hat. Sicher ist der Einfluss einer Windgeschwindigkeitsänderung um  $\pm 1\text{ m/s}$  grösser als derjenige, der durch eine Veränderung von  $G_w^{100}$  um  $\pm 0,5\text{ g m}^{-3}$  bedingt ist (der in der Natur maximal vorkommende Wassergehalt dürfte  $1\text{ g m}^{-3}$  nur unwesentlich übersteigen).

d) *Tröpfchengrösse*

Die Abhängigkeit des Energiebedarfes in Funktion der Tropfengrösse wurde nicht untersucht. Aus den Untersuchungen von SCHÄFER auf Mount Washington [6] weiss man aber, dass die Tröpfchengrösse einen beträchtlichen Einfluss auf den Energiebedarf hat. Bei einem Tröpfchendurchmesser von  $12\text{ }\mu$  ist – bei sonst ähnlichen Bedingungen – der Energiebedarf etwa doppelt so gross wie bei Tröpfchen von  $6\text{ }\mu$  Durchmesser.

e) *Anblasrichtung*

Bei unseren Untersuchungen stand der Stab stets senkrecht zum Wind (Kreuzstrom). EDER [7] untersuchte den Zusammenhang zwischen Energiebedarf und Anblasrichtung  $\vartheta$ .

Die Abhängigkeit wird wie folgt ausgedrückt:

$$W(\vartheta) = W f(\vartheta) ,$$

wo  $f$  folgende Werte hat:

$\vartheta$	$f$
90° (senkrecht) .	1,00
60° . . . . .	0,90
30° . . . . .	0,68
0° (parallel) . .	0,52

Der Wärmeverlust eines parallel angeströmten Drahtes ist also nur rund halb so gross wie derjenige eines senkrecht angeströmten.

## 7. Vergleich mit den Resultaten von Schäfer

SCHÄFER hat im Jahre 1946 Vereisungserscheinungen während der Stürme auf Mount Washington untersucht. Der vertikal aufgestellte, heizbare Probestab war 40 cm lang und hatte einen Durchmesser von 8 mm. SCHÄFER kommt zum Schluss, dass  $10 \text{ W cm}^2$  projizierter Fläche genügen, um diesen Stab bei extremen Bedingungen trocken,  $3 \text{ W cm}^2$  projizierter Fläche, um ihn eisfrei zu halten.

Berechnet man den Wärmebedarf an Hand unserer Resultate für die von SCHÄFER beobachteten meteorologischen Bedingungen, so findet man nur etwa die Hälfte der von SCHÄFER angegebenen  $3 \text{ W/cm}^2$ .

Die Erklärung dieser Diskrepanz fällt schwer. Es ist möglich, dass SCHÄFER sozusagen kein Eis auf dem Probestab zugelassen hat, was den Wärmebedarf etwas vergrössern würde.

Wie bereits erwähnt, wird auch die Tröpfchengrösse eine Rolle spielen. Bei unseren Untersuchungen betrug sie 0,1 bis 0,01 mm, während sie bei SCHÄFER rund eine Zehnerpotenz tiefer war und eigentlich noch viel kleinere Energieverluste hätte bewirken sollen. Es wäre nun denkbar, dass sich die von SCHÄFER festgestellte Zunahme des Energiebedarfes mit der Tröpfchengrösse nicht monoton fortsetzt, sondern von einer gewissen Grösse an durch eine Abnahme abgelöst wird, und dass die von ihm untersuchten Tröpfchen gerade im Grössenbereich des Maximums lagen. Der Entscheid muss vorderhand offengelassen werden.

## 8. Schlussfolgerung

Die Untersuchungen haben ergeben, dass auch bei extremen meteorologischen Bedingungen

$$T = -20^\circ\text{C}; v = 20 \text{ m/s}; 10 \text{ mm Niederschlag pro Stunde} \\ \text{und einer Reifrate von } 4 \text{ g cm}^{-2} \text{ h}^{-1}$$



mit einer Heizleistung von  $1,5 \text{ W/cm}^2$  projizierter Fläche ein zylindrischer Draht von 1 cm Durchmesser eisfrei gehalten werden kann. Dieses Resultat lässt sich nicht ohne weiteres auf Drähte anderer Dicken oder andere meteorologische Bedingungen übertragen, da sich die Reynoldssche Zahl ändert und die Verdunstung nicht linear in den Ausdruck für die Heizleistung eingeht.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MELCHER, D., *Experimentelle Untersuchung von Vereisungserscheinungen*, ZAMP 2, 421 (1951).
- [2] National Research Council of Canada, Conference on Galloping Conductors (Ottawa 1949).
- [3] LANGMUIR, I., Report No. RL 223. General Electric Research Laboratories (1944).
- [4] NUSSELT, W., *Handbuch der Physik*, Bd. 11 (Springer, Berlin 1928), S. 132.
- [5] NUSSELT, W., *Z. angew. Math. Mech.* 10, 105 (1930).
- [6] SCHÄFER, V. J., *Heat requirements for Instruments and Airfoils During Ice Storms on Mt. Washington*, Trans. A. S. M. E., Nov. 1947, 843 ff.
- 7 EDER, *Antennenvereisung*, Deutsche Luftfahrtforschung Göttingen (Manuskript).

### Summary

Ice was produced in a wind tunnel at a laboratory temperature of  $-10^\circ \text{C}$  by spraying water through a nozzle. An electrically heated cylindrical rod, 30 cm long, 1 cm in diameter, is exposed to various meteorological conditions. The amount of energy needed to keep the rod free of ice is investigated. At a temperature of  $-15^\circ \text{C}$  and a wind velocity of 20 m/s,  $1,1 \text{ W/cm}^2$  of projected area is sufficient to keep the rod clear. The result agrees with the theory of NUSSELT.

(Eingegangen: 3. August 1952.)

# Beiträge zur Kenntnis des Biorthogonalisierungs-Algorithmus von Lanczos

Von HEINZ RUTISHAUSER, Zürich<sup>1)</sup>

## § 1. Problemstellung

Unter einer Kodiagonalmatrix verstehen wir eine Matrix  $A$  mit der Eigenschaft  $a_{ij} = 0$  für  $|i - j| > 1$ . Eine solche Matrix hat also nur in der Hauptdiagonalen und in den beiden anliegenden «Kodiagonalen» nichtverschwindende Elemente:

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & & & & & & \\ & v_1 & & & & & \\ & & u_2 & & & & \\ & & & v_2 & & & \\ & & & & u_3 & & \\ & & & & & v_3 & \\ & & & & & & u_4 \\ & & & & & & & v_4 \\ & & & & & & & & u_5 \\ & & & & & & & & & v_5 \\ & & & & & & & & & & u_N \\ & & & & & & & & & & & v_N \end{array} \quad (1)$$

Es wird sich zeigen, dass man jede Matrix auf Kodiagonalform transformieren kann, sogar auf unendlich viele Arten. Die praktische Durchführung einer solchen Kodiagonaltransformation, welche insbesondere für die Eigenwertbestimmung in letzter Zeit eine grosse Bedeutung erlangt hat, erfolgt zweckmässig nach einem von LANCZOS [1]<sup>2)</sup> angegebenen Verfahren oder mit dem  $n$ -Schritt-Verfahren von E. STIEFFEL und M. R. HESTENES [2], [3]. Im Prinzip beruhen beide Verfahren auf der Orthogonalisation einer Vektorfolge  $x, Ax, A^2x, \dots$ , bzw. bei nichtsymmetrischen Matrizen auf der Biorthogonalisation von zwei Vektorfolgen  $x, Ax, A^2x, \dots$  und  $y, A^*y, A^{*2}y, \dots$ , wobei  $A^*$  die Transponierte von  $A$  bedeutet.

Die Kodiagonalform einer Matrix ist nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt bei gegebener Matrix  $A$  noch weitgehend von den bis zu einem gewissen Grade willkürlich wählbaren Vektoren  $x$  und  $y$  ab.

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik an der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 56.

Diese Arbeit befasst sich nun mit der Abhängigkeit der Kodiagonalform von den Anfangsvektoren  $x, y$ , worüber zur Zeit wenig bekannt ist (vgl. jedoch [3] für symmetrische Matrizen). Insbesondere wird auch untersucht, wie weit es möglich ist, die Anfangsvektoren  $x$  und  $y$  so zu wählen, dass die Kodiagonalelemente, das sind die  $u_i$  und  $w_i$  in (1), klein werden, denn diese Eigenschaft ist für viele Anwendungen sehr erwünscht. Für symmetrische Matrizen ist dies bereits [4] untersucht. Die vorliegende Arbeit befasst sich aber auch mit nichtsymmetrischen Matrizen und ergibt folgende Resultate:

- Für Matrizen mit ausschliesslich reellen Eigenwerten (auch bei nichtlinearen Elementarteilern) kann man die Anfangsvektoren  $x, y$  tatsächlich immer so wählen, dass sämtliche Kodiagonalelemente beliebig klein werden.
- Dies gilt nicht mehr für eine Matrix mit komplexen Eigenwerten. Man kann aber in diesem Fall erreichen, dass für jedes Paar komplex konjugierter Eigenwerte  $\lambda \pm i\mu$  zwei Kodiagonalelemente  $u_{k+1}, w_k$  auftreten, so dass die diagonale Untermatrix

$$\begin{pmatrix} u_k & w_k \\ u_{k+1} & w_{k+1} \end{pmatrix}$$

von (1) ungefähr die Eigenwerte  $\lambda \pm i\mu$  hat und ferner alle Kodiagonalelemente, die nicht in einer dieser Untermatrizen enthalten sind, beliebig klein werden.

Die theoretischen Untersuchungen des Verfassers erstrecken sich im Fall komplexer Eigenwerte nur auf lineare Elementarteiler, doch lassen numerische Versuche vermuten, dass dieselbe Aussage auch für Matrizen mit nichtlinearen komplexen Elementarteilern richtig ist, sofern man die Eigenwerte mit Vielfachheit zählt.

Die in dieser Arbeit nur für endliche Matrizen durchgeführten Untersuchungen lassen sich sinngemäss auch auf unendliche Matrizen sowie Differential- und Integraloperatoren übertragen (vgl. die Originalarbeit von C. LANCZOS [1]). Allerdings erfahren dann einige der hier erhaltenen Aussagen eine Abschwächung; beispielsweise wird man im allgemeinen nicht alle unendlich vielen Kodiagonalelemente  $\beta_k$  gleichmässig klein machen können.

## § 2. Der Biorthogonalisierungs-Algorithmus<sup>1)</sup>

Sei  $A$  die gegebene  $N$ -reihige Matrix und seien  $x$  und  $y$  zwei Vektoren, die zunächst der einzigen Bedingung  $(x, y) \neq 0$  unterliegen sollen. Dann bestimmt man, von  $x_1 = x$  und  $y_1 = y$  ausgehend, mit nachstehender Vorschrift die Vektoren

<sup>1)</sup> Fortan kurz mit «der Algorithmus» bezeichnet.

toren  $x_1, x_2, \dots, x_N$  und  $y_1, y_2, \dots, y_N$ :

$$x_2 = A x_1 - \alpha_1 x_1, \quad y_2 = A^* y_1 - \alpha_1 y_1 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 = \frac{(A x_1, y_1)}{(x_1, y_1)}. \quad (2)$$

Dann für  $k = 2, 3, \dots, N$ :

$$x_{k+1} = A x_k - \alpha_k x_k - \beta_{k-1} x_{k-1}, \quad y_{k+1} = A^* y_k - \alpha_k y_k - \beta_{k-1} y_{k-1} \quad (3)$$

mit

$$\alpha_k = \frac{(A x_k, y_k)}{(x_k, y_k)}, \quad \beta_{k-1} = \frac{(A x_k, y_{k-1})}{(x_{k-1}, y_{k-1})}. \quad (4)$$

Dieser Algorithmus liefert nach der allgemeinen Theorie<sup>1)</sup> zwei biorthogonale Vektorsysteme  $x_k, y_k$ , das heisst zwei Vektorsysteme mit der Eigenschaft

$$(x_j, y_k) = 0 \quad (\text{für } j \neq k), \quad (5)$$

die, falls für alle  $k$   $(x_k, y_k) \neq 0$  ist, je eine Basis des Raumes bilden. Der Algorithmus kann auf Grund der Formeln (4) genau so lange durchgeführt werden, als noch  $(x_k, y_k) \neq 0$  ist, und kommt spätestens für  $k = N$  zu einem Abschluss, da ja mehr als  $N$  Vektorpaare nicht biorthogonal sein können; die Formeln (3) müssen dann  $x_{N+1} = y_{N+1} = 0$  liefern. Das vorzeitige Versagen der Formeln (3), (4) wird in § 4 behandelt.

Zwischen den Vektoren  $x_k, y_k$  und den Skalaren  $\alpha_k, \beta_k$  bestehen noch eine Reihe weiterer Beziehungen, die man durch elementare Umformungen aus (2), (3) und (4) erhält und von denen wir hier ohne Beweis einige angeben:

$$(y_k, A x_{k-1}) = (x_k, y_k) = (A x_k, y_{k-1}), \quad (6)$$

$$\beta_{k-1} = \frac{(x_k, y_k)}{(x_{k-1}, y_{k-1})}, \quad (7)$$

$$(A x_j, y_k) - (x_j, A^* y_k) = 0 \quad \text{für} \quad |j - k| > 1. \quad (8)$$

### § 3. Vereinfachungen

Wenn die Matrix  $A$  symmetrisch ist, ist es zweckmässig, die beiden Anfangsvektoren einander gleichzusetzen, es ist dann immer  $x_k = y_k$ , so dass man überhaupt nur mit einem Vektorsystem arbeiten muss, welches dann ein Orthogonalsystem ist.

Aber auch wenn  $A$  nicht symmetrisch ist, gelingt es oft, gewisse Eigenschaften auszunützen, so dass man ebenfalls mit einem Vektorsystem aus-

<sup>1)</sup> Vergleiche die Originalarbeit von C. LANCZOS [1].



kommt. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine Matrix  $R$  mit der Eigenschaft  $A^* = R A R^{-1}$ <sup>1)</sup> gefunden werden kann; man unterwirft dann die Anfangsvektoren der Bedingung  $y = R x$ . Es wird dann

$$\begin{aligned} y_2 &= A^* y_1 - \alpha_1 y_1 = R A R^{-1} y_1 - \alpha_1 y_1 = R A x_1 - \alpha_1 R x_1 \\ &= R (A x_1 - \alpha_1 x_1) = R x_2, \end{aligned}$$

und ebenso zeigt man

$$y_k = R x_k \quad (\text{für } k = 1, 2, \dots, N). \quad (9)$$

Man kann also auch in diesem Fall mit den Vektoren  $x_k$  allein arbeiten.

#### § 4. Vorzeitiges Abbrechen des Algorithmus

Wie bereits erwähnt, muss der Algorithmus nach spätestens  $N$  Schritten zum Abschluss kommen. Unter gewissen Umständen kann er aber schon früher abbrechen, indem für ein gewisses  $k < N$  einer der drei nachstehenden Fälle eintritt:

- a) Man erhält mit Formel (3)  $x_{k+1} = y_{k+1} = 0$ ,
- b) Es verschwindet genau einer der Vektoren  $x_{k+1}, y_{k+1}$ .
- c) Es ist  $x_{k+1} \neq 0, y_{k+1} \neq 0$ , aber  $(x_{k+1}, y_{k+1}) = 0$ .

Im Fall a) sind die von den Vektoren  $x_1, \dots, x_k$  bzw.  $y_1, \dots, y_k$  aufgespannten Unterräume invariant in bezug auf die Matrizen  $A$  bzw.  $A^*$ . Diese Erscheinung kann auf unglückliche Wahl der Anfangsvektoren zurückzuführen sein, es gibt aber auch Matrizen  $A$ , für die bei jeder Wahl von  $x, y$  schon für  $k < N$  einer der drei Fälle a), b), c) eintreten muss. Wenn nämlich der Grad  $m$  des Minimalpolynoms der Matrix  $A$  nicht den Wert  $N$  erreicht, so sind die Vektoren  $x, A x, \dots, A^m x$  linear abhängig und ebenso die  $y, A^* y, A^{*2} y, \dots, A^{*m} y$ , so dass der Algorithmus notwendigerweise  $x_{m+1} = y_{m+1} = 0$  ergeben muss, wenn nicht schon vorher eine Störung eintritt.

Fall b) ist auf unglückliche Wahl der Anfangsvektoren  $x, y$  zurückzuführen, würde man nämlich  $x, y$  der Bedingung  $y = R x$  unterwerfen, wobei  $R$  die in § 3 erwähnte nichtsinguläre Matrix bedeutet, so könnte Fall b) wegen (9) niemals eintreten. Aber auch Fall c) kann durch geeignete Wahl der Anfangsvektoren  $x, y$  vermieden werden, es gilt nämlich:

**Satz 1:** Hat das Minimalpolynom der Matrix  $A$  den Grad  $m$ , so ist es immer möglich, die Anfangsvektoren  $x, y$  so zu wählen, dass der Algorithmus bis zu seinem natürlichen Ende ( $k = m$ ) durchgeführt werden kann und auch noch  $(x_m, y_m) \neq 0$  ist.

<sup>1)</sup> Es existiert immer eine solche nichtsinguläre (sogar symmetrische) Matrix  $R$  (vgl. etwa [5], S. 44). Sind alle Eigenwerte reell und die Elementarteiler linear, so ist  $R$  sogar positiv definit.

*Beweis:* Auf Grund elementarer Sätze über Determinanten und der Formeln (2), (3), (5) ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc}
 (x, y) & (x, A^* y) & \dots & (x, A^{*k-1} y) & & & \\
 (A x, y) & (A x, A^* y) & \dots & (A x, A^{*k-1} y) & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 (A^{k-1} x, y) & (A^{k-1} x, A^* y) & \dots & (A^{k-1} x, A^{*k-1} y) & & & \\
 (x_1, y_1) & \dots & (x_1, y_k) & & & & \\
 (x_2, y_1) & \dots & (x_2, y_k) & & & & \\
 = & & & \prod_{j=1}^k (x_j, y_j) & & & \\
 \dots & & & & & & \\
 (x_k, y_1) & \dots & (x_k, y_k) & & & &
 \end{array}$$

Somit gilt

$$(x_k, y_k) = \frac{G_k}{G_{k-1}}, \quad (10)$$

wobei  $G_k$  die links oben stehende Gramsche Determinante der beiden Vektorsysteme  $x, A x, \dots, A^{k-1} x$  und  $y, A^* y, \dots, A^{*k-1} y$  ist.

Gemäss (10) geht also unsere Behauptung dahin, dass bei geeigneter Wahl von  $x$  und  $y$  keine der Grössen  $G_1, G_2, \dots, G_m$  verschwindet. Für den Beweis betrachten wir eine einparametrische Schar von Anfangsvektoren

$$x(t) = e^{A t/2} x_0, \quad y(t) = e^{A^* t/2} y_0, \quad (11)$$

die auch für die weitere Theorie (insbesondere § 8 und § 9) von ausschlaggebender Bedeutung ist. Es wird dann

$$(A^\mu x, A^{*\nu} y) = (A^{\mu+\nu} e^{A t} x_0, y_0);$$

das letztere ist aber gleich der  $(\mu + \nu)$ -ten Ableitung der Funktion  $f(t) = (e^{A t} x_0, y_0)$ . Somit wird  $G_k(t)$  eine Wronskische Determinante:

$$G_k(t) = \begin{vmatrix}
 f & f' & f'' & \dots & f^{(k-1)} \\
 f' & f'' & & \dots & f^{(k)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 f^{(k-1)} & f^{(k)} & & \dots & f^{(2k-2)}
 \end{vmatrix}.$$

Es genügt offenbar, wenn man zeigen kann, dass kein  $G_k(t)$  für  $k = 1, \dots, m$  identisch verschwinden kann.

Würde erstmals  $G_{s+1}$  identisch verschwinden, so müsste  $f$  einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung  $s$  mit konstanten Koeffizienten

genügen<sup>1)</sup>. Da bei geeigneter Wahl von  $x_0, y_0$  sicher  $G_1 \neq f$  nicht identisch ist, braucht man nur noch zu zeigen, dass  $f$  keiner solchen Differentialgleichung mit  $s < m$  genügen kann.

In der Tat, wenn das Minimalpolynom der Matrix  $A$  die Gestalt  $\prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)$  hat und wenn die beiden Vektoren  $x_0, y_0$  allgemeine Lage haben, das heisst  $x_0$  keinem Eigenvektor oder Hauptvektor von  $A^*$  bzw.  $A$  orthogonal sind, so enthält  $f$  unter anderem die Summanden

$$\left. \begin{array}{l} t^{\mu_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ t^{\mu_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \dots\dots\dots \\ t^{\mu_p-1} e^{\lambda_p t} \end{array} \right\} \text{ mit } \sum_{i=1}^p \mu_i = m$$

und kann daher keiner Differentialgleichung der Ordnung  $s < m$  genügen was zu beweisen war.

Wenn  $m$  der Grad des Minimalpolynoms ist, so bewirkt also der Algorithmus die Abspaltung eines  $m$ -dimensionalen invarianten Unterraums  $R_1$ . In bezug auf diesen Unterraum ist  $m(x)$  gleichzeitig Minimalpolynom und charakteristisches Polynom von  $A$ .

Man kann nun den Algorithmus im  $N-m$ -dimensionalen Komplementärraum von  $R_1$  fortsetzen [sofern der Algorithmus nicht etwa nach Fall b) oder c) abbricht], indem man neue Anfangsvektoren  $x_{m+1} \perp y_1, y_2, \dots, y_m$  und  $y_{m+1} \perp x_1, x_2, \dots, x_m$  wählt und mit diesen an Stelle von  $x_1, y_1$  den Algorithmus neu beginnt. Auf diese Weise spaltet man einen weiteren invarianten Unterraum  $R_2$  ab, wobei das charakteristische und das Minimalpolynom von  $A$  in bezug auf  $R_2$  ebenfalls übereinstimmen usw.

Auf Grund dieser Betrachtungen können wir uns fortan auf solche  $N$ -reihige Matrizen beschränken, für die das Minimalpolynom den Grad  $N$  hat und also mit  $\chi(x)$  übereinstimmt.

## § 5. Die Kodiagonalform

Die durch den Algorithmus – sofern dieser überhaupt bis zu seinem natürlichen Ende durchgeführt werden kann – gelieferten Werte  $\alpha_k, \beta_k$  bestimmen nun die durch die Matrix  $A$  vermittelte lineare Abbildung  $z \rightarrow Az$  vollständig. Mit dem Ansatz

$$z = \sum \xi_k x_k, \quad Az = \sum \eta_k x_k \quad (= \sum \xi_k Ax_k)$$

erhält man nämlich durch innere Multiplikation mit  $y_k$  und Berücksichtigung

<sup>1)</sup> Für den Beweis siehe etwa [9], S. 327 ff.

der Beziehungen (2), (4), (5), (6) und (8) sowie der Tatsache, dass  $x_{N+1} = y_{N+1} = 0$  ist, sofort:

$$\eta_1 = \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2, \quad \eta_k = \xi_{k-1} + \alpha_k \xi_k + \beta_k \xi_{k+1}, \quad \eta_N = \xi_{N-1} + \alpha_N \xi_N.$$

$$(k = 2, \dots, N - 1)$$

Die Matrix  $A$  hat also im Koordinatensystem der  $x_i$  die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \beta_1 & & & & & \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & & \\ & 1 & \alpha_3 & \beta_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha_N & \beta_N & \\ & & & & 1 & \alpha_N & \end{array} \quad (12)$$

Falls man den Algorithmus in mehreren Stufen ausführen muss, weil das Minimalpolynom den Grad  $m = N$  hat, so bewirkt dies den Zerfall der Matrix (12) in Hauptuntermatrizen; zum Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \beta_1 & & & & & \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & & \\ & 1 & \alpha_3 & 0 & & & \\ & & 0 & \alpha_4 & \beta_4 & & \\ & & & 1 & \alpha_5 & & \end{array}.$$

Nachdem die Matrix  $A$  einmal auf Koldiagonalform transformiert ist, kann man verhältnismässig leicht die Eigenwerte berechnen. Dank der einfachen Gestalt der Matrix (12) reduziert sich nämlich die Berechnung des charakteristischen Polynoms  $\chi(\lambda)$  nach den bekannten Determinantenregeln auf folgende Rekursionsformeln:

Berechne, von  $p_0 = 0, p_1 = 1$  ausgehend, für  $k = 1, 2, \dots, N$ :

$$p_{k+1}(\lambda) = (\lambda - \alpha_k) p_k(\lambda) - \beta_{k-1} p_{k-1}(\lambda). \quad (13)$$

Dann ist  $\chi(\lambda) = p_{N+1}(\lambda)$ .

Man erhält so auch die Eigenvektoren; es ist nämlich

$$v(\lambda) = \sum_{k=1}^N \frac{p_k(\lambda)}{(x_k, y_k)} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$



ein Eigenvektor, wenn  $\lambda$  ein Eigenwert ist, denn es ist  $A v = \lambda v$  auf Grund von (13) unter Berücksichtigung von (2), (3), (6)  $= -\chi(\lambda) x_N / (x_N, y_N)$ .

Es bestehen aber noch andere Möglichkeiten zur Eigenwertbestimmung, die damit zusammenhängen, dass das Gleichungssystem  $(A - \lambda E) \xi = 0$  in der Kodiagonalform dreigliedrig ist und damit in bekannter Weise in eine Kettenbruchgleichung für  $\lambda$  umgewandelt werden kann; die Bestimmung der Eigenwerte erfolgt dann auf ähnliche Weise wie bei der Mathieuschen Differentialgleichung (vgl. hierzu [6]).

## § 6. Zur numerischen Durchführung des Algorithmus

Im allgemeinen wird man beobachten, dass die Grössenordnung der iterierten Vektoren  $x_k, y_k$  mit fortschreitendem  $k$  rasch unbequem wird; es ist deshalb praktisch, den Algorithmus für numerische Zwecke wie folgt abzuändern:

$$s_2 x_2 = A x_1 - \alpha_1 x_1, \quad s_2 y_2 = A^* y_1 - \alpha_1 y_1 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 = \frac{(A x_1, y_1)}{(x_1, y_1)}, \quad (2')$$

$$s_{k+1} x_{k+1} = A x_k - \alpha_k x_k - \gamma_{k-1} x_{k-1}, \quad s_{k+1} y_{k+1} = A^* y_k - \alpha_k y_k - \gamma_{k-1} y_{k-1} \quad (3')$$

mit

$$\alpha_k = \frac{(A x_k, y_k)}{(x_k, y_k)}, \quad \gamma_{k-1} = \frac{(A x_k, y_{k-1})}{(x_{k-1}, y_{k-1})}. \quad (4')$$

Dabei werden die frei verfügbaren Skalare  $s_2, s_3, \dots, s_N$  so gewählt, dass die Vektoren  $x_k, y_k$  eine numerisch vorteilhafte Grössenordnung annehmen. Man kann zeigen, dass diese Skalare die Rechnung nicht wesentlich beeinflussen:

**Satz 2:** Die Grössen  $\alpha_k$  und  $\beta_{k-1} = \gamma_{k-1} s_k$  hängen nicht von der Wahl der Zahlen  $s_2, s_3, \dots, s_N$  ab.

Auf Grund dieser Invarianz stimmen die  $\beta_k$  mit den früher definierten Werten  $\beta_k$  überein, die dem Spezialfall  $s_j = 1$  entsprechen.

**Beweis:** Die  $s_k$  beeinflussen nicht die Richtung, sondern nur die Länge der Vektoren  $x_k, y_k$ . Gerade  $\alpha_k$  ist aber gemäss (4') von der Länge der Vektoren  $x_k, y_k$  unabhängig. Für den Beweis der Invarianz von  $\gamma_{k-1} s_k$  benötigen wir die Relationen, die sich auf Grund der abgeänderten Formeln (2'), (3'), (4') an Stelle der Relationen (6) und (7) ergeben<sup>1)</sup>:

$$(y_k, A x_{k-1}) = s_k (x_k, y_k) = (A x_k, y_{k-1}), \quad (6')$$

$$\gamma_{k-1} = s_k \frac{(x_k, y_k)}{(x_{k-1}, y_{k-1})}. \quad (7')$$

<sup>1)</sup> Die Relationen (5) und (8) bleiben unverändert.

Aus (6') und (7') erhält man sofort

$$\beta_{k-1} = s_k \gamma_{k-1} = \frac{(y_k, A x_{k-1})^2}{(x_k, y_k) (x_{k-1}, y_{k-1})}, \quad (14)$$

woraus sich die behauptete Invarianz sofort ergibt, was zu beweisen war.

Es sei noch erwähnt, dass in diesem Fall die Matrix  $A$  im Koordinatensystem der  $x_k$  die folgende Gestalt erhält:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \gamma_1 & \\ s_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ & s_3 & \alpha_3 \\ & & \ddots \\ & & & s_n & \alpha_n \end{array} \quad (12')$$

Ferner hat man als Rekursionsformeln für die Berechnung von  $\chi(\lambda)$  an Stelle von (13):

$$s_{k+1} p_{k+1} = (\lambda - \alpha_k) p_k - \gamma_{k-1} p_{k-1}. \quad (13')$$

Die numerische Rechnung wird nun durch *Aufrundungsfehler* gestört; diese haben zur Folge, dass die Biorthogonalitätsrelationen (5) und (8) nicht genau erfüllt sind. Da die Biorthogonalität für die Eigenwertbestimmung wesentlich ist, ist es empfehlenswert, wenigstens die Relation (5) durch geeignete Korrekturen zwangsweise zu erfüllen. Man bildet zu diesem Zweck die inneren Produkte des auf Grund von (3') ermittelten Vektors  $x_{k+1}$  mit allen früheren  $y_j$  und korrigiert damit  $x_{k+1}$ <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{k+1,j} &= \frac{(x_{k+1}, y_j)}{(x_j, y_j)} \\ x_{k+1(korr)} &= x_{k+1} - \sum_{j=1}^k \gamma_{k+1,j} x_j \end{aligned} \right\} \text{ und entsprechend für die } y. \quad (15)$$

Die Aufrundungsfehler haben aber auch einen Vorteil: Sie verhindern das vorzeitige exakte Nullwerden der Vektoren  $x_k, y_k$  selbst in den Fällen, wo dies theoretisch zu erwarten wäre, so dass man den Algorithmus in praktischen Fällen in der Regel bis zum Ende durchführen kann<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Beim  $n$ -Schritt-Verfahren weiss man wesentlich mehr über die Wirkung der Aufrundungsfehler (vgl. [3], S. 43 ff.). Es wird dort auch eine grundsätzlich andere Methode zur Korrektur der Orthogonalität angegeben.

<sup>2)</sup> Ein numerisches Beispiel mit einer symmetrischen Matrix  $A$  mit mehrfachen Eigenwerten ( $N = 8, m = 7$ ), wo also der Algorithmus nach sieben Schritten beendet sein müsste, findet sich bei [7].

## § 7. Die Bedeutung der Kodiagonalelemente $\beta_k$

Wir wollen den folgenden theoretischen Untersuchungen wieder den Algorithmus in seiner ursprünglichen Form (2), (3), (4) zugrunde legen, die Grössen  $\beta_k$  stimmen dann mit den Invarianten  $\beta_k = \gamma_k s_{k-1}$  von § 6 überein.

Die naheliegende Vermutung, dass die Grössen  $\beta_k$  für die Abweichung  $\epsilon$  vom System der Haupt- und Eigenvektoren der Matrizen  $A(\epsilon)$  w. massgebend seien, wird durch das folgende Beispiel widerlegt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = \epsilon \\ x_3 = \epsilon^2 \\ \vdots \end{matrix}$$

Bildet man mit diesen Anfangsvektoren bei kleinem  $\epsilon$  die Kodiagonalform  $A$ , so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 + \epsilon & \epsilon - 2\epsilon^2 & & \\ & 2 - 3\epsilon & 4\epsilon & 28\epsilon^2 \\ & & 3 - 4\epsilon & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Die  $\beta$  sind also alle sehr klein; trotzdem sind auch im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  Vektoren  $x_k$ ,  $y_k$  bei weitem keine Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 \mid 0 \mid 0) \quad x_2 = \epsilon (-1 \mid 1 \mid 0) \quad x_3 = \epsilon^2 (2\epsilon^2 - 1 \mid -2 \mid 1) \\ y_1 &= (1 \mid 1 \mid 1) \quad y_2 = (0 \mid 1 \mid 2) \quad y_3 = (0 \mid 0 \mid 2) \end{aligned}$$

Dagegen folgt bei Matrizen mit linearen Elementarteilern, wenn man Anfangsvektoren der Bedingung  $y = R x$  unterwirft, aus der Kleinheit aller  $\beta_k$  auch die Übereinstimmung der  $x_k$ ,  $y_k$  mit den Eigenvektoren von  $A$  bzw.  $R$ . Ferner kann man aus der Kodiagonalform (12) unmittelbar ablesen, dass  $x_k$  gegen die Eigenwerte konvergieren, wenn die  $\beta_k$  simultan gegen Null streben:

**Satz 3:** Sind in der Kodiagonalform einer Matrix  $A$  sämtliche  $\beta$  Werte positiv, so gilt der folgende Einschliessungssatz<sup>1)</sup>. Sind  $\alpha_1, \alpha_2$  zwei beliebige positive Zahlen mit der Eigenschaft  $\alpha_1 > \beta_{k-1} + \beta_k$  (wobei hier und aus später die Grössen  $\beta_0$  und  $\beta_N$  überall, wo sie auftreten, durch 0 zu ersetzen sind), so liegt mindestens ein Eigenwert von  $A$  im Intervall

$$\alpha_1 - \alpha_2 < \lambda < \alpha_1 + \alpha_2$$

<sup>1)</sup> Dies ist allerdings nur eine andere Formulierung bekannter Einschliessungssätze, wesshalb tritt die Grösse  $\beta_{k-1} + \beta_k$  in anderer Gestalt bereits bei WEINSTEIN [10] und WIELANDT [11] auf.

$B = 0$ . Man kann in diesem Fall die Kovarianz-Matrix (12) durch Transformation mit einer Diagonalmatrix reell symmetrisch machen:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & \sqrt{\beta_1} \\ \sqrt{\beta_1} & x_2 & \sqrt{\beta_2} \\ & \sqrt{\beta_2} & x_3 & \sqrt{\beta_3} \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (12'')$$

Für reell symmetrische Matrizen gilt aber auf Grund des Entwicklungssatzes: Wenn für einen Vektor  $z$  die Form  $T(\lambda, \mu) = (Sz - \lambda z, Sz - \mu z)^2$  negativ ist, dann liegt mindestens ein Eigenwert von  $S$  zwischen  $\lambda$  und  $\mu$ . Nun ist mit  $(e_k^2)$  offenbar

$$S e_k = \sqrt{\beta_{k-1}} e_{k-1} + x_k e_k + \sqrt{\beta_k} e_{k+1},$$

also mit  $\lambda = x_k - u$ ,  $\mu = x_k + v$ :

$$\begin{aligned} T(\lambda, \mu) &= (\sqrt{\beta_{k-1}} e_{k-1} + u e_k + \sqrt{\beta_k} e_{k+1}, \sqrt{\beta_{k-1}} e_{k-1} + v e_k + \sqrt{\beta_k} e_{k+1}) \\ &= \beta_k + u v + \beta_{k-1}; \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Auf Grund dieser Tatsachen ist es wohl klar, dass es für viele Anwendungen gewünscht ist, dafür zu sorgen, dass die  $\beta_k$  klein werden. Wir geben deshalb in diesem Abschnitt ein Rezept für die Abhängigkeit der  $\beta_k$  von den Anfangsvektoren  $x, y$  an.

Allerdings wird mit dem Kleinstwerden der  $\beta_k$  ein Nachteil erkauft. Aus der Formel (7) ergibt sich nämlich, dass dann  $x_{k+1}$  im allgemeinen viel kleiner als  $x_k$  sein muss. Das ist aber nach Formel (3) nur möglich, wenn  $x_{k+1}$  als Differenz fast gleicher Grössen entsteht, was hinsichtlich der Aufrundungsfehler immer sehr ungünstig ist. Insbesondere können die Relationen (5) und (8) dann so ungünstig werden, dass man unbedingt die Korrekturformeln (15) anwenden sollte<sup>3)</sup>.

## § 8. Über die Grössenordnung der Kodiagonalelemente $\beta_i$

Um die Abhängigkeit der Parameter  $x, \beta$  von den Anfangsvektoren zu untersuchen, betrachten wir die durch die Beziehung (11) definierte einparametrische

<sup>1)</sup>  $T(2, \mu)$  hängt aufs engste mit dem Temple'schen Quotienten zusammen, es ist nämlich das hier verwendete  $T(\lambda_s, t)$  bis auf einen Faktor  $(Sz)^2$  identisch mit dem Ausdruck  $[T(t) - \lambda_s](\mu_2 - t)$  von [8], S. 174.

<sup>2)</sup> Die  $e_k$  sind die sogenannten Einheitsvektoren;  $e_1 = (1 | 0 | \dots | 0)$ ;  $e_2 = (0 | 1 | 0 | \dots | 0)$  usw.

<sup>3)</sup> Praktische Versuche des Verfassers zeigen, dass es in den Fällen, wo theoretisch kleine  $\beta$ -Werte (zirka 0,1% der Hauptdiagonalelemente) zu erwarten wären, schon für  $N = 6$  fast unmöglich ist, den Algorithmus ohne diese Korrekturen erfolgreich zu Ende zu führen.

Für das Auflösen linearer Gleichungssysteme mit dem  $n$ -Schritt-Verfahren ist dieser Nachteil allerdings unerheblich.



trige Schar von Anfangsvektoren  $x(t)$ ,  $y(t)$ , wobei wir zusätzlich annehmen, dass die Vektoren  $x_0$ ,  $y_0$  und damit auch  $x(t)$  und  $y(t)$  in allgemeiner Lage seien. Gemäss (7) und (10) benötigen wir dann für die Abschätzung der  $\beta$  nur die Gramschen Determinanten  $G_k(t)$ .

### a) Reelle und verschiedene Eigenwerte

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ ; die zugehörigen Eigenvektoren von  $A$  bzw.  $A^*$  seien  $v_1, v_2, \dots, v_N$  bzw.  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_N^*$ . Es ist dann

$$(x, y) = f(t) \quad (e^{At} x_0, y_0) = \sum_{k=1}^N z_k e^{\lambda_k t},$$

wobei

$$z_k = \frac{(v_k^*, x_0) (v_k, y_0)}{(v_k, v_k^*)}$$

bei allgemeiner Lage der Vektoren  $x_0, y_0$  sicher positiv ist; es ist nämlich bei geeigneter Normierung:  $v_k^* = R v_k$ . Auf Grund bekannter Sätze der Determinantentheorie wird dann

$$G_k(t) = \sum e^{(\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \dots + \lambda_{j_k})t} V^2(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_k}) z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_k}, \quad (1)$$

wobei über alle Kombinationen von  $k$  unter den  $N$  Indexwerten  $1, 2, \dots, N$  zu summieren ist, und  $V(\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k})$  die Vandermondesche Determinante der Werte  $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}$  bedeutet.

Damit sind einmal alle  $G_k(t)$  für alle  $t$  positiv, und man kann den Algorithmus für jedes  $t$  bis zum Ende durchführen.

Das dominante Glied in (16), welches das Verhalten für  $t \rightarrow \infty$  bestimmt, erhält man für  $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_k = k$ ; es wird somit asymptotisch

$$\left. \begin{aligned} G_k(t) &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)t} V^2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) z_1 z_2 \dots z_k, \\ (x_k, y_k) &= z_k e^{\lambda_k t} \frac{V^2(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}{V^2(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})} = z_k e^{\lambda_k t} W^2(\lambda_k | \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\beta_{k-1} = \frac{z_k}{z_{k-1}} e^{(\lambda_k - \lambda_{k-1})t} \frac{W^2(\lambda_k | \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})}{W^2(\lambda_{k-1} | \lambda_1, \dots, \lambda_{k-2})} \quad (18)$$

mit der Abkürzung  $W(\lambda | a_1, a_2, \dots, a_k)$  für  $(\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \dots (\lambda - a_k)$ . Für  $t \rightarrow \infty$  konvergieren also in der Tat alle  $\beta_k$  gegen Null.

**Satz 1:** Dann und nur dann, wenn alle Eigenwerte reell und alle Elementarteiler linear sind, kann man die Anfangsvektoren  $x, y$  so wählen, dass sämtliche  $\beta$ -Werte positiv werden, und zwar genügt es,  $x$  in allgemeiner Lage und  $y = R x$  zu wählen.

1) Falls das Minimalpolynom nicht den Grad  $N$  hat, muss man natürlich in jedem invarianten Unterraum geeignete Anfangsvektoren wählen.

*Beweis:* Die Bedingung ist hinreichend, wie aus den obigen Ausführungen hervorgeht. Sie ist aber auch notwendig, denn wenn alle  $\beta_k$  positiv sind, kann man ja die Kodiagonalmatrix durch Transformation mit einer Diagonalmatrix auf die Gestalt (12'') bringen; was zu beweisen war.

b) *Es treten mehrfache, aber nur reelle Eigenwerte auf*

Auf Grund der Voraussetzung, dass das Minimalpolynom den Grad  $N$  haben soll, bedeutet dies auch nichtlineare Elementarteiler.

Wir nehmen die Eigenwerte wieder der Grösse nach geordnet an:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$$

und bezeichnen die Vielfachheit von  $\lambda_k$  mit  $\mu_k$  (es ist also  $\sum \mu_k = N$ ). Es ist dann

$$f(t) = \sum_{k=1}^p e^{\lambda_k t} P_k(t), \quad (19)$$

wobei die  $P_k(t)$  Polynome vom Grad  $\mu_k - 1$  sind, deren höchste Potenz bei allgemeiner Lage der Vektoren  $x_0, y_0$  nicht den Koeffizienten 0 haben kann (vgl. § 4). Es ist nun  $G_k$  der  $k$ -te Hauptminor der Matrix

$$G = \begin{vmatrix} f & Df & D^2 f & \dots & D^{N-1} f \\ Df & D^2 f & \dots & \dots & \dots \\ D^{N-1} f & \dots & \dots & \dots & D^{2N-2} f \end{vmatrix} \quad \left( D = \frac{d}{dt} \right)$$

und setzt sich aus Summanden der Form  $e^{(\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \dots + \lambda_{j_k})t}$  Polynom  $(t)$  zusammen, wobei die  $\lambda$  im Exponenten mit ihrer Vielfachheit auftreten können.

Wir unterteilen diese Matrix in  $p^2$  Untermatrizen  $U_{gh}$  ( $g, h = 1, 2, \dots, p$ ) mit  $\mu_g$  Zeilen und  $\mu_h$  Spalten und machen dann die folgende Umformung<sup>1)</sup>, gegenüber der sämtliche Hauptminoren und  $|G|$  selbst invariant sind:

$$G = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_h & \dots & \mu_p \\ \mu_1 & U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1h} & \dots & U_{1p} \\ \mu_2 & U_{21} & U_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_g & U_{g1} & \dots & \dots & U_{gh} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & U_{p1} & \dots & \dots & \dots & \dots & U_{pp} \end{vmatrix}.$$

<sup>1)</sup> Diese Umformung ist eine elementare Determinantenumformung: Addition des Vielfachen einer Zeile oder Spalte zu einer andern Zeile oder Spalte. Damit jedoch alle Hauptminoren invariant bleiben, wird immer nur zu einer Zeile oder Spalte addiert, die weiter unten bzw. weiter rechts liegt.

Das in der  $q$ -ten Zeile und  $r$ -ten Spalte der Untermatrix  $U_{g,h}$  stehende Element

$$D^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{g-1} + q} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{h-1} + r - 2 \{f\}$$

wird ersetzt durch

$$(D - \lambda_1)^{\mu_1} (D - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (D - \lambda_{g-1})^{\mu_{g-1}} (D - \lambda_g)^{q-1} (D - \lambda_1)^{\mu_1} \dots \\ \times (D - \lambda_{h-1})^{\mu_{h-1}} (D - \lambda_h)^{r-1} f$$

(wobei alle Elemente der Matrix  $G$  durchlaufen werden). Auf Grund der Eigenschaft

$$(D - \lambda_k)^s \{e^{\lambda_k t} P_k(t)\} = \begin{cases} e^{\lambda_k t} P_k'(t) & \text{für } s < \mu_k \\ 0 & \text{für } s \geq \mu_k \end{cases} \quad (2)$$

werden dann in der Untermatrix  $U_{g,h}$  alle Glieder mit  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_{n-1} t}$  eliminiert, wobei  $n$  die grössere der Zahlen  $g$  und  $h$  bedeutet.

Wir wollen nun zum Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  übergehen und deshalb nur immer die Glieder höchster Ordnung in Betracht ziehen, wobei aber nachträglich gezeigt werden muss, dass nicht gerade die mit den dominanten Gliedern gebildete Determinante verschwindet. In der Untermatrix  $U_{g,h}$  dominiert offenbar in jedem Element ein Glied der Form  $e^{\lambda_n t} \cdot \text{Polynom}$ , wobei  $n = \text{Max}(g, h)$  ist; also sieht die Matrix  $G$  schematisch wie folgt aus:

$$\begin{array}{cccc|cccc} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_N t} & & & & \\ e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_N t} & & & & \\ & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & \\ e^{\lambda_N t} & e^{\lambda_N t} & \dots & e^{\lambda_N t} & & & & \end{array}$$

Beim Versuch, die Determinante zu entwickeln, erkennt man sofort, dass sogar nur die Elemente in den diagonalen Unterdeterminanten  $U_{g,g}$  entscheidend sind, die wegen (20) wie folgt aussehen, wenn man sich auf dominante Glieder beschränkt:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_g t} Q_g & e^{\lambda_g t} Q_g' & e^{\lambda_g t} Q_g'' & \dots & e^{\lambda_g t} Q^{(\mu_g-1)}_g \\ e^{\lambda_g t} Q_g' & e^{\lambda_g t} Q_g'' & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_g t} Q^{(\mu_g-1)}_g & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

# Die Polynome

$$Q_g(t) = e^{-\lambda_g t} (D - \lambda_1)^{2\mu_1} (D - \lambda_2)^{2\mu_2} \dots (D - \lambda_{g-1})^{2\mu_{g-1}} \{e^{\lambda_g t} P_g(t)\}$$

haben denselben Grad wie  $P_g$  und denselben höchsten Koeffizienten  $c_g = 0$ . Es ist nun so, dass man sich für  $t \rightarrow \infty$  wieder auf die höchsten Potenzen von  $t$  beschränken und deshalb die Polynome  $Q_g$  durch  $c_g t^{\mu_g - 1}$  ersetzen kann. Damit werden die  $G_{gg}(t)$  asymptotisch gleich den Hauptminoren der Matrix

$$\begin{array}{cccc} U_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & U_{gg} \\ t^{\mu_g - 1} & (\mu_g - 1) t^{\mu_g - 2} & (\mu_g - 1)! & 0 \\ & (\mu_g - 1)! & 0 & 0 \\ & (\mu_g - 1)! & 0 & 0 \end{array}$$

wobei  $U_{gg} = c_g e^{\lambda_g t}$

Diese Hauptminoren sind alle von 0 verschieden, was die Weglassung aller nichtdominanten Glieder rechtfertigt, es ist nämlich (natürlich immer nur asymptotisch)<sup>1)</sup>:

$$G_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} t^{\mu_1 - 1},$$

$$G_2(t) = -c_1^2 e^{\lambda_1 t} (\mu_1 - 1) t^{2\mu_1 - 2},$$

allgemein:

$$G_k(t) = H_{1k}(t) \text{ (für } k = 1, 2, \dots, \mu_1 \text{), wobei}$$

$$H_{jk}(t) = (-1)^{\binom{k}{2}} c_j^k \cdot 1 \cdot 2! \cdot 3! \dots (k-1)! (\mu_j - 1)^{k-1} \dots$$

$$\dots (\mu_j - k + 1)! t^{k(\mu_j - k)} e^{k\lambda_j t}$$

$$\text{(für } k = 1, \dots, \mu_j; j = 1, \dots, p)$$

$$G_{\mu_1}(t) = (-1)^{\binom{\mu_1}{2}} c_1^{\mu_1} e^{\mu_1 \lambda_1 t} \{(\mu_1 - 1)!\}^{\mu_1} = |U_{11}|.$$

(21)

<sup>1)</sup> Die nachfolgenden Resultate beruhen auf einer umfangreichen, aber elementaren Rechnung mit Determinanten, die hier nicht wiedergegeben werden kann.

Für die Hauptminoren  $G_{\mu_1+k}$  ( $k = 1, \dots, \mu_2$ ) tritt  $|U_{11}|$  als konstanter Faktor auf, also

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu_1+k}(t) &= |U_{11}| H_{2,k}(t) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, \mu_2, \\ \text{allgemein:} \quad G_{\mu_1+g-1+k}(t) &= |U_{11}| |U_{22}^{-1} \dots U_{g-1,g-1}^{-1}| H_{g,k} \\ &\quad (\text{für } k = 1, 2, \dots, \mu_g; g = 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Durch Quotientenbildung gemäß (10) und (7) findet man hieraus schließlich die asymptotischen Werte für die  $\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= -k (\mu_1 - k) t^{-2} \quad (\text{für } k = 1, 2, \dots, \mu_1 - 1), \\ \beta_{\mu_1} &= \frac{c_2}{c_1} (-1)^{\mu_1-1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \frac{t^{\mu_1 + \mu_2 - 2}}{(\mu_1 - 1)!^2}, \\ \beta_{\mu_1+k} &= -k (\mu_2 - k) t^{-2} \quad (\text{für } k = 1, 2, \dots, \mu_2 - 1), \\ \beta_{\mu_1 + \mu_2} &= \frac{c_3}{c_2} (-1)^{\mu_2-1} e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t} \frac{t^{\mu_2 + \mu_3 - 2}}{(\mu_2 - 1)!^2} \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Hieraus erkennt man, dass auch in diesem Fall für  $t \rightarrow \infty$  alle  $\beta$  gegen Null konvergieren müssen, wenn auch im allgemeinen langsamer, als wenn nur einfache Nullstellen auftreten. Es lassen sich sogar an Hand der Konvergenz der Kästchen der Jordanschen Normalform erkennen, denn überall dort, wo in der Jordanschen Normalform in der Kodiagonalen eine Eins steht, hat man in der Lanczosschen Kodiagonalform einen  $\beta$ -Wert, der nur wie  $t^{-2}$  gegen Null strebt.

Die Fälle a) und b) zusammenfassend, kann man nun den folgenden Satz aufstellen:

**Satz 5:** Dann und nur dann, wenn alle Eigenwerte reell sind, kann man die Anfangsvektoren  $x, y$  so wählen, dass der Algorithmus beliebig kleine  $\beta$ -Werte ergibt.

**Beweis:** Es bleibt offenbar nur noch zu zeigen, dass die Bedingung auch notwendig ist. Wir betrachten zu diesem Zweck die in § 5 erwähnte Kettenbruchgleichung für die Eigenwerte, die sich aus der Kodiagonalform der Gleichung  $(A - \lambda E) \vec{\xi} = 0$  ergibt:

$$\begin{aligned} 0 = \lambda - \alpha_1 - \frac{\beta_1}{\lambda - \alpha_2} - \frac{\beta_2}{\lambda - \alpha_3} - \dots - \frac{\beta_{N-1}}{\lambda - \alpha_N}. \end{aligned}$$



Für einen komplexen Eigenwert  $\lambda + i\mu$  ist nun immer  $|\lambda - \alpha_k| > \mu$ . Für  $|\beta_k| < \mu^2/4$  folgt somit aus der Induktionsvoraussetzung

$$|\lambda - \alpha_k - \frac{\beta_k}{\lambda - \alpha_{k-1}}| > \frac{\mu}{2},$$

die für  $k = N$  erfüllt ist, sofort

$$|\lambda - \alpha_k - \frac{\beta_{k-1}}{\lambda - \alpha_{k-1}}| < \frac{\mu}{2}$$

$$\text{und damit } |\lambda - \alpha_{k-1} - \frac{\beta_{k-1}}{\lambda - \alpha_k}| > \frac{\mu}{2}.$$

Somit gilt sie für jedes  $k$ , insbesondere  $k = 1$ ; damit kann aber die obenstehende Kettenbruchgleichung nicht erfüllt sein; was zu beweisen war.

### c) Es treten einfache komplex-konjugierte Eigenwerte auf

Wir wollen auch für diesen Fall noch quantitative Beziehungen für die  $\beta_k$  herleiten. Es sei  $\lambda_{K-1} = \bar{\lambda}_{K-2} = \lambda + i\mu$ , wobei noch  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \lambda_K > \lambda > \lambda_{K+3} > \dots$ . Es ist dann notwendigerweise  $z_{K-1} = \bar{z}_{K-2}$ . Es wird sich nachträglich zeigen, dass die Betrachtung nicht gestört wird, wenn noch weitere Paare komplexer Wurzeln auftreten.

Da die Eigenwerte verschieden sind, gilt (16) mit dem einzigen Unterschied, dass für  $t \rightarrow \infty$  und  $k = K + 1$  zwei komplex-konjugierte dominante Glieder auftreten; es wird:

$G_1, G_2, \dots, G_K$  wie bisher.

$$G_{K-1} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{K-1})t} z_1 z_2 \dots z_K$$

$$\{ e^{i\mu t} V^2 (\lambda_1 \dots \lambda_K, \lambda_{K+1}) z_{K-1} + e^{-i\mu t} V^2 (\lambda_1 \dots \lambda_K, \bar{\lambda}_{K-1}) \bar{z}_{K-1} \}$$

$$= 2 G_K e^{2t} \{ S \cos(\mu t) + T \sin(\mu t) \}$$

$$\text{mit } S = i T = z_{K-1} W^2 (\lambda - i\mu, \lambda_1 \dots \lambda_K)$$

$$G_{K+2} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{K+2})t} V^2 (\lambda_1 \dots \lambda_K, \lambda + i\mu, \lambda - i\mu) z_1 z_2 \dots z_K z_{K+1} \bar{z}_{K+1}$$

$$= -4 G_K \mu^2 e^{2\lambda t} (S^2 + T^2).$$



# § 9. Die Formeln von Frenet für die Vektoren $x_k, y_k$

Die durch den Ansatz (11) definierten Anfangsvektoren  $x(t)$  und  $y(t)$ , die wir auch dem § 9 zugrunde legen, genügen den Differentialgleichungen  $x' = A x/2$ ,  $y' = A^* y/2$ . Durch elementare Umformungen mit Hilfe der Beziehungen (2) bis (8) erhält man daraus entsprechende Differentialgleichungen für die übrigen Vektoren  $x_2, \dots, x_N$  und  $y_2, \dots, y_N$  des Biorthogonalsystems sowie für die Skalare  $\alpha_k, \beta_k$ :

$$x'_k = \frac{1}{2} A x_k - \beta_{k-1} x_{k-1}, \quad y'_k = \frac{1}{2} A^* y_k - \beta_{k-1} y_{k-1}, \quad (k = 2, 3, \dots, N) \quad (24)$$

$$x'_k - \beta_k - \beta_{k-1}, \quad \beta'_k = \beta_k (\alpha_{k+1} - \alpha_k). \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \quad (25)$$

Ferner:

$$\left. \begin{aligned} (x_k, y_k)' &= \alpha_k (x_k, y_k), \\ (A x_k, y_k)' &= [\alpha_k^2 + \beta_k - \beta_{k-1}] (x_k, y_k), \\ (A x_{k+1}, y_k)' &= \alpha_{k+1} \beta_k (x_k, y_k). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Die Gleichungen (24) nennen wir die Frenetschen Formeln der Vektorsysteme  $x_k$  bzw.  $y_k$ , weil sie bei symmetrischer Matrix  $A$ , und wenn man die Vektoren so normiert, dass die inneren Produkte  $(x_k, y_k) = 1$  werden, in die Frenetschen Formeln des begleitenden Dreibeins der Kurve  $\xi = c^{1/2} \xi_0$  im  $R^N$  übergehen:

$$X'_1 = \beta_1 X_2, \quad X'_2 = -\beta_1 X_1 + \beta_2 X_3, \quad X'_3 = -\beta_2 X_2 + \beta_3 X_4 \quad \text{usw.}$$

## Stabilität der Gleichungen (25)

Nachdem durch einmalige Ausführung des Algorithmus Anfangswerte  $\alpha_k, \beta_{k+1}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) bestimmt wurden, können die Gleichungen (25) offenbar ohne Kenntnis der Vektoren  $x_k, y_k$  integriert werden. Hierüber gilt:

**Satz 6:** Sind für ein gewisses  $t$  die Werte  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N-1}$  alle positiv, so kann man das System (25) bis  $t = +\infty$  oder  $t = -\infty$  integrieren, wobei in beiden Fällen die  $\beta$  gegen Null, die  $x_k$  gegen die Eigenwerte konvergieren, und zwar werden die Eigenwerte für  $t \rightarrow +\infty$  in absteigender ( $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ ), für  $t \rightarrow -\infty$  in aufsteigender Reihenfolge geliefert.

**Beweis:** Nach Satz 4 haben wir unter den gemachten Voraussetzungen eine Matrix  $A$  mit nur reellen und verschiedenen Eigenwerten; es gilt also (16), wonach die  $G_k$  für kein  $t$  verschwinden, die  $\beta_k$  also für alle  $t$  endlich sind. Nachdem wir die Eigenwerte der Grösse  $\alpha$  nach numeriert haben, folgt aus (18), dass die  $\beta$  für  $t \rightarrow \infty$  tatsächlich gegen Null konvergieren, und zwar sogar exponentiell. Es müssen deshalb nach (25), erste Formel, auch die  $\alpha_k$  konvergieren,

und zwar, wie man durch logarithmische Ableitung von (17) und durch Vergleich mit der ersten Formel in (26) erkennt, gegen  $\lambda_k$ . Den Fall  $t \rightarrow -\infty$  behandelt man durch die Substitution  $A \rightarrow -A$ ,  $\lambda_k \rightarrow -\lambda_k$ ; was zu beweisen war.

**Satz 7:** Falls alle Eigenwerte der Matrix  $A$  reell sind, konvergieren die Vektoren  $x_k(t)$  bzw.  $y_k(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen die Eigenvektoren der Matrix  $A$  bzw.  $A^*$ .

Allerdings bezieht sich diese Konvergenzaussage nur auf die Richtung und nicht auf die Länge der Vektoren, und dies ist auch im Beweis so zu verstehen.

Diese Behauptung folgt trivialerweise aus bekannten Sätzen über das Potenzieren einer Matrix, da ja die  $x_k(t)$  und  $y_k(t)$  auch durch Biorthogonalisation der Vektoren  $e^{At/2} x_k(0)$  und  $e^{A^*t/2} y_k(0)$  entstehen; es folgt nämlich aus den Formeln (3) sofort, dass

$$x_k(t) = e^{At/2} x_k(0) + \text{Linearkombination von } x_1(t), \dots, x_{k-1}(t)$$

und entsprechend für die  $y$ .

### § 10. Fast zusammenfallende Eigenwerte<sup>1)</sup>

Falls mehrere Eigenwerte der Matrix  $A$  nahe beieinanderliegen, ist es schwierig, die Anfangsvektoren  $x_1, y_1$  für den Algorithmus so zu wählen, dass die Kodiagonalelemente  $\beta_i$  alle klein werden und damit die  $x_k$  praktisch die Eigenwerte sind. Man kann aber durch ähnliche Überlegungen wie bei mehrfachen Eigenwerten (§ 8, b) zeigen, dass – wenn die Eigenwerte gruppenweise nahe zusammenliegen – erreicht werden kann, dass die Kodiagonalform in folgender Weise in Kästchen zerfällt:

$$\begin{array}{c} \alpha_p, \beta_p \\ 1 \quad | \quad \alpha_{p+1} \quad \beta_{p+1} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta_q, \alpha_q \\ 1 \quad | \quad \alpha_q \quad \beta_q \\ 1 \quad | \quad \alpha_{q+1} \end{array}$$

Jeder Gruppe von  $q - p$  nahezu gleichen Eigenwerten entspricht ein solcher Kästchen, wobei mit wachsendem  $t$  (vgl. den Ansatz 11) die zwischen diesen Kästchen stehenden Kodiagonalelemente  $\beta_p, \beta_q$  usw. viel rascher klein werden als die übrigen  $\beta_i$ .

Es scheint mir nun besonders wichtig, dass man auch den Einschliessungssatz (Satz 3) auf diesen Fall verallgemeinern kann, es gilt nämlich:

<sup>1)</sup> Nachtrag; bei der Korrektur eingegangen.

Satz 8: Sind alle Kodiagonalelemente  $\beta_i$  positiv und ist  $\lambda$  ein Eigenwert der  $q$ - $p$ -reihigen Untermatrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & & & 0 \\ 1 & \alpha_{p+2} & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_{q-1} & \beta_{q-1} \\ & & & & 1 & \alpha_q \end{pmatrix},$$

so liegt mindestens ein Eigenwert der Matrix  $A$  zwischen  $\lambda + u$  und  $\lambda - v$ , solange  $u v > \beta_p + \beta_q$  ist.

Beweis: Ich knüpfe an den Beweis von Satz 3 an: Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Matrix  $A$  zu einer reell symmetrischen Matrix  $S$  äquivalent [vgl. (12'')], in der als Untermatrix eine zu  $A_1$  äquivalente Untermatrix  $S_1$  auftritt:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{p+1} & \sqrt{\beta_{p+1}} \\ \sqrt{\beta_{p+1}} & \alpha_{p+2} \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\beta_{q-1}} \\ & & & & \sqrt{\beta_{q-1}} & \alpha_q \end{pmatrix}.$$

Sei nun

$$z = \sum_{k=1}^q c_k e_k^{(1)}$$

ein Eigenvektor der Untermatrix  $S_1$ , also  $S_1 z = \lambda z$ . Auf Grund der bei Satz 3 gemachten Ausführungen genügt es nun, wenn das innere Produkt

$$(S z - \lambda z - u z, S z - \lambda z + v z)$$

negativ wird, dann muss ein Eigenwert zwischen  $\lambda + u$  und  $\lambda - v$  liegen. Nun ist aber

$$S z = S_1 z + c_{p+1} \sqrt{\beta_p} e_p + c_q \sqrt{\beta_q} e_{q+1},$$

also

$$S z - \lambda z - a z = c_{p+1} \sqrt{\beta_p} e_p + c_q \sqrt{\beta_q} e_{q+1} - a \sum_{k=1}^q c_k e_k,$$

und damit endlich, da ja die  $e_k$  orthogonal sind:

$$(S z - \lambda z - u z, S z - \lambda z + v z) = c_{p+1}^2 \beta_p + c_q^2 \beta_q - u v \sum_{k=1}^q c_k^2.$$

Dies ist aber in der Tat negativ, sobald  $u v > \beta_p + \beta_q$ ; was zu beweisen war.

1) Vgl. Fussnote 2 auf Seite 45.



## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. LANCZOS, *An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators*, Proceedings of a Second Symposium on Large Scale Digital Computing Machinery (Ann. Comput. Lab. 26) (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951), S. 164–206. – Siehe auch: J. Res. nat. Bur. Standards 45, 255–282 (1950).
- [2] E. STIEFEL, *Über einige Methoden der Relaxationsrechnung* (vgl. insbesondere § 5), ZAMP 3, 1–33 (1952).
- [3] M. R. HESTENES und E. STIEFEL, *The Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, wird im J. nat. Bur. Standards erscheinen.
- [4] M. R. HESTENES und W. KARUSH, *A Method of Gradients for the Calculation of Characteristic Roots and Vectors of a Real Symmetric Matrix*, J. Res. nat. Bur. Standards 47, 45–61 (1951).
- [5] J. H. M. WEDDERBURN, *Lectures on Matrices*, Amer. math. Soc., Colloquium Publications, Bd. 17.
- [6] G. BLANCH, *On the Computation of Mathieu Functions*, J. Math. Phys. 2, 1–20 (1946).
- [7] J. B. ROSSER, C. LANCZOS, M. R. HESTENES und W. KARUSH, *Separation of Close Eigenvalues of a Real Symmetric Matrix*, J. Res. nat. Bur. Standards 47, 291–297 (1951).
- [8] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Springer, Berlin 1951 [Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 60]).
- [9] G. KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie* (Veit, Leipzig 1909).
- [10] D. H. WEINSTEIN, *Modified Ritz Method*, Proc. nat. Acad. Sci. USA. 20, 529–534 (1934).
- [11] H. WIELANDT, *Ein Einschliessungssatz für charakteristische Wurzeln normaler Matrizen*, Arch. Math. 1, 348–352 (1948).

## Summary

The paper begins with a review of the essential points of LANCZOS's orthogonalization procedure, which is of great importance for the determination of the eigenvalues of a real, but otherwise general matrix. Then several properties useful for numerical computation are proved:

If the degree of the reduced characteristic polynomial of the matrix is  $m$ , then it is possible to choose trial vectors  $x, y$  such that the iteration may be continued for exactly  $m$  steps. At that point the process must stop because the iterated vectors  $x_{m+1}, y_{m+1}$  vanish (theorem 1).

If all the eigenvalues are real, then the co-diagonal elements  $\beta_i$  [see equation (12)] can be made arbitrarily small by proper choice of the trial vectors  $x, y$  (theorem 5), which considerably simplifies the evaluation of the eigenvalues and eigenvectors. Should, in addition, all the  $\beta_i$  still be positive (see theorem 4), then bounds for the eigenvalues may readily be given (theorem 3). Further remarks are made concerning matrices with complex eigenvalues.

Finally it is shown that by starting from a certain one-parameter family of trial vectors (11), the diagonal and co-diagonal elements  $\alpha(t), \beta(t)$  are solutions of a system of differential equations (25).

(Eingegangen: 8. September 1952.)

# Theorie der Kombinationsseismographen

Von MAX WEBER, Zürich<sup>1)</sup>

## Einleitung und Überblick

Die Theorie der Seismographen, wie sie E. WIECHERT [26]<sup>2)</sup> erstmals einwandfrei dargelegt hat (die vorangehenden Arbeiten sind in [5] zusammengefasst), untersucht, wie man mit Hilfe eines mechanischen Systems, das aus masselosen Federn, starren Hebeln, Gelenken, Stoßstangen und Massen zusammengesetzt ist, kleine Bewegungen einer starren Masse messen kann. Diese Aufgabe hat WIECHERT gelöst. Jedoch haben sich, wie die Erfahrung gezeigt hat, seine Voraussetzungen als zu einfach und seine Lösung als zu kompliziert erwiesen [1], [18]. Trotzdem ist, wie die Literatur zeigt, das von WIECHERT angegebene und auf mechanische Seismographen zugeschnittene Messverfahren allgemein übernommen worden. Man hat also, kurz gesagt, die mechanischen Seismographen durch elektronische ersetzt und damit wohl beachtliche, aber keine grundsätzlichen Fortschritte in der Erschütterungsmesstechnik erzielt.

Dieser Sachverhalt hat sich für die Entwicklung der Seismometrie, die heute auf zahlreiche Arbeitshypothesen angewiesen ist, sowie für die Lösung vieler Fragen der Technik als ausserst hemmend erwiesen. Gerne verweist man in diesem Zusammenhang auf die grossen praktischen Erfolge der angewandten Seismik, vergisst aber dabei, dass die Refraktions- wie die Reflexionsseismik, entsprechend ihrem einfachen Arbeitsschema an die Seismographen zum Teil andere und vor allem geringere Anforderungen stellt. In klarer Erkenntnis dieser heute nur wenig veränderten Sachlage schrieb WIECHERT in der erwähnten Arbeit: «Unsere Aufgabe für die folgenden Ausführungen ist aber klar vorgezeichnet: Wir werden nicht nur untersuchen müssen, wie man empfindliche Seismometer bauen kann, sondern auch, wie lesbare Diagramme zu erhalten und zu entziffern sind.»

Versteht man unter lesbaren Diagrammen, die zu entziffern sind, Diagramme, aus deren Inhalt man nicht nur auf die geologischen Strukturen, sondern allgemein auch auf die physikalischen Eigenschaften der Erde schliessen kann, so verlangt die Seismometrie in erster Linie eine exakte Erschütterungsmessung.

Mit diesen kurzen Hinweisen ist meines Erachtens zur Genüge dargetan, dass die Entwicklung einer einwandfreien und praktisch brauchbaren Erschüt-

<sup>1)</sup> Institut für Geophysik, ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 80.

terungsmesstechnik heute in vermehrtem Masse einem dringenden Bedürfnis entspricht. In der vorliegenden Arbeit wird nun eine verfeinerte Theorie des Seismometer gegeben und damit in geeigneter Verbindung mit der Elektronik eine neue Methode zur Messung von Erschütterungen (mechanische Schwingungen, Normblatt DIN 1311 vom Mai 1939) entwickelt.

## § 1. Die Aufgabe der Erschütterungsmessung

Die Aufgabe der Erschütterungsmessung ist nach WIECHERT und andere Autoren (6, 7, 26) die Messung von kleinen Bewegungen starrer Massen. Diese Beschränkung auf starre Massen ist weder notwendig noch vereinfacht sie die Aufgabe. Die Bewegungen eines elastischen Körpers relativ zu einem Koordinatensystem sind vollständig bekannt, wenn man in jedem Zeitpunkt die Lage jedes einzelnen Massenpunktes des elastischen Körpers relativ zum Koordinatensystem kennt.

Verwendet man das rechtwinklige Koordinatensystem  $S_1$  mit den Einheitsvektoren  $n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}$  als raumfestes Bezugssystem und betrachtet einen beliebigen Massenpunkt  $M$ , so kann man seine Lage durch den Vektor

$$r\{x_1, y_1, z_1\} + s\{\xi, \eta, \zeta\}$$

darstellen, wobei der Vektor  $r$  seine Ruhelage und der Vektor  $s$  seine Bewegung relativ zur Ruhelage erfassen möge.

Für Erschütterungsmessungen auf seismischem Prinzip ist das Absolutsystem  $S_1$  als Bezugssystem gegeben. Hat aber die zeitliche Änderung der Schwerebeschleunigung  $g$  auf die Messung keinen merklichen Einfluss, so darf man auch ein Koordinatensystem im Erdmittelpunkt oder an der Erdoberfläche als Bezugssystem wählen.

Die allgemeine Aufgabe der Erschütterungsmessung besteht nun darin, entweder die drei Komponenten  $\xi, \eta, \zeta$  oder  $\partial\xi/\partial t, \partial\eta/\partial t, \partial\zeta/\partial t$  oder  $\partial^2\xi/\partial t^2, \partial^2\eta/\partial t^2, \partial^2\zeta/\partial t^2$  als Funktionen des Ortes  $r$  und der Zeit  $t$  zu messen. In der Technik sind oft einfachere Angaben ausreichend.

Für die Erschütterungsmessung ist die Tatsache von Bedeutung, dass für viele praktische Beispiele die einzelnen Komponenten  $\xi, \eta, \zeta$  periodische Funktionen von  $t$  sind oder sich wenigstens durch einige allerdings nicht harmonisch liegende harmonische Schwingungen hinreichend genau erfassen lassen [2].

## § 2. Der äussere Aufbau der elektronischen Kombinationsseismographen

Ein elektronischer Seismograph ist aus einem Seismometer und einem Vergrösserungssystem zusammengesetzt. Ein elektronischer Kombinationsseismograph besteht aus mehreren Seismometern in Reihen- oder Differenzschaltung.

oder in einer gemischten Schaltung und verschiedenen, voneinander unabhängigen, elektronischen Vergrößerungssystemen.

Ein Seismometer besteht aus einem mechanischen System, kurz auch als Schwinger bezeichnet, der so in einem starren Rahmen oder Gehäuse befestigt ist, dass er kleine Bewegungen um eine stabile Gleichgewichtslage ausführen kann, und einem elektromechanischen Umformer, der die Bewegungen des Schwingers relativ zum Gehäuse in elektrische Spannungsschwankungen  $U$  überträgt.

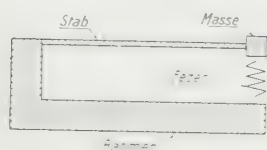


Fig. 1

Schematische Darstellung des Schwingers, auf den sich mit wenigen Ausnahmen alle praktisch brauchbaren Schwinger zurückführen lassen.

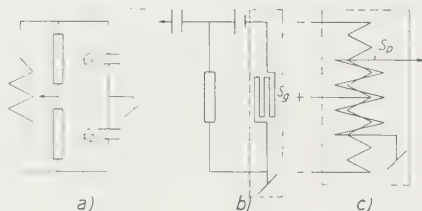


Fig. 2

Schematische Darstellung der wichtigsten elektromechanischen Umformer mit Speisespannung. In *praxi* werden im allgemeinen nur die aktiven Elemente (eingerahmt) in die Seismometer eingebaut.

Den einfachsten Zusammenhang zwischen  $V_s$  und der Messgrösse ergeben unter der Vielzahl der möglichen Schwinger diejenigen, deren Massenelemente sich, wenigstens näherungsweise, auf geradlinigen Bahnen bewegen und damit praktisch nur eine Bewegungsrichtung besitzen. Sie lassen sich mit Ausnahme der astasierten Pendel formal auf einen Stab, der einseitig eingespannt und am anderen Ende federnd befestigt und mit einer Zusatzmasse  $M$  versehen ist, zurückführen (Figur 1).

Die elektromechanischen Umformer, die eine Dehnung oder Verschiebung oder deren Änderung pro Zeiteinheit messen, lassen sich folgendermassen einteilen:

a) *Elektromechanische Umformer mit Speisespannung.* In Figur 2 sind die Umformer mit Speisespannung schematisch dargestellt. In Figur 2a sind die beiden Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$ , die auch durch «Strain gages» oder Induktivitäten mit beweglichem Kern ersetzt werden können, die aktiven Elemente. In Figur 2b ist der Widerstandsstreifen  $S_g$  und in Figur 2c die bewegliche Spule  $S_g$ , das aktive Element. In *praxi* werden im allgemeinen nur die aktiven Elemente (in Figur 2 eingerahmt) in die Seismometer eingebaut.

b) *Elektromechanische Umformer ohne Speisespannung.* Die Umformer ohne Speisespannung sind entweder auf dem piezoelektrischen oder magnetostruktiven Effekt oder nach dem Tauchspulen- oder Reluktanzprinzip aufgebaut.

Ein elektronisches Vergrößerungssystem besteht aus einem Verstärker und einem Registriergerät (siehe § 6).

### § 3. Die Beschleunigung, mit der ein beliebiges Massenelement des Schwingers belegt wird

Die Bewegung eines Seismometers, dessen Rahmen sich zusammen mit seiner unmittelbaren Umgebung wie eine starre Masse verhält, lässt sich wie folgt beschreiben (Figur 3). Das System  $S_1$  sei das Absolutsystem. Das Koordinatensystem  $S_2$  sei mit  $S_1$  starr verbunden und sein Ursprung  $O_2$  liege in der Ruhelage des Messpunktes  $M_p$ . Das System  $S_3$  gehe durch eine Parallelverschiebung aus  $S_2$  (Lagekoordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ ) und das System  $S_4$  durch eine Drehung aus  $S_3$  bei gemeinsamem Ursprung hervor (Lagekoordinaten  $\psi, \varphi, \chi$ ). Ist das System  $S_4$  starr mit dem Seismometer verbunden, so beschreiben  $\xi, \eta, \zeta$  seine Translations- und  $\psi, \varphi, \chi$  seine Rotationsbewegungen.

Die Einführung von  $\psi, \varphi, \chi$  ist nur deshalb notwendig, weil es keine Seismometer gibt [9], die nur auf Translationsbewegungen empfindlich sind (eingegen einer vielfach irrtümlich vertretenen Ansicht, zum Beispiel in [25]).

Die Beschleunigung  $b$  eines beliebigen Massenelementes des Schwingers kann im vorliegenden Fall so berechnet werden, wie wenn das Element in seiner Ruhelage relativ zum Gehäuse, bezeichnet durch den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x_4, y_4, z_4$  im Koordinatensystem  $S_4$ , festgehalten würde.

Die Berechnung von  $b$   $S_4^{-1} = b\{b_{4x}, b_{4y}, b_{4z}\}$  (mit  $b\{S_n^{-1}\}$  sei die Darstellung der Beschleunigung  $b$  im Koordinatensystem  $S_n$  bezeichnet) ist in [8] durchgeführt. Für Erschütterungsmessungen (§ 2, 24) ist folgende Näherung ausreichend, aber, wie gezeigt werden soll, keine Bedingung für die Lösung der Aufgabe. Mit  $\partial\chi/\partial t = \dot{\chi}$ , ... erhält man für  $b$

$$\left. \begin{aligned} b_{4x} &= x_4 (\ddot{\chi}^2 + \dot{\chi}^2) + y_4 (\ddot{\chi} - \ddot{\varphi} \psi + 2 \dot{\chi} \dot{\psi}) \\ &\quad + z_4 (\ddot{\chi} \varphi + \ddot{\varphi} + 2 \dot{\chi} \dot{\psi}) + \xi + \ddot{\eta} \chi - \ddot{\zeta} \varphi - g \varphi, \\ b_{4y} &= -x_4 (-\ddot{\chi} + \ddot{\varphi} \psi) - y_4 (\ddot{\chi}^2 + \dot{\chi}^2) \\ &\quad + z_4 (\ddot{\chi} \varphi - \ddot{\psi} + 2 \dot{\chi} \dot{\varphi}) - \xi \chi + \ddot{\eta} + \ddot{\zeta} \psi + g \psi, \\ b_{4z} &= x_4 (\ddot{\chi} \psi + \ddot{\varphi}) + y_4 (\ddot{\chi} \varphi - \ddot{\psi}) \\ &\quad + z_4 (\dot{\chi}^2 + \dot{\psi}^2) + \ddot{\xi} \varphi - \ddot{\eta} \psi + \ddot{\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Im allgemeinen wird das Seismometer im System  $S_4$  eine beliebige Lage innehaben und somit das System  $S_4$  nicht mehr das dem Schwinger am besten angepasste Koordinatensystem darstellen. Daher wird ein fünftes Koordinatensystem  $S_5$  eingeführt, das mit dem System  $S_4$  starr verbunden ist. Beschreibt man



die Drehung des Systems  $S_5$  in bezug auf das System  $S_4$  mit Hilfe der Matrix

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \cos \alpha'_1 & \cos \beta'_1 & \cos \gamma'_1 \\ \cos \alpha'_2 & \cos \beta'_2 & \cos \gamma'_2 \\ \cos \alpha'_3 & \cos \beta'_3 & \cos \gamma'_3 \end{pmatrix}$$

$\cos \alpha'_j, \cos \beta'_j, \cos \gamma'_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sind die Richtungskosinus des Systems  $S_5$  in bezug auf das System  $S_4$ , so ergibt sich für die Beschleunigung  $\mathfrak{b}[S_5]$  [23]

$$\mathfrak{b}[S_5] = \mathfrak{U} \mathfrak{b}[S_4]. \quad (2)$$

Dabei hat man in  $\mathfrak{b}[S_4]$  die Koordinaten  $x_4, y_4, z_4$  des Punktes  $P$  mit Hilfe der

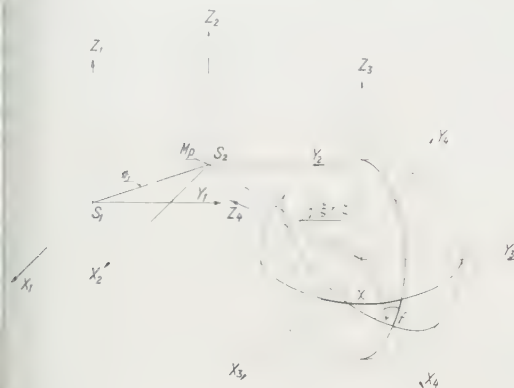


Fig. 3

Darstellung der eingeführten Koordinatensysteme  $S_1, S_2, S_3, S_4$  und Lagekoordinaten  $\xi, \eta, \zeta, \psi, \varphi, \chi$ .  
 $M_D$  = Messpunkt.

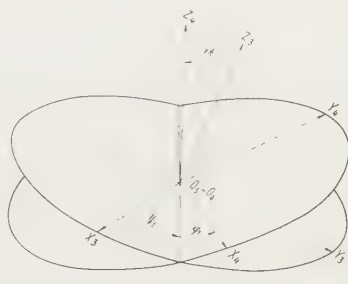


Fig. 4

Die Eulerschen Koordinaten.

Gleichung ( $\mathfrak{d}$  = Vektor  $\overrightarrow{O_4 O_5}$ ;  $O_4, O_5$  = Ursprung von  $S_4, S_5$ ;  $\mathfrak{q}_1$  = Vektor  $\overrightarrow{O_4 P}$ ,  $\mathfrak{z}_2$  = Vektor  $\overrightarrow{O_5 P}$ )

$$\mathfrak{q}_1 \{x_4, y_4, z_4\} = \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{q}_2 \{x_5, y_5, z_5\} + \mathfrak{d} \{d_{4x}, d_{4y}, d_{4z}\} \quad (3)$$

durch die entsprechenden Koordinaten  $x_5, y_5, z_5$  zu ersetzen.

Die in Figur 3 verwendeten Lagekoordinaten sind so gewählt, dass kleine Bewegungen auch kleine Beträge von  $\psi, \varphi, \chi$  ergeben. Es ist aber zu erwarten, dass in konkreten Aufgaben andere Definitionen dieser Lagekoordinaten die Messung vereinfachen können.

Verwendet man zum Beispiel für die Beschreibung der Rotationen des Systems  $S_4$  relativ zu  $S_3$  die bekannten Eulerschen Koordinaten  $\psi_1, \varphi_1, \theta_1$  (Figur 4, [11]), so ergibt sich für die Beschleunigung  $\mathfrak{b}$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{a}_{4x} &= -x_4 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1)^2 - y_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\psi}_1) + z_4 (\psi_1 \ddot{\theta}_1)'' + \ddot{\xi} + \ddot{\eta} (\psi_1 + \varphi_1), \\ \mathfrak{a}_{4y} &= x_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\psi}_1) - y_4 [(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1)^2 + \dot{\theta}_1^2] - z_4 (\psi_1 \ddot{\theta}_1)'' - \ddot{\xi} (\psi_1 + \varphi_1) + \ddot{\eta}, \\ \mathfrak{a}_{4z} &= x_4 2 \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_1 + y_4 \ddot{\theta}_1 - z_4 \dot{\theta}_1^2 - \ddot{\eta} \dot{\theta}_1 + \ddot{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ferner können die Erschütterungen, zum Beispiel in Fahrzeugen, einer beliebigen Bewegung überlagert sein. Die Berechnung der Beschleunigung  $\mathfrak{b}$  ist für diesen Fall in [23] durchgeführt.

## § 4. Der Schwinger

Figur 1 zeigt den Schwinger, der aus einem elastischen Stab der Länge  $l$ , der Biegesteifigkeit  $EI$ , der Dichte  $\varrho$  und des Querschnittes  $q$ , einer punktförmigen Zusatzmasse  $M$  und einer Zusatzfeder mit der Federkonstanten  $H$  (Dämpfungsfaktor,  $\varepsilon = H/EI\varrhoql^4$ ). Der Rahmen des Schwingers ist so mit dem Koordinatensystem  $S_1$  verbunden, dass die Stabachse mit der  $x_1$ -Achse und die Schwingungsebene mit der  $(x_1, y_1)$ -Ebene zusammenfällt.

Somit unterliegt der Ausschlag des Schwingers  $w_1$  ( $w_1 = w, x_1 = r l$ ) in  $y_1$ -Richtung folgender Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} = -\frac{b_4 y}{l} + F(r, t),$$

die noch durch die Randbedingungen

$$r = 0 : w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

$$r = 1 : L_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon L_1 \frac{\partial w}{\partial t} + L_3 w - H \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} = H G_1$$

$$L_1 = \frac{H M l^3}{E I}, \quad L_3 = \frac{f_0}{\varrho q l}, \quad G_1 = -\frac{M l^2 b_4 y}{E I}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0$$

zu ergänzen ist.

Zur Lösung verwendet man den Ansatz

$$w(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) u_n(r)$$

mit

$$\frac{d^4 u_n}{dr^4} - \alpha_n^4 u_n = 0 \quad \left( \alpha_n^4 = \frac{\nu_n^2}{H} \right),$$

der, in (5), (6) eingeführt, mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{d^3 u_n(1)}{dr^3} = -\alpha_n L_1 u_n(1) + \frac{L_3}{H} u_n(1)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 C_n}{dt^2} + \varepsilon \frac{d C_n}{dt} + \nu_n^2 C_n \right) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n = F,$$

$$L_1 \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(1) = H G_1$$

ergibt.

Damit sind die Eigenfunktionen  $u_n$  vollständig bestimmt. Zu berechnen sind noch die Funktionen  $F_n$  bzw.  $C_n$ .

Versteht man unter  $\mathcal{S}$  den Operator (Stieltjessches Integral)

$$\mathcal{S} f(r) u_k dr = \int_0^1 f(r) u_k dr + L_1 f(1) u_k(1), \quad (10)$$

so erhält man für die «belastete Orthogonalität» (14) und für die Normierungsbedingung zwischen den Eigenfunktionen

$$\mathcal{S} u_j u_k dr = 0 \quad (j \neq k), \quad \mathcal{S} u_k^2 dr = 1$$

und für  $F_n$ , unter Berücksichtigung der Gleichung (10), durch Anwendung von  $\mathcal{S}$  auf Gleichung (9)

$$F_n = \int_0^1 F(r, t) u_n dr + H G_1 u_n(1).$$

Damit ist die Integration grundsätzlich durchgeführt.  $C_n$  ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} + \varepsilon \frac{d C_n}{dt} + v_n^2 C_n = F_n.$$

Setzt man zum Beispiel folgende Störungen (allgemeinere Funktionen durch Zusammensetzung nach FOURIER)

$$F(r, t) = f_1 e^{i \omega t}, \quad H G_1 = g_1 e^{i \omega t}$$

$$(i = \sqrt{-1})$$

an, so ergibt sich für die stationäre Lösung:

$$w(r, t) = e^{i \omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n u_n}{v_n^2 - \omega^2 + i \varepsilon \omega}$$

mit

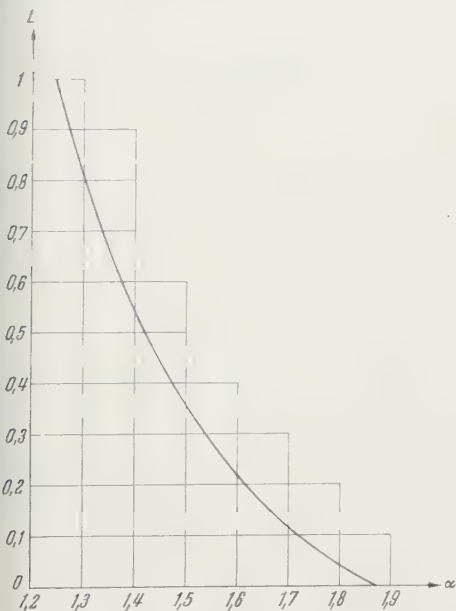
$$K_n = \int_0^1 f_1(r) u_n(r) dr + g_1 u_n(1).$$

Fig. 5

Die Frequenzgleichung lautet

Graphische Darstellung der Frequenzgleichung (11). (Figur 5):

$$- \frac{L_3}{H \alpha^4} + L_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha \cosh \alpha}{\cosh \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha} = L. \quad (11)$$



Mit den Abkürzungen

$$C_n(r) = \cos \alpha_n r + \cosh \alpha_n r, \quad S_n(r) = \sin \alpha_n r + \sinh \alpha_n r,$$

$$c_n(r) = \cos \alpha_n r - \cosh \alpha_n r, \quad s_n(r) = \sin \alpha_n r - \sinh \alpha_n r$$

erhält man für die normierten Eigenfunktionen

$$u_n(r) = B_n \left( -\frac{S_n(1)}{C_n(1)} c_n(r) + s_n(r) \right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_n^2} = & \left( \frac{S_n(1)}{C_n(1)} \right)^2 \left( 1 + \frac{c_n(1) s_n(1)}{2 \alpha_n} - \frac{\sinh \alpha_n \cos \alpha_n + \cosh \alpha_n \sin \alpha_n}{2 \alpha_n} + L_1 c_n^2(1) \right. \\ & - \frac{S_n(1)}{C_n(1)} \left( \frac{s_n^2(1)}{\alpha_n} + 2 L_1 c_n(1) s_n(1) \right) \\ & + \frac{\sinh \alpha_n \cos \alpha_n - \cosh \alpha_n \sin \alpha_n - C_n(1) s_n(1)}{2 \alpha_n} + L_1 s_n^2(1) . \end{aligned}$$

#### Spezialfälle

a)  $M = 0, f_0 = 0$  (freies Ende).

Frequenzgleichung:

$$\cos \alpha \cosh \alpha - 1 = 0$$

$$(\alpha_1 = 1,875, \alpha_2 = 4,694, \alpha_3 = 7,855, \alpha_4 = 10,996, [10]).$$

Eigenfunktionen:

$$u_n(r) = \frac{C_n(1)}{S_n(1)} c_n(r) + s_n(r).$$

b)  $f_0 \rightarrow \infty$  (gehaltenes Ende).

Frequenzgleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tgh} \alpha$$

$$(\alpha_1 = 3,927, \alpha_2 = 7,069, \alpha_3 = 10,210, \alpha_4 = 13,352 [10]).$$

Eigenfunktionen:

$$u_n(r) = -c_n(r) + \frac{1}{\operatorname{tgh} \alpha_n} s_n(r).$$

c)  $M > 0, q l$  (Federpendel).

Mit  $\sin \alpha \cong \alpha - \alpha^3/3$ ,  $\cos \alpha \cong 1 - \alpha^2/2$  usw. geht Gleichung (11) und Gleichung (12) über in

$$r^2 \cong \frac{3 E I l^3}{M} + f_0, \quad u(r) \cong \frac{1}{\sqrt{I_1}} \left( \frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^3 \right).$$

$u$  stellt bis auf einen konstanten Faktor die elastische Linie dar.

## § 5. Die Eigenschaften der Seismometer

Ein Seismometer besteht, wie in § 2 erwähnt, aus einem Schwinger (§ und einem elektromechanischen Umformer.

Die verschiedenen Umformer lassen sich einheitlich erfassen. Ist  $\Gamma_m$  ein Operator, das heisst eine Vorschrift, die jeder Funktion  $f(r, t)$  eine Funktion  $\Gamma_m f(r, t)$  mit  $r = r_0$ , das heisst der Variablen  $t$  allein zuordnet, so ist ( $e_m$  = Empfindlichkeit des Umformers) für kapazitive oder induktive Umformer in Brückenschaltung ( $m = 1$ )

$$\Gamma_1 f(r, t) = e_1 (f(r, t))_{r=r_0}$$

für «Strain gages» oder näherungsweise piezoelektrische Umformer ( $m = 2$ )

$$\Gamma_2 f(r, t) = e_2 \left( \frac{\partial}{\partial r} f(r, t) \right)_{r=r_0}$$

und für induktive Umformer ohne Speisespannung ( $m = 3$ )

$$\Gamma_3 f(r, t) = e_3 \left( \frac{\partial}{\partial t} f(r, t) \right)_{r=r_0}.$$

Damit ergibt sich für die allgemeine Seismometergleichung ( $n_a$  = Einheitsvektor in Arbeitsrichtung):

$$V_s = \Gamma_m l w = \Gamma_m l \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t F_n(t) \varphi_n(t - \tau) d\tau u_n(r), \quad (13)$$

$$F_n = - \left( \int_0^1 \frac{(n_a \mathbf{b})}{l} u_n(r) dr + \frac{L_1}{l} (n_a \mathbf{b}) u_n(1) \right),$$

$$q_{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + r_{\nu}^2}} \left( \begin{bmatrix} \epsilon^2 \\ 4 \end{bmatrix} r_{\nu}^2 + \begin{bmatrix} \epsilon^2 \\ 4 \end{bmatrix} r_{\nu}^2 \right).$$

Eine Diskussion der Greenschen Funktionen  $\varphi_n(t)$  findet man in [15]. Als Arbeitsrichtung bezeichnet man die Bewegungsrichtung des Schwingers.

Zur Berechnung des Amplituden- und Phasenganges nimmt man zum Beispiel an, der Schwinger sei mit dem Koordinatensystem  $S_1$  starr verbunden (Arbeitsrichtung parallel  $\gamma_4$ ) und die Beschleunigung sei

$$b_{4x} = b_{4z} = 0, \quad b_{4y} = \ddot{\eta} = -\eta_0 \omega^2 e^{i\omega t}.$$

Dies in Gleichung (13) eingesetzt, ergibt

$$V_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \eta_0 \Gamma_m e^{i\omega t} u_n(r)}{r_n^2 - \omega^2 + i\epsilon \omega} \left( \int_0^1 u_n(r) dr + L_1 u_n(1) \right). \quad (14)$$



Bezeichnet man den Effektivwert  $E_w(\omega)$  der Ausgangsspannung  $U_{\text{eff}}$  als Wegempfindlichkeit, so folgt aus Gleichung (14) für  $E_w(\omega)$

$$E_w(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{r_n^2 - \omega^2 + i \varepsilon \omega} \Gamma_n e^{i \omega t} u_n(r) \left( \int_0^1 u_n(r) dr + L_1 u_n(1) \right)$$

und damit für  $V_s$

$$V_s = \sqrt{2} \eta_0 E_w(\omega) e^{i(\omega t - \vartheta_w)}.$$

$\vartheta_w$  ist durch die Gleichung

$$\sqrt{2} E_w(\omega) e^{i(\omega t - \vartheta_w)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{r_n^2 - \omega^2 + i \varepsilon \omega} \Gamma_n e^{i \omega t} u_n(r) \left( \int_0^1 u_n(r) dr + L_1 u_n(1) \right)$$

bestimmt.

Definiert man entsprechend  $E_v(\omega)$  und  $E_b(\omega)$ , so folgt

$$V_s = \sqrt{2} \eta_0 \omega E_v(\omega) e^{i(\omega t - \vartheta_v)}, \quad V_s = \sqrt{2} \eta_0 \omega^2 E_b(\omega) e^{i(\omega t - \vartheta_b)}$$

mit

$$\vartheta_w = \vartheta_v = \vartheta_b.$$

Die Empfindlichkeiten sind gegenseitig durch folgende Gleichungen verbunden:

$$E_w(\omega) = \omega E_v(\omega) = \omega^2 E_b(\omega).$$

Für ein vorgegebenes Seismometer, charakterisiert durch die Konstanten  $\varepsilon, L_1, L_3, r_1, \dots, r_n$ , den Operator  $\Gamma_n$  und die Eigenfunktionen  $u_n$ , beschreibt somit die Wegempfindlichkeit als Funktion von  $\omega$  [einzelne Zahlenangaben in der Literatur beziehen sich im allgemeinen auf den linearen Arbeitsbereich oder auf die statische Empfindlichkeit  $E_w(0), E_b(0)$ ], den Amplituden- und die Funktion  $\vartheta_w$  den Phasengang des Seismometers als Wegmesser (in den Diagrammen erscheint  $\vartheta_w$  im Zeitmaßstab  $\vartheta_w/\omega$ ). Analoges gilt für die Funktionen  $E_v(\omega), E_b(\omega), \vartheta_v(\omega), \vartheta_b(\omega)$ , die den Amplituden- und Phasengang des Seismometers als Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsmesser beschreiben.

Werden jetzt die Funktionen

$$E_w(\omega) e^{i \vartheta_w}, E_v(\omega) e^{i \vartheta_v}, E_b(\omega) e^{i \vartheta_b}$$

in der Gaußschen Ebene mit  $\omega$  als Parameter dargestellt, so ergibt dies ein gutes Bild über das Verhalten eines Seismometers gegenüber Erschütterungen (Figur 6).

Die Empfindlichkeiten, zum Beispiel  $E_w$ , sind derart von  $\omega$  abhängig, daß jedes einzelne Glied in der entsprechenden Reihendarstellung proportional einer Funktion von  $\omega$  ist, die für alle Glieder vom gleichen Typus ist. Die möglichen Funktionstypen sind in Tabelle 1 zusammengestellt ( $\Omega_n^2 = 1/r_n^2 = \omega_n^2 + i \varepsilon \omega$ ).

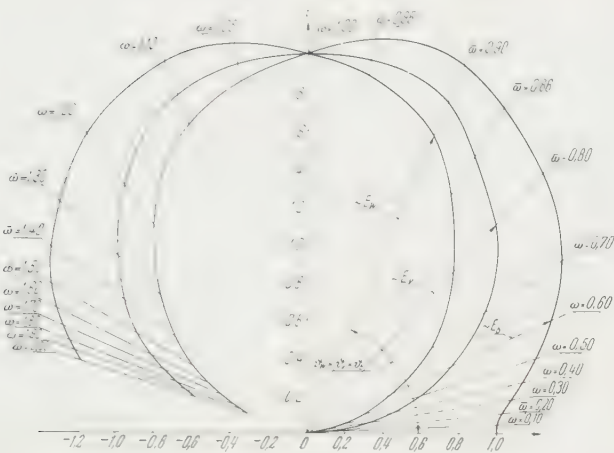


Fig. 6

Der Amplituden- und Phasengang eines Seismometers als Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsmesser ( $M = I_0 = 0, \omega = \omega/v_1, \varepsilon/v_1 = 1/2$ ).

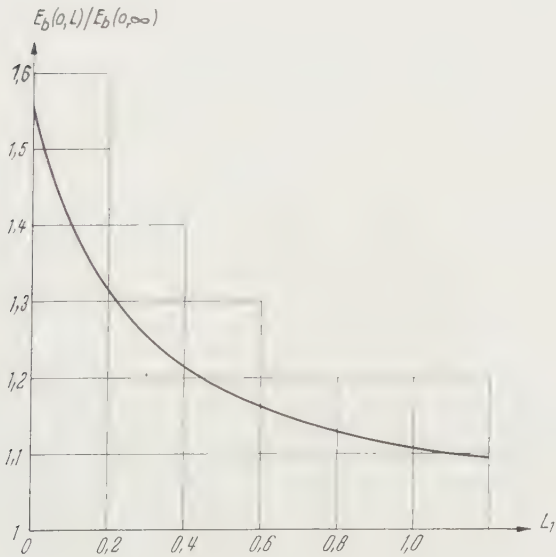


Fig. 7

Die relative Empfindlichkeit  $E_b(0, L_1)/E_b(0, \infty)$  für punktförmig bei  $\tau = 1$  angreifende Umformer ( $\Gamma_1, \Gamma_3$ ).

Ferner ist die Empfindlichkeit proportional  $e_m$  und von  $L_1$  sowie  $L_3$  und bei Verwendung von  $\Gamma_2$  auch von  $r_a$ , der aktiven Länge des Umformers, abhängig. Es sind dies keine einfachen Funktionen. Im folgenden sind zwei durchgerechnete Beispiele graphisch dargestellt.

1. Für punktförmig bei  $r = 1$  angreifende Umformer ( $\Gamma_1, \Gamma_3$ ).

In Figur 7 ist die relative Beschleunigungsempfindlichkeit  $E_b(0, L_1)/E_b(0, 0)$  in Funktion von  $L_1$  ( $L_3 = 0$ ;  $\omega = 0$ ;  $v_1, \dots, v_n = \text{const}$ ) dargestellt.

Tabelle 1

Die möglichen Funktionstypen für die verschiedenen Empfindlichkeiten und Umformer

	$\Gamma_1, \Gamma_2$	$\Gamma_3$
$E_w$	$\omega^2 \Omega_n$ $\approx \text{const}$ für $\omega \gg v_n$	$i \omega^3 \Omega_n$
$E_v$	$\omega \Omega_n (\varepsilon \neq 0)$ $\approx \text{const}$ für $\omega \approx v_n$	$i \omega^2 \Omega_n$ $\approx \text{const}$ für $\omega \gg v_n$
$E_b$	$\Omega_n$ $\approx \text{const}$ für $\omega \ll v_n$	$i \omega \Omega_n (\varepsilon \neq 0)$ $\approx \text{const}$ für $\omega \approx v_n$

2. Für Umformer, die durch  $\Gamma_2$  erfasst werden.

Mit  $v = \sqrt{E/\rho}$  erhält man für  $E_b(0)$ :

$$E_b(0) = \frac{e_2 \sqrt{3}}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{K}_n G_n^-}{\alpha_n v_n},$$

$$\bar{K}_n = \int_0^1 u_n(r) dr + L_1 u_n(1), \quad \bar{G}_n = B_n \frac{S_n(1) S_n(r_a) + C_n(1) c_n(r_a)}{C_n(1) r_a}.$$

In Figur 8 ist die relative Empfindlichkeit  $E_b(0, r_a, L_1)/E_b(0, r_a, 0)$  in Funktion von  $r_a$  für verschiedene Werte von  $L_1$  ( $L_3 = 0$ ) als Parameter eingetragen.

Zur Definition des neutralen Punktes geht man von der Annahme aus, daß der Schwinger sei mit dem Koordinatensystem  $S_5$  mit der  $x_5$ -Achse als Stabachse ( $x_5 = 0$  bis  $x_5 = l$ ) und der  $(x_5, y_5)$ -Ebene als Schwingungsebene starr verbunden.

Das System  $S_5$  soll aus dem System  $S_4$  durch eine Parallelverschiebung in Richtung der  $x_4$ -Achse um den Betrag  $d_0$  ( $d_0 = d_{4x}$ ) hervorgehen. Somit ist

$$x_4 = x_5 - d_0, \quad y_4 = y_5, \quad z_4 = z_5.$$

Die Beschleunigung sei

$$b_{5x} = b_{5z} = 0, \quad b_{5y} = (x_5 - d_0) \ddot{\chi} = (d_0 - x_5) \chi_0 \omega^2 e^{i\omega t}.$$

Damit erhält man für  $V_s$  ( $l \ d = d_0$ )

$$V_s = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \chi_0 \Gamma_n e^{i\omega t} u_n(r)}{r^2 - \omega^2} \left( \int_0^1 (d-r) u_n(r) dr - (d-1) L_1 u_n(1) \right).$$

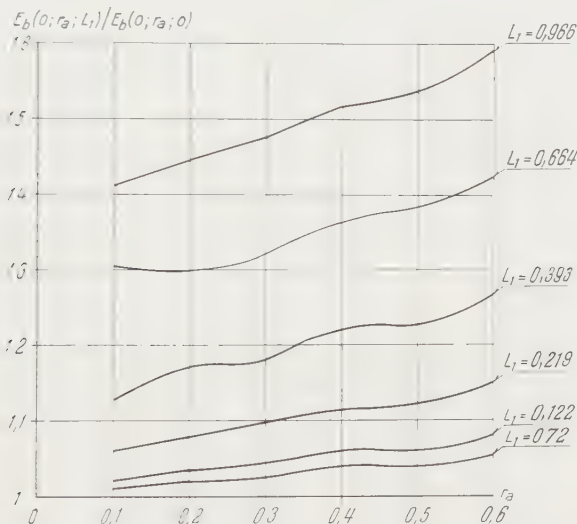


Fig. 8

Relative Empfindlichkeit  $E_b(0, r_a, L_1) / E_b(0, r_a, 0)$  in Funktion der aktiven Länge  $r_a$  des Umformers für verschiedene Parameterwerte  $L_1$  ( $L_3 = 0$ ).

Hat die Gleichung

$$V_s = 0 \quad (\text{für alle } t\text{-Werte}), \quad (15)$$

die eine Bestimmungsgleichung für  $d$  ist, eine reelle Lösung, wie gezeigt werden soll, so bedeutet dies, dass auf der Stabachse insofern ein ausgezeichnete Punkt (neutraler Punkt) existiert, als durch die Verlegung des Ursprungs des Systems  $S_4$  in diesen Punkt (Abstand von der Einspannstelle des Stabes  $= d_0$ ) die Beschleunigungen infolge der Drehbewegungen des Systems  $S_4$  eliminiert werden.

Die Bedeutung dieses Punktes ergibt sich aus folgender einfacher Überlegung: Der Schwinger sei mit dem Koordinatensystem  $S_4$  mit der  $x_4$ -Achse als Stabachse ( $x_4 = l_1$  bis  $x_4 = l_1 + l$ ) und der  $(x_4, y_4)$ -Ebene als Schwingungsebene

starr verbunden, und die Beschleunigung sei  $b_{4y} = (l_1 + lr) \ddot{\chi}$  ( $0 \leq r < 1$ ) oder umgeformt,

$$b_{4y} = l(\bar{l}_1 + r) \ddot{\chi} = l(l_1 + d - d + r) \ddot{\chi}, \quad (l l_1 = l_1).$$

Laut Definition des neutralen Punktes (15) ergibt die Beschleunigung  $l(-d + r) \ddot{\chi}$  keinen Beitrag zur Ausgangsspannung  $V_s$ , oder die von  $r$  abhängige Beschleunigung  $l(\bar{l}_1 + r) \ddot{\chi}$  kann durch diejenige des neutralen Punktes nämlich  $l(\bar{l}_1 + d) \ddot{\chi}$ , ersetzt werden.

Setzt man analog

$$d_n = \frac{\int_0^1 r u_n(r) dr + L_1 u_n(1)}{\int_0^1 u_n(r) dr + L_1 u_n(1)},$$

$$E_{b_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma_m e^{i\omega t}}{v_n^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega} \left( \int_0^1 u_n(r) dr + L_1 u_n(1) \right)$$

( $d_n$  = Abstand des neutralen Punktes und  $E_{b_n}$  = Beschleunigungsempfindlichkeit der  $n$ -ten Partialschwingung), so folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \omega^2 \chi_0 \Delta d_n E_{b_n} e^{i(\omega t - \vartheta_{b_n})} = 0,$$

$$\Delta d_n = d - d_n,$$

das heisst den Beitrag jeder Partialschwingung kann man als Beitrag eines Federpendels (+ Umformer) mit der Beschleunigungsempfindlichkeit  $E_{b_n}$  und der Ausgangsspannung  $V_n$  ( $V_s = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ ), das im Abstand  $\Delta d_n$  vom neutralen Punkt des Seismometers eingesetzt wird, auffassen (Schwingungsrichtung parallel Arbeitsrichtung). Somit stellt die Gesamtheit dieser Federpendel (+ Umformer) in Reihenschaltung ein einfaches Ersatzschema des Seismometers dar.

Wie aus Gleichung (15) ersichtlich, ist die Lage des neutralen Punktes eine Funktion von  $\omega$ . In Figur 9 ist der Abstand  $d$  ( $L_1 = 0, L_3 = 0, \Gamma_1, \varepsilon = 0$ ) in Funktion von  $\omega/\nu_1$  aufgetragen.

In Figur 10 ist ebenfalls der Abstand  $d$  für den Fall  $L_1 = 0, L_3 = 0, \Gamma_2, \varepsilon = 0$  in Funktion von  $\omega/\nu_1$  für verschiedene Parameterwerte  $r_a$  dargestellt. Für die optimale Länge  $r_a$  (das heisst  $d$  nahezu konstant) ergibt sich 0,44 (lineare Interpolation).



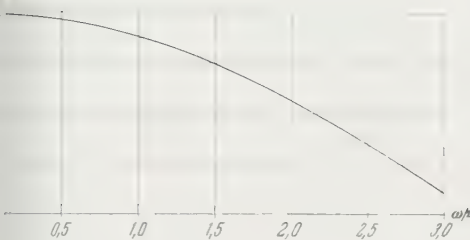


Fig. 9

Der Abstand  $d$  des neutralen Punktes von der Einspannstelle des Stabes in Funktion von  $\omega/v_1$  ( $L_1 = 0, L_3 = 0, I_1, \varepsilon = 0$ ).

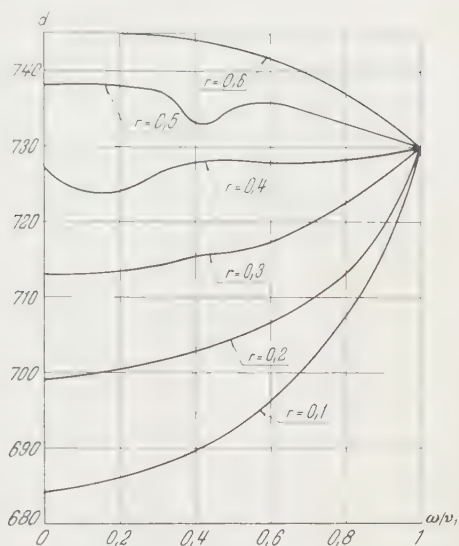


Fig. 10

Der Abstand  $d$  des neutralen Punktes für den Fall  $L_1 = 0, L_3 = 0, I_1, \varepsilon = 0$  und für verschiedene Parameterwerte  $r_a$  (optimaler Wert von  $r_a = 0,44$ ).

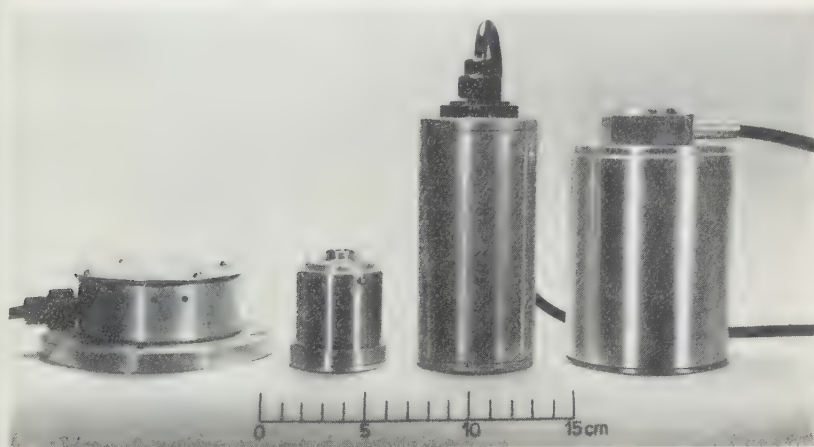


Fig. 11

Vier nach der vorstehenden Theorie gebaute und geeichte Seismometer.

## § 6. Die elektronischen Vergrößerungssysteme

Die Verstärker haben zwei Aufgaben. Sie dienen einerseits zur Anpassung des Seismometers an das Registriergerät und liefern andererseits bei Verwendung von geeigneten Schaltungen, als Rechenggeräte, einen Beitrag zur Auswertung der aufgenommenen Erschütterungen. Ihr Aufbau ist somit im wesentlichen vorgezeichnet. Sie bestehen je aus einem Vor- und Endverstärker und einem Zwischenverstärker als Rechenggerät.

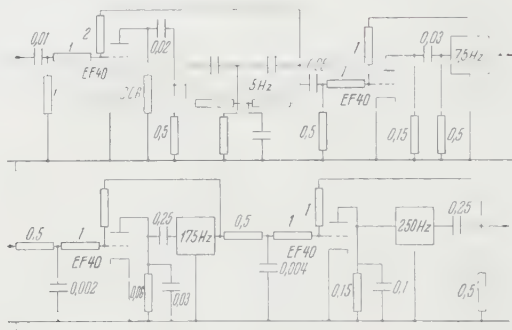


Fig. 12

Schaltschema eines RC-Bandfilters. Die Werte der Schaltelemente sind in  $\mu\text{F}$  bzw.  $\text{M}\Omega$  angegeben.

Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe (§ 1) benötigt man als Rechelemente differenzierende und integrierende Vierpole [20] und Bandfilter. Ihre funktionelle Bedeutung ist in den §§ 7 und 8 dargelegt.

Die Bandfilter werden entweder zur Begrenzung des Frequenzbandes und damit zur Verbesserung des Störpegels oder zur spektralen Zerlegung von Signalen (zum Beispiel Fourier-Analyse) verwendet. Für die Erschütterungsmesstechnik sind, trotz ihrer relativ kleinen Kreislage, Bandfilter auf der Grundlage von rückgekoppelten RC-Filtern sehr geeignet. Als Vorteile sind ihr relatives kleines Gewicht, ihr geringer Platzbedarf sowie ihr einfacher Aufbau und ihre kleine Störanfälligkeit anzuführen.

Eine allgemeine Theorie der RC-Bandfilter, die etwa mit der Theorie von W. CAUER [3] für verlustfreie LC-Filter vergleichbar wäre, gibt es noch nicht. Sie dürfte auch wesentlich schwieriger sein.

Das in Figur 12 wiedergegebene Schaltschema ist daher als ein Beispiel zu betrachten und wurde «halb theoretisch, halb experimentell» gefunden. Die Figur 13 zeigt die gemessene Frequenzkennlinie. Die erste und zweite Stufe bilden die untere (Hochpass) und die dritte und vierte Stufe die obere Flanke (Tiefpass).

Auf eine eingehende Beschreibung der Vergrößerungssysteme kann in Anbetracht der ausgedehnten Fachliteratur [17], [20] verzichtet werden.

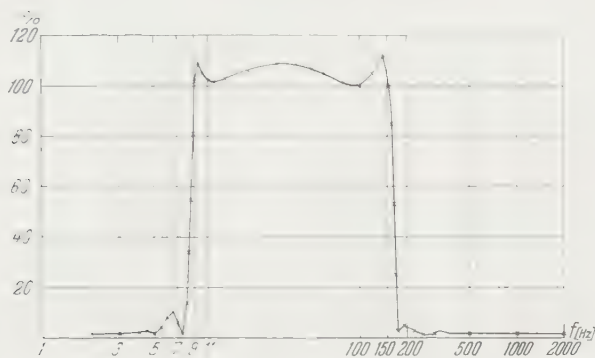


Fig. 13

Die gemessene Frequenzkennlinie des in Figur 12 dargestellten RC-Bandfilters  
(Durchlass für 100 Hz = 100%).

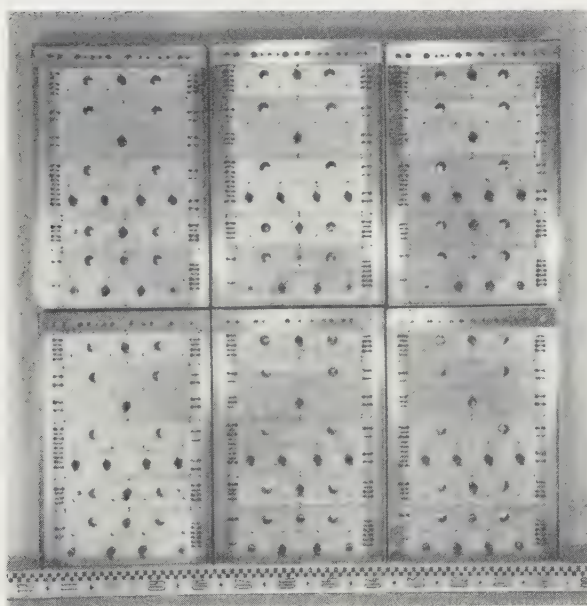


Fig. 14

Der elektronische Teil eines nach der vorstehenden Theorie gebauten  
6-Kanal-Vergrößerungssystems.

## § 7. Das Schema des exakten Seismographen

Die allgemeine Seismometergleichung (13) kann, gestützt auf das im § hergeleitete Ersatzschema, mit

$$V_s = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \quad (16)$$

als Lösung des Gleichungssystems

$$A_{m,n} V_n = -e_m b_n \quad (m = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

aufgefasst werden.  $b_n$  ist die Beschleunigung des neutralen Punktes des  $n$ -ten Federpendels.

Die linearen Operatoren haben zum Beispiel für  $m = 1$  folgende Form:

$$A_{1,n} = \frac{d^2}{dt^2} + \varepsilon \frac{d}{dt} + \eta_n^2.$$

Für das lineare Vergrößerungssystem gilt, wenn der Lichtzeigerausschlag mit  $a$  bezeichnet wird, die Gleichung

$$\Phi_1 a = \Phi V_s \quad (18)$$

mit

$$\Phi_j = a_{j0} + a_{j1} \frac{d}{dt} + \dots + a_{jn_j} \frac{d^{n_j}}{dt^{n_j}}. \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Soll nun auf dieser Grundlage ein exakter Seismograph, das heisst ein Seismograph, der nach Erreichung des stationären Zustandes des Vergrößerungssystems alle zur Aufzeichnung gelangenden Erschütterungen amplituden- und phasenrein vergrößert (man vergleiche [6]), aufgebaut werden, so ist folgende Aufgabe zu lösen: Bei gegebenem Seismometersignal  $V_s$  sind die Operatoren  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  so zu bestimmen und elektronisch darzustellen, dass zwischen  $a$  und  $b_n$  – sie sind gegenseitig, wie aus dem Ersatzschema hervorgeht, durch einfache Operationen verbunden – folgende Gleichung zu Recht besteht ( $\mu$  – Vergrößerungsfaktor des Vergrößerungssystems)

$$a = -\mu e_m b_n.$$

Mit Rücksicht auf die relativ kleine Bandbreite der Erschütterungen ist eine Näherungslösung, deren Gültigkeit auf die Umgebung einer Eigenfrequenz des Seismometers (vorwiegend Grundfrequenz) beschränkt ist, völlig ausreichend. Damit ergibt sich näherungsweise aus den Gleichungen (16), (17) und (18) für die Differentialgleichung des Seismographen

$$\Phi_1 A_{m,n} V_s = -\Phi_2 e_m b_n$$

und aus dieser Gleichung, wie man leicht erkennt, für die Operatoren  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ :

$$\Phi_1 = a \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \mu A_{m,n} V_s$$

oder

$$a = \mu A_{m,n} V_s.$$

Die elektronische Realisierung dieses Vergrößerungssystems ist unter den gemachten Voraussetzungen einfach. Es besteht zum Beispiel für  $m = 1$  aus einem Vorverstärker, drei getrennten Zwischenverstärkern mit den Übertragungsoperatoren

$$\mu'_2 \gamma_n^2, \quad \mu'_2 \varepsilon \frac{d}{dt} \quad \text{und} \quad \mu'_2 \frac{d^2}{dt^2},$$

einem Bandfilter § 6, einem Endverstärker und einem Registriergerät, zum Beispiel K. O. In *praxi* erzielt man die richtige Einstellung der Zwischenverstärker, indem man die Verstärkung der einzelnen Verstärker variiert, bis die freien Seismometerschwingungen keinen Lichtzeigerausschlag mehr ergeben. Die Bandbreite des Filters ist durch die zulässige lineare Amplituden- und Phasenverzerrung [23] festgelegt.

Für ein Seismometer mit einem Federpendel als Schwinger (Spezialfall c, § 4) ergibt das vorgezeichnete Schema eine exakte Lösung.

## § 8. Die Messung von $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ mit Hilfe eines elektronischen Kombinationsseismographen

Für die Beschleunigung  $b\{b_{4x}, b_{4y}, b_{4z}\}$  gilt allgemein [23]:

$$b_{4x} = R_1 + x_4 R_{11} + y_4 R_{12} + z_4 R_{13},$$

$$b_{4y} = R_2 + x_4 R_{21} + y_4 R_{22} + z_4 R_{23},$$

$$b_{4z} = R_3 + x_4 R_{31} + y_4 R_{32} + z_4 R_{33};$$

$x_4, y_4$  und  $z_4$  sind jeweils die Koordinaten des neutralen Punktes.

Die Vergrößerungssysteme seien so beschaffen, dass

1. ein exakter Kombinationsseismograph entsteht, das heisst jede beliebige Kombination von Seismometer und Vergrößerungssystem einem exakten Seismographen entspricht ( $\mu_j = \mu = \text{const}$ ) und

2. die Bandfilter der einzelnen Vergrößerungssysteme gegenseitig lückenlos abgestuft sind. Die Anzahl der Vergrößerungssysteme ist daher durch die Feinheit der Unterteilung der Bandbreite der Erschütterungen gegeben.

Mit diesen Vergrößerungssystemen und einem oder zwei oder  $n + m$  Seismometern können nun folgende Grössen, spektral zerlegt, gemessen werden.



a) *Mit einem Seismometer.* Man verlegt den neutralen Punkt des Seismometers in den Ursprung des Koordinatensystems  $S_4$  ( $x_4 = y_4 = z_4 = 0$ ) und erhält, wenn die Arbeitsrichtung zum Beispiel parallel zur  $x_4$ -Achse ist,

$$R_1 = - \frac{1}{\mu e_m} a_1$$

und entsprechend allgemein (Schema I)

$$R_k = - \frac{1}{\mu e_m} a_k. \quad (k = 1, 2, 3)$$

b) *Mit zwei Seismometern.* Man verlegt den neutralen Punkt des einen Seismometers in den Ursprung des Koordinatensystems  $S_4$  ( $x_4 = y_4 = z_4 = 0$ ) und den des andern zum Beispiel auf die  $x_4$ -Achse im Abstand  $x_4$  und erhält, wenn beide Arbeitsrichtungen zum Beispiel parallel zur  $z_4$ -Achse und die Signalspannungen in einer Differenzschaltung vereinigt sind,

$$R_{31} = - \frac{1}{\mu e_m x_4} a_{31}$$

und entsprechend allgemein (Schema II)

$$R_{kj} = - \frac{1}{\mu e_m x_4} a_{kj}, \quad (k = 1; j = 1, 2, 3)$$

$$R_{kj} = - \frac{1}{\mu e_m y_4} a_{kj}, \quad (k = 2; j = 1, 2, 3)$$

$$R_{kj} = - \frac{1}{\mu e_m z_4} a_{kj}. \quad (k = 3; j = 1, 2, 3)$$

c) *Mit  $n + m$  Seismometern.* Mit analogen Anordnungen kann man allgemein folgende Grösse messen:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^2 h_{kj} R_{kj} + \sum_{k=1}^n h_k R_k.$$

Mit  $3 \times 2$  Seismometern erhält man zum Beispiel  $\dot{\psi}^2$  oder  $\dot{\varphi}^2$  oder  $\dot{\chi}^2$ .

Die Messung bzw. Bestimmung von  $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dots, \dot{\zeta}$  mit maximal zwei Seismometern und zum Beispiel mit Hilfe der Lagekoordinaten  $\psi, \varphi$  und  $\chi$ .

Es ist daher [§ 3, (1)]

$$R_1 = \ddot{\xi} + \ddot{\eta} \chi - \ddot{\zeta} \varphi = g \varphi, \quad R_2 = -\ddot{\xi} \chi + \ddot{\eta} \dots \quad R_3 = \ddot{\xi} \varphi \dots$$

$$R_{11} = -\dot{\chi}^2 - \dot{\varphi}^2 \text{ usw.}$$

α) *In erster Näherung.* In erster Näherung setzt man  $\dot{\psi} = \dot{q} = \dot{\chi} = 0$  (reine Translationsbewegungen) und misst nach Schema I  $R_k$  für  $k = 1, 2, 3$  und erhält

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{e_m \mu} a_1, \quad \dot{\eta} = -\frac{1}{e_m \mu} a_2, \quad \dot{\zeta} = -\frac{1}{e_m \mu} a_3$$

und durch Integration

$$\xi = -\frac{1}{e_m \mu} \int a_1 dt, \quad \eta = \dots, \quad \zeta = -\frac{1}{e_m \mu} \int \int a_1 dt^2, \quad \eta = \dots$$

Die Integration kann auch elektronisch durchgeführt werden (siehe ferner Spezialfälle § 5).

β) *In zweiter Näherung.* In zweiter Näherung setzt man alle quadratischen Glieder, wie zum Beispiel  $\dot{\chi}^2$  oder  $\ddot{q} \psi$ , gleich Null und misst nach Schema I  $R_k$  für  $k = 1, 2, 3$  und nach Schema II  $R_{kj}$  zum Beispiel für  $k = 1, j = 3$  und  $k = 3, j = 2$  und erhält:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - g \varphi &= -\frac{1}{e_m \mu} a_1, & \ddot{\eta} + g \psi &= -\frac{1}{e_m \mu} a_2, & \ddot{\zeta} &= -\frac{1}{e_m \mu} a_3 \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{1}{e_m \mu z_4} a_{13}, & \ddot{\psi} &= -\frac{1}{e_m \mu y_4} a_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Aus diesem Gleichungssystem ergibt sich für  $\ddot{\xi}$ ,  $\ddot{\eta}$  und  $\ddot{\zeta}$ :

$$\ddot{\xi} = -\frac{1}{e_m \mu} \left( a_1 + \frac{g}{z_4} \int \int a_{13} dt^2 \right), \quad \ddot{\eta} = -\frac{1}{e_m \mu} \left( a_2 - \frac{g}{y_4} \int \int a_{32} dt^2 \right),$$

$$\ddot{\zeta} = -\frac{1}{e_m \mu} a_3$$

und durch Integration  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$ , ...,  $\dot{\zeta}$ .

Die Auflösung des Gleichungssystems (19) kann, sofern zwei Kombinationsseismographen gleichzeitig verwendet werden, auch vollständig elektronisch durchgeführt werden.

γ) *In dritter Näherung.* In dritter Näherung vernachlässigt man  $\ddot{\eta} \chi = \ddot{\zeta} \varphi$ ,  $-\ddot{\xi} \chi + \ddot{\zeta} \psi$  gegenüber  $-g \varphi$ ,  $g \psi$  und misst nach Schema I  $R_k$  für  $k = 1, 2, 3$  und nach Schema II  $R_{kj}$  für  $k = 2, j = 1$ ;  $k = 3, j = 1$ ;  $k = 3, j = 2$ ;  $k = 1, j = 1$ ;  $k = 2, j = 2$ ;  $k = 3, j = 3$  und  $k = 1, j = 2$  und erhält:

$$\ddot{\xi} - g \varphi = T_1, \quad \ddot{\eta} + g \psi = T_2, \quad \ddot{\xi} \varphi - \ddot{\eta} \psi = \ddot{\zeta} = T_3, \quad \ddot{\chi} - \ddot{\varphi} \psi = T_{21},$$

$$\ddot{\chi} \psi - \ddot{\varphi} = T_{31}, \quad -\ddot{\chi} \varphi - \ddot{\psi} = T_{32}, \quad \dot{\chi}^2 - \dot{\varphi}^2 = T_{11}, \quad \dot{\chi}^2 - \dot{\psi}^2 = T_{22},$$

$$\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 = T_{33}, \quad -\ddot{\chi} + \ddot{\varphi} \psi + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} = T_{12}.$$

Dieses Gleichungssystem ergibt für  $\psi$  mit  $1 \pm \psi^2 \cong 1$  die Gleichung

$$T_{21} \psi + T_{31} + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\dot{T}_{11} + \dot{T}_{33} - \dot{T}_{22}}{T_{12} + T_{21}} \sqrt{T_{33} + T_{22} - T_{11}} = 0.$$

Aus  $\psi$  gewinnt man  $\varphi$  mit Hilfe der Gleichung

$$\varphi = (\ddot{\psi} - T_{32}) \frac{1}{T_{21}} - \frac{1}{T_{31}} \psi.$$

Setzt man  $\psi$  und  $\varphi$  in die Gleichungen für  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  ein, so ergibt sich  $\ddot{\xi}$ ,  $\ddot{\eta}$  und  $\ddot{\zeta}$  durch Auflösung dieses Gleichungssystems und  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$ , ...,  $\zeta$  durch Integration.

Diese Integration dürfte im allgemeinen rechnerisch nicht gelingen und daher zum Beispiel mit einem Tischintegranten durchzuführen.

δ) *In vierter Näherung.* Die vierte Näherung wird durch  $R_k$  und  $R_{kj}$  dargestellt. Die in der dritten Näherung für  $\psi$  und  $\varphi$  bestimmten Werte können unverändert übernommen werden. Die Lagekoordinate  $\chi$  kann, da sie in den  $R$  nirgends auftritt, ohne Integration nicht ermittelt und daher die Bestimmung von  $\ddot{\xi}$ ,  $\ddot{\eta}$  und  $\ddot{\zeta}$  nicht allgemein durchgeführt werden.

Die vollständige Lösung, das heisst die Bestimmung von  $\xi(\tau, t)$ , ... ergibt sich durch systematische Abtastung des Messobjektes.

## § 9. Fehlerrechnung

Die zur vorstehenden Theorie führenden Annahmen sind *in praxi* teilweise nur näherungsweise erfüllt oder erfüllbar. Die dadurch bedingten Abweichungen sollen als Fehler bezeichnet werden.

a) Die Einzelmasse am freien Stabende des Schwingers wurde als punktförmig angenommen (§ 4). Bezeichnet man die Trägheitsmomente der Einzelmasse mit  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  und  $\Theta$ , wobei

$$\Theta_1 = \sum_M (x_4 - l)^2 dm, \quad \Theta_2 = \sum_M y_4^2 dm, \quad \Theta = \Theta_1 + \Theta_2$$

ist, so erhält man für  $r = 1$  an Stelle der Randbedingungen (7) die Randbedingungen:

$$L_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon L_1 \frac{\partial w}{\partial t} + L_3 w - H \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} = H G_1, \quad L_2 \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial t^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = H G_2,$$

$$L_2 = \frac{\Theta H l}{I E}, \quad G_2 = \frac{l}{I E} (-\Theta_1 R_{21} + \Theta_2 R_{12}).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

1. Das Seismometer ist in der Arbeitsrichtung und in der Richtung der Stabachse ( $\Theta_2 R_{12}$ ) empfindlich.
2. Ist  $\Theta_2$  klein, so muss, damit die Einzelmasse relativ zum Stab noch als starr angenommen werden kann, auch  $\Theta_1$  klein sein.

3. Ist  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  bzw.  $\Theta$  klein, so muss, konsequenterweise, in der Differentialgleichung (5) des Schwingers auch der Trägheitswiderstand der Drehbeschleunigung mit berücksichtigt werden. Dies ergibt asynchrone Stabschwingungen, und damit wäre eine Auswertung der Messergebnisse praktisch unmöglich.

Ein Seismometer ist daher zur Messung in zweiter oder höherer Näherung nur dann geeignet, wenn

$$\Theta_1 \approx \Theta_2 \approx 0$$

oder

$$I_{\Sigma} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial t^2 \partial \theta} \approx H G_2 \approx 0$$

ist.

b) In § 3 wurde angenommen, die Beschleunigung  $b$  sei unabhängig von den kleinen Auslenkungen des Schwingers aus seiner Ruhelage relativ zum Gehäuse. Ist zum Beispiel die Arbeitsrichtung eines Seismometers parallel zur  $z_4$ -Achse und sind  $x_4, 0, 0$  die Koordinaten des neutralen Punktes, so lautet im Spezialfall (§ 4, c) die Differentialgleichung des Schwingers:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \varepsilon \frac{dw}{dt} + \nu^2 w = -R_3 - x_4 R_{31}. \quad (20)$$

Berücksichtigt man die Relativbewegung des Schwingers, so geht die Gleichung (20) über in

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \varepsilon \frac{dw}{dt} + (\nu^2 + R_{33}) w = -R_3 - x_4 R_{31}. \quad (21)$$

Allgemein ist  $\nu^2$  durch  $\nu^2 + R_{jj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) zu ersetzen. Dies bedeutet, dass die Annahme in erster oder zweiter Näherung exakt erfüllt ist.

Zur Messung in dritter oder vierter Näherung ist notwendig, dass

$$R_{jj} \ll \nu^2$$

oder, da  $R_{jj} \sim \omega^2$  ist,

$$\omega^2 \ll \nu^2$$

ist, das heisst, es sind Beschleunigungsmesser erforderlich.

Der Einfluss des Terms  $R_{33} w$  entspricht einer Modulation und ist nach dem Verfahren der aufeinanderfolgenden Verbesserungen in [22] berechnet.

Es sei noch beigefügt, dass Schwinger, die durch die Differentialgleichung vom Typus (21) beherrscht werden, im allgemeinen instabile Bereiche haben können.

Formal analoge Verhältnisse entstehen zum Beispiel auch bei einem Horizontalpendel, dessen Aufhängepunkt vertikale Schwingungen ausführt [13], [19] oder bei einem Schwinger, der senkrecht zur Arbeitsrichtung beschleunigt wird [16].

c) Der Schwinger wurde als linear elastisch angenommen.

Wird bei der Herleitung der Differentialgleichung (5) die Krümmung in zweiter Näherung berücksichtigt, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} - \frac{3}{2} H \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] = F'_1 e^{i\omega t}.$$

Als Mass für nichtlineare Verzerrungen wurde in [23] der Klirrfaktor  $F$  eingeführt.

In erster Näherung ist:

$$\Gamma \cong \frac{\bar{K}_1}{K_1} \cdot \frac{\sqrt{(v_1^2 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}}{\sqrt{[v_1^2 - (3\omega)^2]^2 + \varepsilon^2 (3\omega)^2}}$$

$$K_1 = \int_0^1 F_1' dr + g_1' u_1(1), \quad \bar{K}_1 = \frac{3}{2} H e^{-3i\omega t} \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] u_1 dr.$$

Zum Schlusse möchte ich Herrn Prof. Dr. F. GASSMANN für das grosse Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, sowie für viele Anregungen und Diskussionen herzlichst danken. Ebenso bin ich den Herren R. BERGER, Feinmechaniker, und M. DIETIKER, Radiomonteure, die mich beim Aufbau des Seismographen tatkräftig unterstützt haben, zu Dank verpflichtet.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ARNOLD, H., *Gerlands Beitr. Geophys.* 10, 269 (1910).
- [2] BERNSTEIN, N., *Analyse aperiodischer trigonometrischer Reihen*, Z. angew. Math. Mech. 7, 476-485 (1927).
- [3] CAUER, W., *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*, Bd. 1 (Akademische Verlags-Gesellschaft Becker & Erler, Leipzig 1941).
- [4] DAWKINS, ESPY., *Design Curves for Parallel-T Network*, Electronics 21, 114-115 (1948).
- [5] EHLERT, R., *Zusammenstellung, Erläuterung und kritische Beurteilung der wichtigsten Seismometer mit Berücksichtigung ihrer praktischen Verwendbarkeit*, Gerlands Beitr. Geophys. 3, 350 (1898).
- [6] GALITZIN, B., *The Principles of Instrumental Seismology* (St. Petersburg 1912), S. 344.
- [7] GASSMANN, F., *Zur Bestimmung von Bodenbewegungen aus Registrierung von Schwingungsmessern und Seismographen*, Festschrift SIA. der Eidgenössischen Hochschule, Zürich (1937).
- [8] GASSMANN, F., *Zur Theorie der Schwingungsmesser*, Beitr. Geophys. 1, 1-19 (1938).
- [9] GASSMANN, F., *Über mechanische Empfänger von Seismographen und Schwingungsmessern*, Arch. Meteorol., Geophys. Bioklimat. 3, H. 5 (1951).
- [10] HORT, W., *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs* (Springer, Berlin 1927).
- [11] JOOS, G., *Lehrbuch der theoretischen Physik* (Akademische Verlags-Gesellschaft Becker & Erler, Leipzig 1939).
- [12] KAMKE, E., *Differentialgleichungen* (Akademische Verlags-Gesellschaft Becker & Erler, Leipzig 1942).
- [13] KANAI, K., und SEZAWA, K., *On the Problem of Instabilities of Higher Order in a Seismometer*, Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 18, 483-496 (1940), 19, 9-13, 177-184 (1941).
- [14] KNESER, A., *Belastete Integralgleichungen*, Rend. Circ. mat. Palermo 3, 169-197 (1914).
- [15] MADELUNG, E., *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers* (Springer, Berlin 1936).



- [16] METTLER, E., *Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsiallast*, Mitt. Gutehoffnungshütte 8, H. 1, 4 (1940).
- [17] MÖLLER, H. G., *Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenz-technik* (Springer, Berlin 1940).
- [18] POMERANTZEFF, H., C. r. Comm. Sis. perm. 2, Livr. 1, 53 (1905).
- [19] SUYEHIO, K., Proc. Imp. Acad. 3, 143 (1927) und 4, 597 (1928).
- [20] STRUTT, M. J. O., *Verstärker und Empfänger* (Springer, Berlin 1943).
- [21] THIESSEN, G. J., *R-C Filter Circuits*, J. Acoust. Soc. Amer. 16, Nr. 4, 275–279 (1945).
- [22] WAGNER, K. W., *Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen* (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947).
- [23] WEBER, M., *Beitrag zur Messung von Erschütterungen*, Promotionsarbeit ETH. (Zürich 1949) und Helv. phys. Acta 22, 425–456 (1949).
- [24] WEBER, M., *Eine neue Erschütterungsmessapparatur und ihre Anwendung*, Schweiz. Arch. Nr. 5, 129–139 (1951).
- [25] WEILER, A., *Ein Beitrag zur kritischen Betrachtung der Schwingungsmessgeräte für den Maschinenbau*, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt (1939).
- [26] WIECHERT, E., *Theorie der automatischen Seismographen* (Weidemannsche Buchhandlung, Berlin 1903).

### Summary

The basic principles of vibration measurements and their applications are briefly discussed followed by the development of a new method. The essential features of a combination-seismograph and the operation of its several parts are outlined. A general seismometer equation is developed and applied to the study of various types of practicable seismometers. The theoretical concept of the construction of a precise seismograph is then worked out, and a description is given of its practical realization in the form of a precise combination-seismograph. A discussion of errors of the new method of measuring mechanical vibrations finishes the paper.

(Eingegangen: 17. Juni 1952.)

---

### Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

## Zum Verteilungsgesetz der Tropfengrößen bei der Zerstäubung

Von HANS A. TROESCH, Strengelbach, und PETER GRASSMANN, ETH., Zürich

Bei der Zerstäubung fällt immer ein Gemisch von Tropfen sehr verschiedener Größen an. Von verschiedenen Seiten wurde darauf hingewiesen, dass die Zahl der Tropfen in den einzelnen Größenklassen – das Verteilungsgesetz – wahrscheinlich statistischen Ursprungs sei [MEHLING<sup>1</sup>], LEWIS<sup>2</sup>].

<sup>1</sup>) H. MEHLING, *Zur Physik der Brennstoffstrahlen in Dieselmotoren*, ATZ., H. 16, 411–421 (1934) (Auszug aus Dissertation).

<sup>2</sup>) H. C. LEWIS, D. G. EDWARDS, M. J. GOGLIA, R. I. RICE und L. W. SMITH, *Atomization of Liquids in High Velocity Gas Streams*, Ind. Eng. Chem. 40, Nr. 1, 67–74 (1948).

Um aber mit den Methoden der klassischen Statistik, die zum Beispiel zu dem Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz führen, auch hier zu eindeutigen Ergebnissen zu gelangen, bedarf es zweier Erhaltungssätze. Sie entsprechen jenen, die auch dort als Grundlage dienen: Die Sätze von der Erhaltung der Masse und der Gesamtenergie. Der erste ist auch für die Zerstäubung, soweit man die Verdunstung absieht, unmittelbar gegeben. Natürlich gilt für die Zerstäubung auch der Energieerhaltungssatz. Aber er nützt zunächst wenig, denn von der Energie, welche der zu zerstäubenden Flüssigkeit primär zugeführt wird, verwandelt sich bekanntlich der überwiegende Teil in Wärme. Nur ein ganz geringer, vornehmlich nicht angegebbarer Bruchteil, erscheint schliesslich als Oberflächenenergie des Tropfengemisches.

Zur Umwandlung der dem System primär zugeführten Energie in Wärme darf es aber einer gewissen Zeit. Gerade bei hochwertigen Zerstäubertypen muss sich das schliesslich erhaltene Tropfengemisch in sehr kurzer Zeit ausbilden: Der zu zerstäubenden Flüssigkeit wird eine hohe Relativgeschwindigkeit zum umgebenden Gas erteilt, wobei grössere Tropfen durch die an ihrer Stirnfläche auftretenden hohen Staudrücke aufgebläht und zerrissen werden, ein Vorgang, der sich beim im Erdfeld frei fallenden Tropfen in Bruchteilen einer Sekunde abspielt. Bei den wesentlich höheren Relativgeschwindigkeiten, wie sie für die Zerstäubung in Frage kommen, dürfte er aber in einem viel kürzeren Zeitraum ablaufen, zum Beispiel bei einem Wassertropfen von  $70 \mu$  Durchmesser in  $2,5 \cdot 10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  s. Nach dieser Aufteilung muss das Tropfengemisch möglichst rasch in einen Raum kleinerer Tropfendichte übergeführt werden; denn durch die Abbremsung am umgebenden Gas verringert sich rasch die hohe Relativgeschwindigkeit, dass durch Zusammentreffen mehrerer Tröpfchen wieder grössere Tropfen entstehen könnten. Das in einem Raum hoher Relativgeschwindigkeit ausgebildete Verteilungsgleichgewicht auf die einzelnen Grössenklassen muss also so schnell wie möglich «eingefroren» werden. In den für die Ausbildung der Verteilungsfunktion massgebenden sehr kurzen Zeiten wird also im wesentlichen eine Umwandlung von kinetischer Energie in Oberflächenenergie und umgekehrt stattfinden, wobei sich ein Gleichgewichtszustand zwischen diesen beiden Energiebeträgen einstellt. Erst nach Einstellung des Gleichgewichts verwandelt sich dann die noch vorhandene kinetische Energie über Reibungsvorgänge in Wärme. Nach diesem Bild des Zerstäubungsvorgangs wird also ein für jeden Zerstäubertyp charakteristischer Bruchteil der primär dem System zugeführten Energie als gesamte Oberflächenenergie schliesslich im Tropfengemisch enthalten sein. Dieser Bruchteil wird, mit anderen Worten, wie sich die Tropfen auf die einzelnen Grössen verteilen, ist durch die Gesetze der Statistik gegeben. Man kann also versuchen, in die statistische Behandlung des Zerstäubungsvorgangs die Konstanz der gesamten Oberflächenenergie des Tropfengemisches an Stelle der Konstanz der Gesamtenergie des Gasmisches der statistischen Mechanik einzuführen. Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen muss dann erweisen, ob dieser Ansatz eine günstige Näherung an die tatsächlichen Verhältnisse darstellt.

Im Gegensatz zu den Betrachtungen, die zum Maxwellschen Geschwindigkeitsgesetz führen, sind aber im Falle der Zerstäubung die möglichen Energiewerte nach unten begrenzt. Sehr grosse Tropfen, und diese entsprechen Zuständen mit niedriger Oberflächenenergie, sind instabil. Der Tropfen wird nämlich nur durch die Oberflächenspannung zusammengehalten, und der dadurch bedingte Druck wird relativ zu den übrigen am Tropfen angreifenden Kräften um so kleiner, grösser der Tropfen ist. Durch eine derartige Stabilitätsbetrachtung lässt sich, wie in einer späteren Arbeit noch im einzelnen dargelegt werden soll – für jeden Zerstäubungsvorgang eine maximale Tropfengrösse  $\Phi_{max}$  ableiten.

Auch nach oben sind die möglichen Energiewerte beschränkt, da sehr kleine Tropfen wegen ihres höheren Dampfdrucks instabil sind. Da ausserdem kleine Tropfen hohen Werten der Oberflächenenergie entsprechen, ist ihre Zahl im allgemeinen schon durch die Bedingung der Konstanz der Oberflächenenergie soweit erniedrigt, dass diese zusätzliche Grenze wenigstens für die bisher untersuchten Fälle keine wesentliche Bedeutung zu haben scheint. Sie wurde deshalb in der folgenden Betrachtung nicht berücksichtigt.

Tatsächlich gelangt man, wie von TROESCH gezeigt und später im einzelnen dargestellt werden soll, auf Grund dieser beiden Annahmen zu einem Verteilungsgesetz der Tropfengrösse bei der Zerstäubung, das die experimentellen Ergebnisse in besserer Weise wiederzugeben vermag als das bisher hierfür meist benützte Rosin-Rammlersche Gesetz.

Die Zahl  $dN$  aus der Gesamtzahl  $N$  der Moleküle, die sich im Tropfen mit einem Durchmesser zwischen  $\Phi$  und  $\Phi + d\Phi$  befinden, ist gegeben durch

$$dN = N \varphi(\Phi) d\Phi, \quad (1)$$

wobei  $\varphi(\Phi)$  eine zunächst noch unbekannte Funktion des Tropfendurchmessers ist.

Dabei sind die beiden Nebenbedingungen zu erfüllen:

$$\int dN = N, \quad (2)$$

$$\int \epsilon dN = E. \quad (3)$$

In ihnen ist jeweils von  $\Phi = 0$  bis  $\Phi = \Phi_{max}$  zu integrieren. Es bedeutet  $E$  die im Tropfengemisch insgesamt enthaltene Oberflächenenergie, während  $\epsilon$  die auf das Molekül eines Tropfens mit dem Durchmesser  $\Phi$  entfallende Oberflächenenergie darstellt. Ist  $\sigma$  die Oberflächenspannung und  $v$  das Volumen eines Moleküls, so wird  $\epsilon = 6 \sigma v / \Phi$ . Die Funktion  $\varphi(\Phi)$  ist dadurch gegeben, dass sie die unter Beachtung der beiden Nebenbedingungen wahrscheinlichste Verteilung der Moleküle auf die verschiedenen möglichen Tropfengrössen darstellt, also diejenige Verteilung, die die Zahl der Komplexionen zu einem Maximum macht. Durch die Methoden der klassischen Statistik gelangt man dann schliesslich zum Boltzmannschen Energieverteilungssatz in der Form

$$dN = \varphi(\Phi) d\Phi e^{\delta \epsilon} e^{\gamma} \quad (\delta \text{ und } \gamma \text{ Konstanten}). \quad (4)$$

Wenn die Zahl  $dN$  der Moleküle bekannt ist, die Tropfen mit einem Durchmesser zwischen  $\Phi$  und  $\Phi + d\Phi$  bilden, so ist die Zahl  $dn$  dieser Tropfen gegeben durch

$$dn = \frac{dN v}{\pi \Phi^3 / 6}. \quad (5)$$

Es zeigt sich, dass der beste Anschluss an die Erfahrungswerte gefunden wird, wenn  $\varphi(\Phi) = \text{const}$  gesetzt wird, also mit gleichen *a-priori*-Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Tropfendurchmesser gerechnet wird. Damit folgt dann als Verteilungsgesetz der insgesamt  $n_0$  Tropfen auf die einzelnen Grössenklassen

$$\frac{dn}{n_0} = \frac{e^{-\beta/\Phi}}{\int_0^{\Phi_{max}} e^{-\beta/\Phi} d\Phi} \cdot \frac{d\Phi}{\Phi^3} \quad \text{mit} \quad \beta = -6 \sigma v \delta. \quad (6)$$

Da bei der Ableitung dieser Beziehung die Konstanz der Oberflächenenergie [Gleichung (3)] vorausgesetzt wurde, folgt, dass hierbei – im Gegensatz zur Rosin-Rammler-Verteilung – die Oberfläche nicht unendlich wird, auch wenn man die Integration bis zu beliebig kleinen Tropfen erstreckt. Die Zahl dieser sehr kleinen Tropfen wird eben gerade auf Grund der Energiebedingung so klein, dass das Integral nicht mehr divergiert.

Trägt man die nach Gleichung (6) berechnete Volumen-Häufigkeits-Kurve in das Rosin-Rammler-Netz ein, so ergibt sich eine Kurve nach Art der Figur 1, die auch tatsächlich häufig beobachtet wird<sup>1)</sup>.

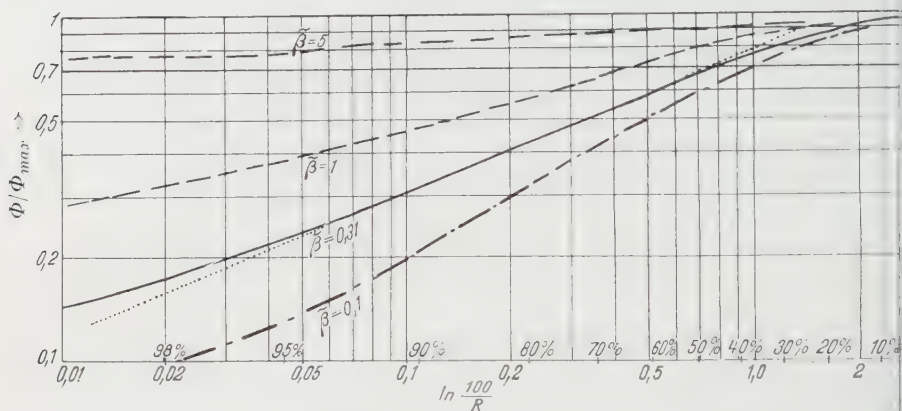


Fig. 1

Volumen-Summen-Kurve nach Gleichung (6) in Rosin-Rammler-Koordinaten für verschiedene Werte von  $\tilde{\beta}$

$$\frac{100}{R} = \frac{V_0}{V_0 - V} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha^{-1} e^{-\alpha} + Ei(-\alpha)}{\tilde{\beta}^{-1} e^{-\tilde{\beta}} + Ei(-\tilde{\beta})}} \quad \left[ Ei(-\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \text{Integrallogarithmus} \right]$$

$$\alpha = \tilde{\beta} \frac{\Phi_{max}}{\Phi}$$

Punktierte Kurve: Rosin-Rammler-Verteilung.

Die nach Gleichung (6) im Tropfengemisch vorhandene Oberflächenenergie lässt sich für gegebene Stoffgrößen und Anfangswerte durch eine Funktion von  $\tilde{\beta} = \beta/\Phi_{max}$  darstellen. Diese Funktion von  $\tilde{\beta}$  spielt bei der Zerstäubung eine ähnliche Rolle wie die absolute Temperatur in der statistischen Gastheorie. Tatsächlich kann auch  $\tilde{\beta}$ , zumindest für gewisse Zerstäubertypen, als konstant angesehen werden.

Bei einigen Zerstäubertypen kann allerdings nicht mit einem einheitlichen  $\Phi_{max}$  gerechnet werden. Es spielen sich bei diesen verschiedenen Zerstäubungsvorgängen mit entsprechend verschiedenen  $\Phi_{max}$ -Werten neben- und hintereinander ab. In diesem Fall muss das Verteilungsgesetz durch Überlagerung mehrerer Verteilungen nach Gleichung (6) gewonnen werden.

<sup>1)</sup> E. GIFFEN, J. Proc. Inst. mech. Eng. 153, Nr. 2, 205/206 (1948).



### Summary

The distribution problem is, in the first instance, a problem of surface energy of the formed drops. It is shown that the distribution of drop size from atomization follows statistical laws. The formulae derived with methods of the classical statistics permit calculation of the distribution-curve with the aid of measurable parameters for certain types of atomizers, i.e. relative velocity between liquid and air, surface tension, viscosity of liquid and air, and air density.

The formulae for the distribution of drops, surface and volume of the drops contain two parameters, the maximum drop diameter and the exchange-factor. The former can be calculated by aid of a stability criterion on a single drop, as it will be shown in another article. The exchange-factor, however, which is of similar signification as the temperature in MAXWELL's distribution of molecule velocities in perfect gases, depends on the type of atomizer.

The new formulae describe the experimental data much better than all known functions (e.g. Rosin-Rammler). However, for their use, which allows the knowledge of distribution curves without experiments, it is necessary to know the formula of maximum drop diameter and to make an analysis of the operation of the atomizer-type, permitting the establishment of the exchange factor.

(Eingegangen: 23. August 1952.)

---

### Varia – Miscellaneous – Divers

---

#### International Union of Pure and Applied Physics

Under the patronage of the International Union of Pure and Applied Physics the following meetings will be held during 1953:

- (1) *Meeting of the International Commission of Optics and Symposium on the Sight in Connection with Instrumental Optics*

April 1953 at Madrid (Spain), on the occasion of the 50 years of the Sociedad Española de Física y Química.

Further information can be obtained from Professor J. M. OTERO NAVASCUES, Instituto de Optica "Daza de Valdés", Serrano 121, Madrid.

- (2) *International Congress on Electroacoustics and International Symposium on the Sound Insulation of Light-Weight (Structures)*

June 1<sup>st</sup> to 6<sup>th</sup> incl., at Delft, Eindhoven and Hilversum (Netherlands). The Congress and Symposium are organized by the Netherlands Acoustical Society under the auspices of the International Commission on Acoustics of the International Union of Physics.

Sections: Phonography and Recording (Disc, Film, Wire, Tape); Public Address Systems; Acoustic Measurements; Hearing Aids and Audiometers; Electroacoustics in Ultrasonics; Sound Insulation of Light-Weight (Structures).

Further information can be obtained from Mr. P. A. DE LANGE, Laboratorium voor Technische Physica, Mijnbouwplein 11, Delft (Netherlands).

- (3) *Commission and Symposium on Cosmic Rays*

July 1953 at Bagnères-de-Bigorre, France. Detailed information can be obtained from Professor L. LEPRINCE-RINGUET, Secretary of the Commission, 17, rue Descartes, Paris 5<sup>e</sup>.



#### (4) *Symposium on Theoretical and Fundamental Physics*

September 1953 at Kyoto (Japan) organized by the Japanese National Committee. Sections: Field Theory and Theory of Elementary Particles; Statistical Mechanics and Low Temperature Physics; Solid State Physics and Molecular Physics. Further information from Dr. YOSHIA FUJIOKA, Secretary of the Conference, Science Council of Japan, Theno Park, Tokyo, Japan.

A. PERRIER, Swiss National Committee of Physics

#### **Instruments and Measurements Conference Stockholm 1952**

Von der Königlichen Schwedischen Akademie der Ingenieurwissenschaft (IVA.) und der schwedischen Gesellschaft für technische Physik (TFF.) organisiert, fand vom 22. bis 25. September 1952 in Stockholm die 6. Konferenz über Instrumente und Messmethodik statt. Gleichzeitig wurde eine Ausstellung von Messinstrumenten durchgeführt (22. bis 30. September 1952).

Das Ziel dieser Tagungen ist die Darstellung und Diskussion neuer Messmethoden sowie die Vorführung neuer Instrumente zur Förderung der Forschung und der allgemeinen technischen Entwicklung. Die diesjährige Tagung wurde von rund 400 Teilnehmern besucht. In Parallelsitzungen wurden 80 Vorträge über Messtechnik auf folgenden Gebieten gehalten:

a) Mechanik, b) physikalische Chemie, c) Elektronik, d) Kernphysik, e) Spektroskopie, f) allgemeine Elektrik, g) industrielle Kontrolle.

Die Auszüge dieser Vorträge sind in den IVA. (Tidskrift för Teknisk-Vetenskaplig Forskning) Bd. 23, Heft 4 (1952), erschienen. Wie in den Vorjahren werden die vollständigen Referate in den «Transactions of Instruments and Measurements Conference» (Stockholm 1952) veröffentlicht werden.

Sehr interessant und reichhaltig war die Ausstellung von Instrumenten und insbesondere die Abteilung für Forschung. Hier hatten verschiedene Institute der skandinavischen Länder sowie die kernphysikalischen Zentren von England und Frankreich in Bildern und Modellen einen Ausschnitt aus ihrer Tätigkeit gezeigt.

N. SCHAEFER

### **3. Österreichischer Mathematikerkongress vom 9. bis 14. September 1952 in Salzburg**

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft gestaltet seit einiger Zeit ihre Jahresversammlung zu einem internationalen Mathematikertreffen aus, das auch dieses Jahr unter der Leitung des Vorsitzenden der Gesellschaft, Prof. Dr. H. INZINGER, aufs beste gelang, indem etwa 300 Delegierte aus den verschiedensten Ländern teilnahmen.

In der Sektion für angewandte Mathematik wurden folgende Vorträge gehalten: D. R. RUTHERFORD (St. Andrews): *The Relaxation Method*. A. ZILL (Strassburg): *Valeur de  $t_n$  du dernier terme du développement en série de Taylor*. E. STIEFEL (Zürich): *Über die Methode der konjugierten Gradienten zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen unter spezieller Berücksichtigung des Einsatzes von Rechenautomaten*. S. EKELOF (Göteborg): *Der mechanische Differentialanalyzer der Chalmersschen Technischen Hochschule und einige damit gelöste Probleme*. E. DORY (Löwen): *Sur des orientations récentes de l'enseignement supérieur de*

*le domaine des mathématiques appliquées.* H. R. PANETH (London): *Correlation Functions.* H. RICHTER (Freiburg i. Br.): *Zur Begründung des Additions- und Multiplikationssatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie.* D. A. KAPPOS (Erlangen): *Die Totaladditivität der Wahrscheinlichkeit.* H. BERGSTRÖM (Göteborg): *Über Folgen von Verteilungsfunktionen, die eine stabile Grenzverteilungsfunktion haben.* S. VAJDA (Epsom): *Algebraische Theoreme der Streuungszерlegung.* B. TEDESCHI (Rom): *Leggi di capitalizzazione e leggi di sconto.* L. COLLATZ (Hannover): *Randwertaufgaben monotoner Art.* H. GOERTLER (Freiburg i. Br.): *Neue Beiträge zur Berechnung laminarer Grenzschichten.* W. GROEBNER (Innsbruck): *Schwingungen von elastischen Kneisringen mit rechteckigem und dreieckigem Querschnitt.* P. LAASONEN (Helsinki): *Über Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungssystemen und ihre iterative Lösung.* G. GRIOLI (Padua): *Sull'equilibrio dei corpi elastici.* R. FAURE (Hanoi): *Intégrale première en mécanique ondulatoire.* M. J. DE SCHWARZ (Rom): *Zur Saint-Venantschen Theorie hohler Prismen.* J. L. DESTOUCHES (Paris): *Sur deux problèmes mathématiques non résolus posés récemment par les théories microphysiques.* M. CAZIN (Garches): *Applications de la transformation de Laplace à la physique théorique.* R. NARDINI (Bologna): *Über zwei Eindeutigkeitssätze für magnetohydrodynamische Wellen.* A. PIGNEDOLI (Bologna): *Recenti ricerche sui moti di parziale veloci.* E. STIEFEL

---

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**Leçons sur les principes de l'électrodynamique classique.** Par A. MERCIER (Editions du Griffon, Neuchâtel 1952.) 75 p., fr. s. 7.80.

In dieser Schrift werden Ausschnitte der klassischen Elektrodynamik einer eingehenderen Betrachtung unterzogen. Dabei wird auf einen logischen Aufbau der Theorie Gewicht gelegt, was eine gewisse Vertrautheit mit den behandelten Problemen bedingt. Andererseits wird mancher Leser nach der Lektüre erkennen, dass noch blasse oder schon verblasste Kenntnisse über den Zusammenhang etwa von  $B$  und  $E$  mit  $H$  und  $D$  zu neuem Leben erwacht sind.

Nach einleitenden Worten über Veranlassung und Plan der Arbeit wird in Kapitel 3 die Dynamik, in Kapitel 4 die Energetik des elektromagnetischen Feldes behandelt. Die Verknüpfung mit der speziellen Relativitätstheorie bringt in Kürze das Kapitel 5. Das nächste analysiert zunächst eingehend den Begriff der elektrischen und magnetischen Polarisation; hierauf kommen deren Eigenschaften im Sinn der Kapitel 4 und 5 zur Sprache. Mit Hilfe der Cliffordschen Zahlen wird in Kapitel 7 zusammenfassend eine kurze Axiomatik der Elektrodynamik dargestellt, im Sinne von früheren Veröffentlichungen des Verfassers. Die straffe Gliederung und Beschränkung auf das Wesentliche, im Verein mit der bewährten Drucktechnik des Verlages, sichern dem Werk eine gute Lesbarkeit.

W. Baumgartner

**The Theory of Electromagnetic Waves.** A Symposium (Interscience Publishers, New York 1951). 393 pp.; \$6.50.

Die in diesem Buch veröffentlichten Vorträge – 21 an der Zahl – behandeln spezielle Probleme aus der Theorie der elektromagnetischen Wellen. Dabei ist aber durchaus nicht immer das physikalische Moment, sondern auch dasjenige der rechnerischen Methodik betont; oft ist der Zusammenhang mit dem Titel des Buches nur lose und verführt direkt dazu, das Gelesene in seiner Wirkung

bei anderen Aufgaben zu erproben. Es ist also seine Lektüre nicht bloss für die Spezialisten einer Ausbreitung elektrischer Wellen in Hohlleitern und in der Atmosphäre von Interesse. Selbst der Mathematiker von Zunft dürfte etwelche Anregung zu eigenen Überlegungen finden. Von Vorteil ist der zusammenfassende Charakter mancher Artikel, der durch ausführliche Literaturzitate unterstrichen wird. Nicht zuletzt ist schliesslich die saubere Ausstattung des Buches bemerkenswert. Einige Inhaltsangaben mögen zur Illustration dienen, wobei ihre Auslese nicht etwa eine Wertung bedeuten soll; sie würde je nach Leser verschieden ausfallen:

H. LEVINE und J. SCHWINGER referieren über Beugung an einer Öffnung in ebenen leitenden Schirm. R. E. LANGER berichtet über asymptotische Lösungen der Wellengleichung mit variablem Brechungsindex, H. PORITSKY über die Verallgemeinerung der Weylschen Integraldarstellung der Kugelwelle auf Wellen beliebiger Form, H. BREMMER über das WKB.-Verfahren, S. A. SCHELKUNOFF behandelt die Wellenausbreitung in geschichteten Medien, ähnlich N. MARCVITZ und B. FRIEDMANN. M. KLINE bespricht eine asymptotische Lösung der Maxwell-Gleichungen, S. O. RICE die Reflexion an rauen Oberflächen usw.

*W. Baumgartner*

**Allgemeine mathematische Berechnungen auf Brunsviga-Doppelrechenmaschinen.** Von F. WACHENDORF, bearbeitet und erweitert von B. SCHREDER. Herausgegeben von Brunsviga-Maschinenwerke-AG., Braunschweig, in Selbstverlag, 1951.

Es hat sich hauptsächlich für geodätische Berechnungen als nützlich erwiesen, zwei gekoppelte Handrechenmaschinen zu benutzen, die es ermöglichen, Teilresultate von der einen auf die andere Maschine zu transferieren und so eine gewisse Speicherkapazität zu erreichen. Die Brunsviga-AG. baut Maschinen dieser Art und gibt fortlaufend Anleitungen über ihre Benutzungsmöglichkeit heraus. Erwähnt seien: Das Rechnen mit komplexen Zahlen und Vektoren in der Ebene, Gleichungen und Schnitte von Kegelschnitten. Lösungen von quadratischen und kubischen Gleichungen. Trigonometrische Rechnungen, speziell Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden in der Geodäsie.

*E. Stiefel*

**The Preparation of Programs for an Electronic Digital Computer.** By M. V. WILKES, D. J. WHEELER and S. GILL (Addison Wesley Press Inc. Cambridge [Mass.], 1951), 162 pp.; \$5.00.

Nebst einer Beschreibung der mathematischen Eigenschaften der elektronischen Rechenmaschine EDSAC (University of Cambridge, England) enthält das vorliegende Buch eine ausführliche Anleitung zum Herstellen von Rechenprogrammen für diese Maschine. Insbesondere wird im Detail behandelt, wie man Unterprogramme in einen Rechenplan einfügt; ferner wird auch gezeigt, wie man allfällige Fehler im Rechenprogramm entdeckt und beseitigt. Es folgt sodann eine Aufstellung von solchen Unterprogrammen (mit detaillierten Angaben), wie sie in Cambridge andauernd verwendet werden. Diesen kann man entnehmen, wie man mit der EDSAC  $e^x$ ,  $\log x$ ,  $\sqrt{x}$  und andere Funktionen berechnet, Differentialgleichungen integriert usw.

Da die überaus reichen Erfahrungen der Verfasser mit Rechenmaschinen in diesem Buch ihren Niederschlag gefunden haben, wird jeder Mathematiker, der sich mit der Herstellung von Rechenprogrammen befassen muss, das Buch mit Gewinn studieren, obschon es naturgemäss auf die EDSAC zugeschnitten ist.

*H. Rutishauser*

# Linear Elastic Stability

## *A Critical Analysis of Methods*

By HANS ZIEGLER, E.T.H., Zurich

### CONTENTS

#### First Part

I. <i>Mechanical Systems</i> . . . . .	90
1. Work . . . . .	90
2. Conservative Forces . . . . .	91
3. Conservative Systems . . . . .	94
4. Classification of Mechanical Systems . . . . .	96
5. The Equations of LAGRANGE . . . . .	97
6. Stability of a Configuration of Equilibrium . . . . .	99
II. <i>Linear Systems</i> . . . . .	100
7. Purely Nongyroscopic Systems . . . . .	100
8. Purely Gyroscopic Systems . . . . .	103
9. Purely Dissipative Systems . . . . .	106
10. Purely Circulatory Systems . . . . .	107
11. Constant Generalized Forces . . . . .	109
12. Purely Instationary Systems . . . . .	111
III. <i>Elastic Stability</i> . . . . .	113
13. Methods for the Calculation of Critical Loads . . . . .	113
14. Purely Nongyroscopic Systems . . . . .	114
15. Purely Gyroscopic Systems . . . . .	116
16. The Influence of Damping . . . . .	116
17. Circulatory Systems . . . . .	118
18. Purely Instationary Systems . . . . .	119
Bibliography . . . . .	120

#### Second Part<sup>1)</sup>

IV. <i>Buckling by Compression</i> . . . . .	168
19. EULER's Buckling Cases . . . . .	168
20. The Influence of Constraints . . . . .	169
21. Asymmetric Constraints . . . . .	169
22. Twisted Rods . . . . .	170
23. Tangential Compression . . . . .	171
24. Pulsating Compression . . . . .	172
V. <i>Buckling by Torsion</i> . . . . .	173
25. Axial Torsion . . . . .	173
26. Conservative Torsion . . . . .	174
27. Semitangential Torsion . . . . .	176
28. Quasitangential Torsion . . . . .	176
29. Pseudotangential Torsion . . . . .	176
30. Pulsating Torsion . . . . .	177
VI. <i>Critical Angular Velocities</i> . . . . .	177
31. Critical Speeds of an Unloaded Shaft . . . . .	177
32. The Influence of Gyroscopic Moments . . . . .	178
33. Shafts Having Two Unequal Flexural Rigidities . . . . .	179
34. The Influence of Compression . . . . .	180
35. The Influence of Torsion . . . . .	180
36. Conclusion . . . . .	183

<sup>1)</sup> To be published in fascicle 3.



Stability problems (buckling, critical speeds, etc.) arise in numerous elast systems. The typical situation is as follows: Under sufficiently small loads, configuration  $q$  of stable equilibrium exists in the immediate vicinity of the equilibrium configuration  $q_0$  of the unloaded system. For certain (critical) loads, however,  $q$  either becomes unstable or removed so far from  $q_0$  that the system is endangered.

During the last decades numerous solutions have been worked out and compiled (see for example [1]<sup>1</sup>, [2], [3] or parts of [4]). Yet the different methods of solution, though their interrelation is but loose and by no means evident, never have been compared nor critically analyzed. Thus it could happen that lately a number of apparently simple problems showed up for which the different methods yielded different, in some cases even utterly improbable, results [5], [6], [7]. The reason for these discrepancies was found in the fact that the systems concerned were nonconservative [5], [8], and it was possible by improving the basic assumptions to obtain trustworthy results [9], [10], [11].

The incident showed the desirability of an extensive analysis of stability problems and of the methods for their solution. Such an analysis, based on a classification of mechanical systems, is the subject of this paper. In order to avoid unnecessary complications, it will be restricted on the whole to holonomic and scleronomic systems with differential equations that can be linearized<sup>2</sup>).

## I. Mechanical Systems

In order to proceed to a systematic classification of mechanical systems, we start by circumscribing some simple concepts which usually are not defined with the rigour or the generality desirable for our purpose [12].

### 1. Work

The work done by a force  $\mathbf{F}$  is usually defined by the integral

$$W = \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad (1.1)$$

taken over the path  $C$  of its point of application. This definition, based upon the concept of a stationary field force  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  disengaged from the body on which it acts, is lacking in precision.

In the first place, many forces are instationary, i. e. they are functions of the type  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ ; and other forces may depend on the state of motion, especially on the velocities  $\mathbf{v}$  of their points of application, and thus be of the form

<sup>1</sup>) Numbers in square brackets refer to the Bibliography, page 49.

<sup>2</sup>) The author is indebted to Prof. R. GRAMMEL, Prof. M. RAUSCHER, Prof. E. P. POPOV, Mr. M. BECK and Mr. CH. WEHRLI for valuable help and numerous excellent suggestions.



$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . In both cases (1.1) is useless so long as the motion is unknown. Whenever  $\mathbf{r}(t)$  is prescribed, however, the quantities  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{F}$  and the power  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  become functions of the time  $t$ . Thus,  $W$  is better defined by the *time integral*

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt. \quad (1.2)$$

*Example 1.1.* If a particle  $m$  (Figure 1.1) is free to slide along a rod rotating with variable angular velocity  $\omega(t)$ , the radial component of the centrifugal force,  $F_r = m r \omega^2(t)$ , is stationary.

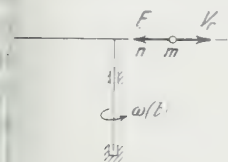


Figure 1.1

Particle sliding on a rotating rod.



Figure 1.2

Projectile.

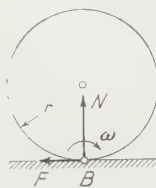


Figure 1.3

Rolling wheel.

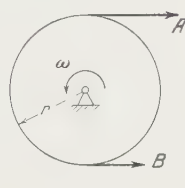


Figure 1.4

Band brake.

*Example 1.2.* The air resistance acting on a projectile (Figure 1.2) depends on its velocity; it may be described approximately by  $\mathbf{R} = -\lambda v \mathbf{v}$ .

*Example 1.3.* The friction force  $\mathbf{F}$  acting on the particle of Figure 1.1 depends on its relative velocity; if  $N$  denotes the normal pressure,  $\mathbf{F} = -\mu N \mathbf{v}/v$ .

In the second place, many forces (such as reactions) are not defined apart from the body on which they act. If the dimensions of this body are finite, the displacement (or velocity) of the material point on which  $\mathbf{F}$  acts may be different from the displacement (or velocity) of the geometric point of its application. In any application of the concept of work (energy theorem, principle of virtual work, equations of LAGRANGE)  $d\mathbf{r}$  actually stands for the displacement of the material point; thus, (1.2) is to be completed by the prescription that  $\mathbf{v}$  relates to the *material* point of application of  $\mathbf{F}$ .

*Example 1.4.* In the case of a rolling wheel (Figure 1.3) the material point  $B$  is instantaneously at rest (while the geometric point  $B$  moves). Thus, the reactions  $N$ ,  $F$  do no work.

*Example 1.5.* In the case of a band brake (Figure 1.4) the total amount of work done by the (apparently resting) forces  $A$ ,  $B$  is negative, since their material points of application move.

According to (1.2) the work done by  $\mathbf{F}$  over an infinitesimal displacement is

$$dW = P dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.3)$$

## 2. Conservative Forces

The concept of conservative forces is introduced in order to single out those systems which comply with the theorem of conservation of energy.

Usually, a force is called conservative if its work  $W$  is independent of the path connecting two generic positions of its point of application. This definition, too, arises from the idea of a stationary field force.

According to 1, systems subjected exclusively to stationary field forces are extremely scarce. Thus, a more appropriate definition, valid for any (and even for reactive) forces, is based on the condition that the work done by  $\mathbf{F}$  on any admissible displacement uniquely depends on the initial and the final configuration of the system. By an admissible displacement, in this connection, we meant a real (in contrast to a virtual) finite displacement of the system, compatible with the constraints.

Let  $q_1, q_2, \dots$  denote the generalized coordinates. Suppose the system is moved from a generic configuration  $q_1, q_2, \dots$  to a standard configuration  $q_{10} = q_{20} = \dots = 0$ . Provided that  $\mathbf{F}$  is conservative, its work is a single-valued function  $W_{q \rightarrow 0} = V(q_1, q_2, \dots)$  of the coordinates, the so-called *potential energy* of the initial configuration. Hence, the work done over an infinitesimal displacement is

$$dW = -dV = \sum_i P_i dq_i, \quad P_i(q_1, q_2, \dots) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

On the other hand, the radius vector of the point of application of  $\mathbf{F}$  is  $\mathbf{r}(q_1, q_2, \dots, t)$ . In rheonomic systems (characterized by moving constraints) it depends explicitly on  $t$ , while in scleronomic systems (with steady constraints) it is a function of  $q_1, q_2, \dots$  only. For an infinitesimal displacement

$$d\mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt. \quad (2.2)$$

Hence, (1.3) yields

$$dW = \sum_i \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt. \quad (2.3)$$

Comparing (2.3) with (2.1), we find that, provided  $\mathbf{F}$  is conservative,

$$\mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = P_i. \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

The first equation (2.4) implies that, apart from rare and insignificant exceptions, conservative forces do not appear in rheonomic systems.

*Example 2.1.* The particle of Figure 2.1, moving along a uniformly rotating rod, is rheonomic, since its position with respect to a fixed coordinate frame depends on  $r$  and  $t$ . The vector  $\partial \mathbf{r} / \partial t$  is normal to the rod and of magnitude  $\omega r$ . Hence, any force not directed along the axis of the rod is nonconservative, for instance the normal pressure  $N$ , the work of which increases the kinetic energy of  $m$  as it moves away from  $O$ .

We now are justified in restricting ourselves in the further discussion to scleronomic systems. Here, since  $P_i$  and  $\mathbf{r}$  depend on  $q_1, q_2, \dots$  alone, the remaining equations (2.4) imply that, in general, only forces depending uniquely on  $q_1, q_2, \dots$  are conservative.

In any system, two kinds of forces can be distinguished (see [13], p. 12). Active forces are given *a priori* as functions of  $t, q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ , whereas reactive forces are unknown beforehand, being obtained together with the motion only by integration of its differential equations.

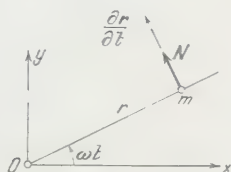


Figure 2.1

Particle sliding on a rotating rod.

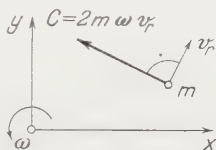


Figure 2.2

Coriolis force.

$V_r$  in Figure 1.1 and  $R$  in Figure 1.2 are active forces;  $F$  in Figures 1.1 and 1.3,  $\mathbf{V}$  in Figures 1.3 and 2.1 are reactive forces or reactions.

Some reactive forces never do work in scleronomic systems; thus, they are conservative. The work done by any other reactive force in a real motion is negative. Forces of this type are called *dissipative forces* (see [14], p. 257); they are nonconservative. Thus, reactive forces are either workless and hence conservative or dissipative and hence nonconservative.

Normal pressures and static friction forces (see [13], p. 37) are conservative reactions; kinetic friction forces and rolling friction couples (see [15], vol. I, p. 133) are dissipative reactions.

As for the active forces, there follows from (2.4) the rule that those depending on the time or on the generalized velocities are nonconservative.

If the particle  $m$  of Example 1.1 is displaced over  $d\mathbf{r}$  at a time  $t_1$ , and over  $-d\mathbf{r}$  at a later time  $t_2$ , the total amount of work done by the centrifugal force  $V_r$  generally does not vanish.

The work done by  $R$  in Example 1.2 is negative for any actual motion; thus, its resistance is a dissipative, though active, force.

There is an important exception from the last rule. Some active forces, called *gyroscopic forces*, are always perpendicular to the velocities of their points of application. Though they depend on the generalized velocities, they do no work in actual motions; in consequence, they are conservative.

**Example 2.2.** In a rotating coordinate frame, the Coriolis force  $\mathbf{C} = 2m\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega}$  (Figure 2.2) is always normal to the relative velocity  $\mathbf{v}_r$ .

Other examples are the gyroscopic moment of a symmetric gyroscope (see [16], p. 345) and part of the Lorentz force in an electromagnetic field.

On the other hand, active forces depending only on the configuration of the system are not necessarily conservative. Since the coordinates  $q_1, q_2, \dots$  are not determined entirely by  $\mathbf{r}$ , some of them are not even stationary field forces. In order to distinguish forces which, though functions of  $q_1, q_2, \dots$  alone, are nonconservative, from those depending on  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$  or  $t$ , they will be called *circulatory forces*, the notation being borrowed from a similar case in hydrodynamics.

*Example 2.3.* A constant force  $\mathbf{F}$ , applied at the point  $A$  to a rigid body (Figure 2.3), is a conservative stationary field force.

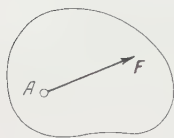


Figure 2.3  
Constant force acting  
on a rigid body.



Figure 2.4  
Force rigidly connected with a body.

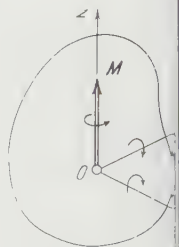


Figure 2.5  
Constant couple acting  
on a rigid body.

*Example 2.4.* The force  $\mathbf{F}$  of Figure 2.4, rigidly connected with a body and therefore constant for an observer taking part in its motion, is not entirely determined by  $\mathbf{r}$ ; thus,  $\mathbf{F}$  is not a field force. When the body is moved to a second position by a simple translation,  $\mathbf{F}$  does a certain amount of work. If this translation is preceded and followed by equal but opposite rotations, the work of  $\mathbf{F}$  is generally different; hence,  $\mathbf{F}$  is circulatory.

*Example 2.5.* Let  $\mathbf{M}$  be the constant moment vector of a couple (Figure 2.5) applied at  $O$  to a rigid body which is free to rotate about the axis  $z$  of  $\mathbf{M}$ . Provided that the angle of rotation does not exceed  $2\pi$ ,  $\mathbf{M}$  is conservative. For angles in excess of  $2\pi$ , however, or if, instead of the axis  $z$ , the point  $O$  alone is fixed,  $\mathbf{M}$  is circulatory. Two successive rotations through  $\pi$  about the axes  $x$  and  $y$  result in the same final position as a rotation of equal magnitude about the axis  $z$ . If the simple rotation the work done by  $\mathbf{M}$  is different from zero, whereas, for the compound motion, it vanishes.

Circulatory forces are more common than is usually supposed. Since they do work on bodies moving perpetually through the same positions, they play an important role in power-transmitting devices (such as shafts, cranks, crank mechanisms and pulleys).

### 3. Conservative Systems

A mechanical system is called conservative whenever all (active and reactive) forces acting on it are conservative. This definition is practically useful without the precise definition of a conservative force given in 2.

From the analysis of 2 follows

*Theorem 3. A scleronomic system is conservative if*

(a) its reactive forces, in actual displacements, do no work and if its active forces are made up exclusively of

(b) noncirculatory forces depending on the configuration of the system only,  
(c) gyroscopic forces.

On the other hand, nonconservative systems include

(a) rheonomic constraints,  
(b) dissipative forces (active or reactive),  
(c) circulatory forces,  
(d) instationary forces

apart from more general (but practically less important) forces depending on the velocities.

In a conservative system the work done by all forces while the system is moved from a generic to a standard configuration is a single-valued function  $V(q_1, q_2, \dots)$  of the initial configuration. It is called the *total potential energy* and can be obtained by addition of the potential energies of every single force. For an infinitesimal displacement the total work, according to (2.1), is

$$dW = \sum_i P_i dq_i, \quad P_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

The principle of virtual work, applied to the actual motion, yields the energy theorem  $dT/dt = P$ , where  $T$  denotes the total kinetic energy. By integration and introduction of  $V$  the theorem of conservation of energy,

$$T + V = E = \text{const} \quad (3.2)$$

is obtained, valid for any conservative system, whether gyroscopic forces be present or not.

*Example 3.1.* A particle (Figure 3.1) moving under the sole action of its weight is conservative. This proves right even if the motion is referred to a uniformly

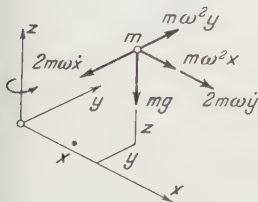


Figure 3.1  
Relative motion.

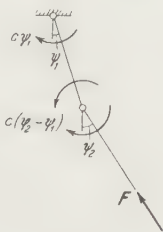


Figure 3.2  
Double pendulum, loaded tangentially.



Figure 3.3  
Spherical pendulum, loaded by a constant couple.



rotating coordinate frame, since, beside the weight  $mg$ , the centrifugal force  $(m \omega^2 x, m \omega^2 y)$ , as well as the (gyroscopic) Coriolis force  $(2 m \omega \dot{y}, -2 m \omega \dot{x})$  is conservative.

If  $\omega$  depended on the time, all forces except  $mg$  would be instationary. If air resistance were accounted for, the particle would be acted upon by a dissipative force. In both cases (3.2) would no longer hold.

*Example 3.2.* The double pendulum with elastic restoring moments (Figure 3.2) may be regarded as a simplified model of an elastic rod built in at one end. Unloaded it represents a conservative system. However, the load  $F$ , directed along the axis of the lower rod, is circulatory (Example 2.4); thus, (3.2) is not valid for the loaded pendulum.






*Example 3.3.* A spherical pendulum (Figure 3.3), subjected to a constant couple of moment  $M$ , is another nonconservative system, since  $M$  (Example 2.5) is circulatory.

#### 4. Classification of Mechanical Systems

According to Theorem 3 the only conservative forces appearing in scleronomic systems are workless reactions, gyroscopic forces, and noncirculatory forces depending only on the configuration of the system. With regard to stability (see II), the presence or absence of gyroscopic forces is important. Therefore, a conservative system shall be called gyroscopic or nongyroscopic depending on the presence or absence of gyroscopic forces.

On the other hand, the more important forces rendering a scleronomic system nonconservative are of the dissipative, the circulatory and the instationary types. Transferring these notions, too, from the forces to the systems, we obtain the classification of Table 4.

Table 4  
Classification of mechanical systems  
(with examples of stability problems)

Mechanical systems				
conservative		nonconservative		
nongyroscopic	gyroscopic	dissipative	circulatory	instationary
				
Euler's buckling cases	Critical speeds of unloaded shafts	Buckling under influence of damping	Buckling by a tangential load	Buckling by a pulsating load

Obviously, Table 4, in its fifth category, includes even rheonomic systems. The only systems excluded are those containing forces which depend on the generalized velocities, belonging, however, neither to the gyroscopic nor to the dissipative types. With respect to elastic stability, they are of little importance. For further investigations, systems with negative damping perhaps would be the most interesting ones.

It is clear that, although a system is either conservative or not, it may belong to more than one of the last five categories at the same time.

Example 3.1, for instance, with variable  $\omega$  and air resistance taken into account, is gyroscopic, dissipative and instationary.

In order to avoid unnecessary complications, we shall confine ourselves, as a rule, to pure categories, tolerating, however, in all of the five categories, the presence of nongyroscopic conservative forces, since, in elastic systems, they always appear (in the form of internal forces).

Thus, by the term «purely gyroscopic», for instance, we exclude the presence of nonconservative forces.

Table 4 contains five typical stability problems. That they all belong to different categories, is easily verified by comparison with Examples 2.3, 2.2, 1.2, 2.4, and 1.1.

### 5. The Equations of Lagrange

A mechanical system is called holonomic if the differentials of its coordinates (and thus its generalized velocities) are independent.

Nonholonomic systems are relatively scarce. A well known example is the wheel of figure 5.1, rolling with horizontal axis on a horizontal plane. Whereas its coordinates  $x, y, \alpha, \varphi$  are independent, their differentials are connected by the nonintegrable relations

$$dx = r \cos \alpha d\varphi, \quad dy = r \sin \alpha d\varphi,$$

representing two nonholonomic constraints.

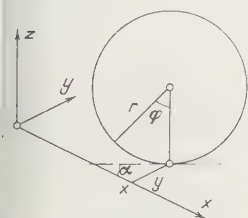


Figure 5.1

Wheel rolling on a horizontal plane.

In a holonomic system the increment  $\delta q_i$  of a single coordinate  $q_i$  represents a displacement compatible with the constraints. The principle of virtual work, applied in turn to these displacements, yields the equations of LAGRANGE,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

the so-called generalized forces  $Q_i$  being the coefficients of the increments  $\delta q_i$  in the expression

$$\delta W = \sum_i Q_i \delta q_i \quad (5.2)$$

for the virtual work. The differential equations (5.1) are valid for any holonomic system, whether conservative or not.

Any virtual work is evaluated under the assumption that, for an instant, the actual motion of the system is interrupted and replaced by the virtual displacement. The forces acting on the system, however, are supposed to retain the values corresponding to the actual motion. Hence, the coefficients  $c_i$  in (5.2) are not necessarily identical with the  $P_i$ 's of (3.1). In (3.1) every term belongs to the same (actual) motion; in (5.2), however, the  $Q_i$  belong to the actual motion, while all of the other terms are associated with the virtual motion.

As far as forces depending on  $q_1, q_2, \dots, t$  alone are concerned, their contributions to  $P_i$  and  $Q_i$  are evidently equal. They are different, however, in the case of forces depending on  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ . In a conservative system, for instance, the only forces of the last type are gyroscopic. They do no work in an actual displacement; in a virtual displacement, however, their work usually is different from zero.

In contrast to its actual work, the virtual work of a Coriolis force (Example 2.1) may be different from zero.

It follows that in a conservative system

$$Q_i = P_i + G_i, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

where according to (3.1),

$$P_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial q_i}, \quad (5.4)$$

while the generalized gyroscopic forces  $G_i$  are deduced from their own virtual work

$$\delta W_g = \sum_i G_i \delta q_i. \quad (5.5)$$

Thus, the alternate form of the equations of LAGRANGE,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.6)$$

obtained by introduction of the *kinetic potential*  $L = T - V$ , is not valid, as is often assumed, for any conservative system. It is restricted to purely nongyroscopic systems, whereas, for purely gyroscopic systems,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = G_i. \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.7)$$

*Example 5.1.* The particle of Example 3.1, examined in a uniformly rotating reference frame, has the energies

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad V = -\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + m g z.$$

Hence, the kinetic potential takes the form

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 (x^2 + y^2) - 2gz].$$

From the virtual work of the Coriolis force,

$$\delta W_g = 2m\omega(\dot{y}\delta x - \dot{x}\delta y),$$

the generalized gyroscopic forces

$$G_x = 2m\omega\dot{y}, \quad G_y = -2m\omega\dot{x}, \quad G_z = 0$$

are obtained. Substituting these relations into (5.7), we obtain the differential equations

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = 0, \quad \ddot{z} + g = 0. \quad (5.8)$$

Using (5.6) instead of (5.7), the terms containing  $\dot{x}$  and  $\dot{y}$  would have been lost.

Under certain assumptions [12] it is possible to use (5.6) even for gyroscopic systems. In these cases, however,  $L$  is no longer the difference  $T - V$ .

## 6. Stability of a Configuration of Equilibrium

In almost the whole field of physics (see for instance [17], p. 13) a configuration  $q_1 = q_2 = \dots = 0$  of equilibrium is called *stable* whenever, for any set  $q_{i0}, \dot{q}_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) of initial values numerically sufficiently small, the coordinates  $q_i(t)$  and the generalized velocities  $\dot{q}_i(t)$  remain arbitrarily small.

In elasticity, it has become a custom to define "kinetic stability" in this way, while a system is called "statically stable" whenever the work done over a small displacement from the equilibrium configuration is negative. Yet there is no reason for using two different stability concepts. Moreover, it will be shown in 8 and 10 that in certain cases the two concepts are in direct opposition. Since, from a physical viewpoint, "kinetic stability" alone matters, it is reasonable to adopt a single stability concept as defined above.

If  $n$  is the degree of freedom, configuration and state of motion of a system can be represented by a point  $(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots)$  in the phase space of  $2n$  dimensions. Thus, its equilibrium, represented by the origin  $O$ , is stable as long as the phase point, starting within a sufficiently small sphere of center  $O$ , remains inside a similarly located sphere of arbitrarily small radius.

It is obvious that any stability problem can be solved by integration of the differential equations of motion. However, for systems containing only conservative and dissipative forces, a partial result can be established by means of the energy theorem. Provided that the total energy  $E = T + V$  is a continuous function of  $q_i, \dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), it can be minimized on the surface of a sphere  $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2 = \eta^2$  in the phase space. By physical reasons,  $T$  is a positive definite function of  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$  (i. e.  $T = 0$  for  $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = 0$  and  $T > 0$  for any other set of  $\dot{q}_i$ ), depending also on  $q_1, q_2, \dots$ . If  $V$  is a posi-

tive definite function of  $q_1, q_2, \dots$ , the minimum  $\varepsilon$  of  $E$  on the sphere of radius  $\eta$  is positive. Moreover, provided that the initial values  $q_{i0}, \dot{q}_{i0}$  are numerically sufficiently small,  $E_0 < \varepsilon$ . Since  $E$  cannot increase throughout the motion  $E \leq E_0 < \varepsilon$ . Hence, the phase point does not reach the surface of the sphere  $\eta$ . We have, therefore,

*Theorem 6. If the total energy is continuous, the equilibrium of a system containing only conservative and dissipative forces is stable whenever its potential energy is positive definite.*

Theorem 6 applies to the first three categories of Table 4. It does not imply, however, that the system is unstable if  $V$  is not positive definite.

## II. Linear Systems

A mechanical system shall be called *linear*, if its motion is governed by a single set of linear differential equations. Actually, this set does not contain derivatives of higher than the second order; thus, it is of the form

$$\sum_k (m_{ik} \ddot{q}_k + g_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) + h_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7.0)$$

where the coefficients are given functions of the time.

We shall, without mentioning it again, confine ourselves to *linear, holonomic, scleronomic systems*. Our next problem consists in the adaptation, by extending an idea of TH. VON KÁRMÁN and M. A. BIOT [18], of (7.0) to the different categories of systems specified in Table 4. Hereafter it will be easy to draw more definite conclusions concerning the stability of every category.

### 7. Purely Nongyroscopic Systems

Purely nongyroscopic systems are entirely determined by their energies  $T$  and  $V$ .

The kinetic energy of a scleronomic system is (see [19], vol. III, p. 48) a homogeneous quadratic function of its generalized velocities,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \mu_{ik} (q_1, q_2, \dots) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (\mu_{ki} = \mu_{ik}) \quad (7.1)$$

with coefficients depending on the coordinates. For small displacements, these coefficients, provided they are expressible in power series, can be replaced by  $\mu_{ik}(0, 0, \dots) = m_{ik}$ . Thus,  $T$  becomes a quadratic form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (m_{ki} = m_{ik}) \quad (7.2)$$

of the  $\dot{q}_i$ , defined by the constant and symmetric matrix  $(m_{ik})$ . Since  $T$  is positive definite, so is (see [20], vol. I, p. 103) the matrix  $(m_{ik})$  (its determinant,



according to [21], vol. I, p. 296, being positive, together with every element of its chain of principal minors).

If the potential energy  $V(q_1, q_2, \dots)$  is also expressible in a power series,

$$V = V(0, 0, \dots) + \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} (0, 0, \dots) q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} (0, 0, \dots) q_i q_k + \dots \quad (7.3)$$

its constant term, which is arbitrary, can be set equal to zero. Furthermore, if  $q_1 = q_2 = \dots = 0$  defines a configuration of equilibrium,

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} (0, 0, \dots) = 0; \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7.4)$$

hence, the linear terms, likewise, are absent. If, finally, there is at least one term of second degree, the coefficient of which does not vanish,  $V$  may be approximated by the quadratic form

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} q_i q_k \quad \left[ c_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} (0, 0, \dots) = c_{ki} \right] \quad (7.5)$$

of the  $q_i$ , defined by the constant and symmetric matrix  $(c_{ik})$ .

Expressions (7.2) and (7.5) are approximations, restricted to terms of the second degree. Substituting them into (5.6), we obtain the linearized differential equations of motion,

$$\sum_k (m_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7.6)$$

$(m_{ik}), (c_{ik})$  being constant and symmetric,  $(m_{ik})$  even positive definite. These equations represent (7.0) in the purely nongyroscopic case.

It is clear that, in general, nongyroscopic systems are not necessarily linear. Nor is it always possible to linearize them. There are cases where  $V$  is not expressible in a power series; in other cases, this series contains no quadratic terms.

Let  $m$  be a particle (Figure 7.1) between two springs of different stiffness  $c_1, c_2$  respectively. The spring force and its potential are

$$F(x) = \begin{cases} -c_1 x, \\ -c_2 x, \end{cases} \quad V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 x^2, & (x \geq 0) \\ \frac{1}{2} c_2 x^2, & (x \leq 0) \end{cases}$$

Hence, the motion is governed by either one of the two differential equations

$$m \ddot{x} + c_1 x = 0, \quad (x \geq 0) \quad m \ddot{x} + c_2 x = 0, \quad (x \leq 0)$$

The problem is nonlinear, since the potential  $V(x)$ , the second derivative of which is discontinuous at  $x = 0$ , is not expressible in a single series.

If  $F(x) = -c x^3$  is the spring force of an oscillator (Figure 7.2) with a single degree of freedom, its potential  $V(x) = c x^4/4$  does not contain any terms of the second degree. Accordingly, the differential equation of motion,

$$m \ddot{x} + c x^3 = 0,$$

when linearized, does not represent an oscillation.

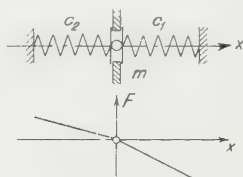


Figure 7.1  
Nonlinear oscillator.



Figure 7.2  
Nonlinear oscillator.

Since (7.2) is positive definite, there exists a linear transformation

$$\varphi_i = \sum_k a_{ik} q_k \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7.7)$$

(see [22], vol. I, p. 32, or [23], p. 188), which yields purely quadratic forms

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\varphi}_i^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_i c_i \varphi_i^2 \quad (7.8)$$

for both energies. The quantities  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , vanishing in the equilibrium configuration, are the *normal coordinates* of the system; (7.8) are the *normal forms* of  $T$  and  $V$ . The coefficients  $m_i, c_i$  are real; the  $m_i$ 's are even positive. Substituting (7.8) into (5.6), we obtain the differential equations

$$m_i \ddot{\varphi}_i + c_i \varphi_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7.9)$$

each of which contains no more than one normal coordinate.

The differential equations (7.9) are solved by setting

$$\varphi_i = A_i e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i^2 = -\frac{c_i}{m_i}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7.10)$$

the  $A_i$  being arbitrary constants. In general, (7.10) represents two fundamental solutions for every normal coordinate, characterized by the roots  $\lambda_i, -\lambda_i$ . Provided the coefficients  $c_i$  are positive, all exponents are imaginary (Figure 7.3). In this case, the fundamental solutions are harmonic oscillations. If at least one  $c_i$  is negative, the corresponding roots are real (Figure 7.4). Since one of them is positive, there exists an illimited fundamental solution. If  $c_i = 0$  (7.10) yields but one fundamental solution  $\varphi_i = A_i$  for the  $i$  in question, the other one being  $\varphi_i = B_i t$ . It follows that the system is stable only as long as all coefficients  $c_i$  are positive. Since  $c_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) also are the condition

necessary and sufficient in order that the matrix  $(c_{ik})$  or, equivalently, the quadratic form  $V$  be positive definite, Theorem 6, for the case in question, can be restated as follows:

*Theorem 7. The equilibrium of a purely nongyroscopic system is stable only so long as its potential energy is positive definite.*

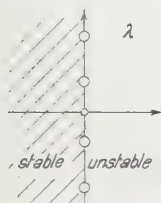


Figure 7.3

Characteristic roots of a purely nongyroscopic system ( $V$  being positive definite).

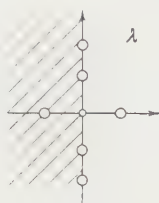


Figure 7.4

Characteristic roots of a purely nongyroscopic system ( $V$  having negative values).

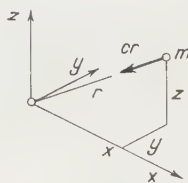


Figure 7.5

Particle tied elastically to the origin.

*Example 7.1.* The differential equations governing the motion of a particle  $m$  (Figure 7.5) tied elastically to the origin are

$$m \ddot{x} + c x = 0, \quad m \ddot{y} + c y = 0, \quad m \ddot{z} + c z = 0. \quad (7.11)$$

Here,  $x, y, z$  already are normal coordinates. The equilibrium position  $x = y = z = 0$  is stable, provided  $c > 0$ .

## 8. Purely Gyroscopic Systems

According to 2, both gyroscopic and dissipative forces depend on the generalized velocities. Thus, purely gyroscopic and purely dissipative systems are characterized by generalized forces of the form

$$G_i = - \sum_k g_{ik} \dot{q}_k, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (8.1)$$

the coefficients  $g_{ik}$  being given functions of  $t$ . Their differential equations of motion, instead of (7.6), are

$$\sum_k (m_{ik} \ddot{q}_k + g_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0. \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (8.2)$$

The power of the forces (8.1) is

$$P = \sum_i G_i \dot{q}_i = - \sum_{i,k} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (8.3)$$

If  $(g'_{ik})$ ,  $(g''_{ik})$  denote the symmetric and the antisymmetric parts of the matrix  $(g_{ik})$ ,

$$P = - \sum_{i,k} g'_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (8.4)$$

since the sum containing  $(g''_{ik})$  is zero. According to 2, gyroscopic forces do no work in actual motions, whereas the work of dissipative forces is negative. Hence, the matrix  $(g''_{ik})$  represents gyroscopic forces<sup>1)</sup>, while  $(g'_{ik})$ , provided it is positive definite, represents dissipative forces. Thus, the differential equations of motion of a purely gyroscopic system, in particular, are given by (8.1), where  $(m_{ik})$  and  $(c_{ik})$  are constant and symmetric.  $(m_{ik})$  is positive definite and  $(g_{ik})$  is antisymmetric.

According to Theorem 6, the equilibrium of a purely gyroscopic system is stable as long as  $V$  is positive definite. By comparison with Theorem 7 follows

*Theorem 8a. A conservative system cannot be made unstable by gyroscopic forces.*

In the case of a constant matrix  $(g_{ik})$  the differential equations (8.2) are solved by setting

$$q_i = A_i e^{\lambda t} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (8.4)$$

Substitution of (8.5) into (8.2) yields the *characteristic system*

$$\sum_k (m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik}) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (8.5)$$

Excluding the trivial solution  $A_1 = A_2 = \dots = 0$ , we obtain the *characteristic equation*

$$\| m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik} \| = 0 \quad (8.6)$$

The value of the determinant in (8.7) is not affected if rows and columns are interchanged. Due to the symmetry of  $(m_{ik})$ ,  $(c_{ik})$  and to the antisymmetry of  $(g_{ik})$ , such an interchange is equivalent to a change of sign in  $\lambda$ . Hence, if  $\lambda$  is a solution of (8.7), so is  $-\lambda$ . Since a positive real part in any root means instability, the system is stable only as long as all roots are imaginary (Figure 7.3). This condition, according to Theorem 6, is satisfied when  $V$  is positive definite.

Thus, Theorem 6 implies that, if  $(m_{ik})$ ,  $(c_{ik})$  are constant, symmetric and positive definite, and if  $(g_{ik})$  is constant and antisymmetric, (8.7) has only imaginary roots.

If, on the other hand,  $V$  is not positive definite, the system, according to Theorem 6, would be unstable in the absence of gyroscopic forces (Figure 7.4). There is, however, no reason why it should be unstable in their presence.

*Example 8.1.* Let  $m$  be a particle (Figure 8.1) tied elastically to the axes of a uniformly rotating plane coordinate frame. Its energies are given by

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = \frac{1}{2} [(c_1 - m \omega^2) x^2 + (c_2 - m \omega^2) y^2],$$

<sup>1)</sup> See also [40], vol. I, p. 258.

the gyroscopic forces by

$$G_x = 2 m \omega \dot{y}, \quad G_y = -2 m \omega \dot{x};$$

hence, the differential equations of motion are

$$\ddot{x} - 2 \omega \dot{y} + \left( \frac{c_1}{m} - \omega^2 \right) x = 0, \quad \ddot{y} + 2 \omega \dot{x} + \left( \frac{c_2}{m} - \omega^2 \right) y = 0. \quad (8.8)$$

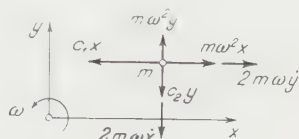


Figure 8.1

Relative motion under elastic forces.

The characteristic equation is

$$\lambda^4 - \left( \frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m} - 2\omega^2 \right) \lambda^2 + \left( \frac{c_1}{m} - \omega^2 \right) \left( \frac{c_2}{m} - \omega^2 \right) = 0. \quad (8.9)$$

Obviously, its roots

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c_1 + c_2}{m} - \omega^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_2 - c_1}{m} \right)^2 + 2 \frac{c_1 + c_2}{m} \omega^2},$$

provided  $c_2 > c_1 > 0$ , are real and of different absolute values. In consequence, there are four roots  $\lambda$ , real or imaginary, all different if none of them are zero. Thus, if  $c_1/m \neq \omega^2 \neq c_2/m$ , (8.5) yields four fundamental solutions, and the general solution is limited so long as all values of  $\lambda$  are imaginary, i. e. so long as both  $\lambda^2$  are negative.

If  $\omega^2 < c_1/m < c_2/m$ , the coefficients in (8.9) are positive. Therefore,  $\lambda_1^2 < 0$ ,  $\lambda_2^2 < 0$ : the system, in accordance with Theorem 6, is stable. For  $c_1/m < \omega^2 < c_2/m$  the potential energy  $V$  is no longer positive definite. The constant term in (8.9) now is negative; thus,  $\lambda_1^2 < 0$ ,  $\lambda_2^2 > 0$ : the system is unstable. If  $c_1/m < c_2/m < \omega^2$ , both roots  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  are again negative: the system is stable while  $V$  is negative definite.

Under the last of these assumptions Figure 8.1 represents a system which, according to 6, is "kinetically stable" though "statically unstable".

From this example follows

*Theorem 8b. If the potential energy of a purely gyroscopic system is not positive definite, the equilibrium may be stable or unstable.*

By comparison with Theorem 6 follows

*Theorem 8c. A conservative system may be stabilized by gyroscopic forces.*

It is easy to see that in Example 8.1 the limiting cases  $\omega^2 = c_1/m < c_2/m$  and  $c_1/m < c_2/m = \omega^2$  are unstable. If, however,  $c_1 = c_2 = c$  ( $m$  being tied elastically to the origin), the stable domains  $\omega^2 < c/m$  and  $\omega^2 > c/m$  meet. Since for  $\omega^2 = c/m$ , the differential equations are

$$\ddot{x} - 2 \omega \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + 2 \omega \dot{x} = 0, \quad (8.10)$$



having the general solutions

$$x = A \cos 2 \omega t + B \sin 2 \omega t + C, \quad y = -A \sin 2 \omega t + B \cos 2 \omega t + D,$$

the equilibrium position  $x = y = 0$  is always stable. For an observer taking part in the rotation, the system appears to be stabilized for  $\omega^2 \geq c/m$  by the Coriolis force. For an observer at rest, the result of course is evident.

### 9. Purely Dissipative Systems

According to Theorem 6, the equilibrium of a purely dissipative system is stable as long as  $V$  is positive definite. By comparison with Theorem 7 follows

*Theorem 9a. A purely nongyroscopic system cannot be made unstable by dissipative forces.*

According to 8, the differential equations of motion of a purely dissipative system are (8.2), where  $(m_{ik})$ ,  $(g_{ik})$ ,  $(c_{ik})$  are symmetric,  $(m_{ik})$ ,  $(c_{ik})$  are constant and  $(m_{ik})$ ,  $(g_{ik})$  are positive definite.

In a conservative system the gyroscopic forces may be functions of  $t$ . However, dissipative forces depending on  $t$ , according to Table 4, would render the system instationary. Thus, in a purely dissipative system  $(g_{ik})$  is constant. Hence, the differential equations (8.2) are solved by (8.5), the characteristic equation still being (8.7). Its roots  $\lambda$  are real or conjugate complex. Conjugate imaginary roots (as in Figure 7.3), representing undamped oscillations, appear no more. According to Theorem 6, none of the roots have a positive real part while  $V$  is positive definite. Thus, every root is shifted, by dissipation, from the imaginary axis to the stable half-plane (Figure 9.1).

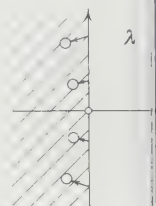


Figure 9.1  
Characteristic roots of a purely dissipative system ( $V$  being positive definite).

Theorem 6 thus implies that, provided  $(m_{ik})$ ,  $(g_{ik})$ ,  $(c_{ik})$  are constant, symmetric and positive definite, all of the roots of (8.7) have negative real parts.

*Example 9.1.* If the particle of Example 7.1 is subjected to a damping force  $R = -2m\gamma\dot{\mathbf{v}}$ , its differential equations of motion are

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + cx = 0, \dots, \dots \quad (9.1)$$

The characteristic equation,

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{c}{m} = 0,$$

has two roots

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{c}{m}}.$$

For  $c/m > 0$  both roots have negative real parts: the system, in accordance with Theorem 6, is stable. If  $c/m < 0$ , one of the roots is positive: the system, as in the absence of damping, is unstable. For  $c/m = 0$  the differential equation reduces to

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = 0, \dots, \dots \quad (9.2)$$

Their general solution is

$$x = A_x + B_x e^{-2\gamma t}, \dots, \dots$$

Thus, by contrast to the undamped case, the equilibrium position  $x = y = z = 0$  is still stable although  $V$  has ceased to be positive definite.

It follows from this example that Theorem 8b is also valid for purely dissipative systems. To be sure, the damping force in Example 9.1 stabilizes the system only in the limiting case when  $V$  is just losing its positive definite character. It is, however, more important to know the effect of small dissipative forces beyond this limit than to generalize the last result.

Provided that one of the coefficients  $c_i$  in the normal form (7.8) of  $V$  is positive, the positive real axis in Figure 7.4 contains, in the absence of dissipative forces, at least one root. Since it is a continuous function of the coefficients  $\zeta_{ik}$ , it remains outside the stable domain while the dissipative forces are sufficiently small. We have, therefore,

*Theorem 9b. If, in a purely dissipative system, there exists a configuration in which  $V < 0$ , the equilibrium is unstable, provided the dissipative forces are sufficiently small.*

By comparison with Theorem 7 we obtain

*Theorem 9c. Whenever a configuration exists in which  $V < 0$ , a purely non-gyroscopic system will not be stabilized by sufficiently small dissipative forces.*

10. Purely Circulatory Systems

Since, according to 2, circulatory forces depend on the coordinates only, purely circulatory systems are characterized by generalized forces of the form

$$F_i = - \sum_k c_{ik} q_k, \qquad (i = 1, 2, \dots) \quad (10.1)$$

the coefficients  $c_{ik}$  being constant.

If the matrix  $(c_{ik})$  were symmetric, the forces (10.1) might be derived from a single-valued potential

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} q_i q_k. \qquad (10.2)$$

In consequence, the system would be conservative. Thus,  $(c_{ik})$  is asymmetric; its symmetric part  $(c'_{ik})$  represents the conservative forces already accounted for in 7, while its antisymmetric part  $(c''_{ik})$  represents the circulatory forces.

Again, the differential equations of a purely circulatory system are (7.6), where  $(m_{ik}), (c_{ik})$  are constant,  $(m_{ik})$  is symmetric and positive definite, and  $(c_{ik})$  is asymmetric. They are solved using (8.5). The characteristic equation is

$$\| m_{ik} \lambda^2 + c_{ik} \| = 0. \qquad (10.3)$$

If  $\lambda_i$  is a solution of (10.3), so is  $-\lambda_i$ . Hence, the equilibrium is stable exactly

so long as all roots  $\lambda_i$  are imaginary (Figure 7.3). In the absence of circulatory forces this condition, in accordance with Theorem 7, is satisfied only so long as  $V$  is positive definite. Yet, if circulatory forces are present, there is no reason for the system to behave in the same manner.

*Example 10.1.* The particle  $m$  of Figure 10.1, tied elastically to the axes of a fixed plane coordinate frame, and subjected to a force of magnitude  $\mu r$ , acting perpendicular to the radius vector, is circulatory. Its energy functions are given by

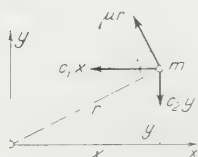


Figure 10.1  
Elastic forces and force perpendicular to the radius.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = \frac{1}{2} (c_1 x^2 + c_2 y^2),$$

and the generalized circulatory forces by

$$F_x = -\mu y, \quad F_y = \mu x.$$

The differential equations of motion are

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{m} x + \frac{\mu}{m} y = 0, \quad \ddot{y} + \frac{c_2}{m} y - \frac{\mu}{m} x = 0. \quad (10.1)$$

They yield the characteristic equation

$$\lambda^4 + \frac{c_1 + c_2}{m} \lambda^2 + \frac{c_1 c_2 + \mu^2}{m^2} = 0,$$

the roots of which are

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2m} (c_1 + c_2 \pm \sqrt{(c_1 - c_2)^2 - 4\mu^2}).$$

If  $c_1 = c_2 = c > 0$ ,

$$\lambda^2 = -\frac{1}{m} (c \pm i\mu);$$

thus, the system is unstable while its potential energy is positive definite ( $c_1 = 2\mu$ ,  $c_2 = -\mu/3$ ),

$$\lambda^2 = -\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \cdot \frac{\mu}{m};$$

hence, the system is stable while its potential energy is not definite.

Under the first assumption, Figure 10.1 represents a system which, according to 6, is "kinetically unstable" though "statically stable". Under the second assumption, the reverse is true.

From this example follows

*Theorem 10a.* The equilibrium of a purely circulatory system can be stable or unstable regardless of its potential energy being positive definite or not.

By comparison with Theorem 7 we obtain

*Theorem 10b.* Conservative systems may be stabilized or made unstable by the addition of circulatory forces.

### 11. Constant Generalized Forces

The properties of the systems treated thus far do not alter if constant generalized forces  $-h_1, -h_2, \dots$  are present. Their differential equations, however, become inhomogeneous.

The general solution of (7.0) is obtained by combination of the general solution of the reduced system (8.2) with a particular integral of (7.0). The first has been treated in 7 to 10; it represents the motion of the system in the absence of constant forces. The second may be taken as

$$q_i = A_i, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (11.1)$$

where the constants  $A_i$  are the solutions of

$$\sum c_{ik} A_k = -h_i. \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (11.2)$$

This represents the equilibrium configuration which, under the action of constant forces, is no longer  $q_1 = q_2 = \dots = 0$ . If new coordinates

$$p_i = q_i - A_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (11.3)$$

are introduced into (7.0), we obtain, in view of (11.2), the homogeneous differential equations

$$\sum_k (m_{ik} \ddot{p}_k + g_{ik} \dot{p}_k + c_{ik} p_k) = 0. \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (11.4)$$

They are equivalent to (8.2) and represent the motion of the system with reference to the equilibrium configuration (11.1).

The system is endangered whenever the general solution of the reduced set (8.2) is illimited, i. e. whenever the equilibrium (11.1) is unstable. Thus, the cases of instability examined in 6 to 10 are dangerous, whether constant forces are present or not.

Another danger, however, arises whenever the particular integral (11.1) becomes illimited, i. e. whenever the equilibrium configuration, under the action of the constant forces, becomes infinitely removed. This phenomenon, which is independent of the stability of (11.1), would pass unnoticed if the constant forces were disregarded; it may, therefore, be called a *latent instability of the system*.

A latent instability arises whenever the determinant  $\|c_{ik}\|$  of (11.2) vanishes. According to (8.2), however, in the absence of constant forces,  $\|c_{ik}\| = 0$  also is the condition necessary and sufficient for the existence of an infinity of equilibrium configurations apart from  $q_1 = q_2 = \dots = 0$ . If, in order to distinguish these additional configurations of equilibrium from those considered so far, we call them *nontrivial equilibrium configurations*, we have

*Theorem 11a.* In conservative, purely dissipative and purely circulatory systems the stability of the equilibrium remains unaffected by constant forces. There appear, however, latent instabilities whenever the system, in the absence of constant forces, has nontrivial equilibrium positions.

Evidently, Theorem 11a remains valid if conservative, dissipative and circulatory forces are present at the same time. It is even valid if the matrices  $(m_{ik})$ ,  $(g_{ik})$  depend on the time, i. e. for special classes of instationary systems.

*Example 11.1.* If, in Example 10.1, in addition to the forces shown in Figure 10.1, the particle is subjected to constant forces  $X$ ,  $Y$  (Figure 11.1), the differential equations of motion become

$$\ddot{x} - \frac{c_1}{m} x + \frac{\mu}{m} y = \frac{X}{m}, \quad \ddot{y} + \frac{c_2}{m} y - \frac{\mu}{m} x = \frac{Y}{m}. \quad (11.1)$$

The trivial equilibrium position is

$$x = \frac{c_2 X - \mu Y}{c_1 c_2 + \mu^2}, \quad y = \frac{\mu X + c_1 Y}{c_1 c_2 + \mu^2}.$$

If  $c_1 c_2 + \mu^2 = 0$ , it is infinitely removed; at the same time, in the absence of  $Y$ , there appear nontrivial equilibrium positions

$$\begin{array}{ccc} y & c_1 & \mu \\ x & \mu & c_2 \end{array}$$

in addition to the trivial one,  $x = y = 0$ .

In the absence of circulatory forces the determinant  $\|c_{ik}\|$  is symmetric. If normal coordinates (7.7) are used,  $\|c_{ik}\| = c_1 c_2 c_3 \dots$ . Thus, we obtain

*Theorem 11b.* In conservative and purely dissipative systems there exist no nontrivial equilibrium configurations whenever at least one coefficient  $c_i$  in the normal form of  $V$  vanishes.

Obviously, Theorem 11b remains valid if conservative, dissipative and even instationary forces are present simultaneously, provided the last ones appear in the matrices  $(m_{ik})$ ,  $(g_{ik})$  only.

Suppose the coefficients  $c_i$ , originally all positive, decrease. As soon as one of them becomes zero, the first nontrivial equilibrium configurations appear. Simultaneously,  $V$  ceases to be positive definite. Thus, the limit which, according to Theorems 6, 7, and 9b plays the decisive role in the stability of conservative and purely dissipative systems, is marked by the first appearance of nontrivial equilibrium configurations.

In Examples 7.1 and 9.1, for  $c = 0$  any point in space represents a position of equilibrium.

*Example 11.2.* If, in Example 8.1, in addition to the forces shown in Figure 8.1, constant forces  $X$ ,  $Y$  are applied (Figure 11.2), the differential equations of motion are

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} + \left(\frac{c_1}{m} - \omega^2\right)x = \frac{X}{m}, \quad \ddot{y} + 2\omega \dot{x} + \left(\frac{c_2}{m} - \omega^2\right)y = \frac{Y}{m}. \quad (11.2)$$



Provided  $c_1 < c_2$ , the trivial equilibrium position

$$x = \frac{X}{c_1 - m \omega^2}, \quad y = \frac{Y}{c_2 - m \omega^2}$$

is unstable while  $c_1 m \leq \omega^2 \leq c_2 m$ . The limits of this interval mark the existence of nontrivial equilibrium positions (in the absence of  $X, Y$ ) and, at the same time, of latent instabilities (in their presence).



Figure 11.1

Particle of Figure 10.1 acted upon by constant forces.

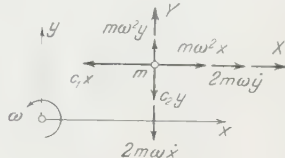


Figure 11.2

Particle of Figure 8.1 acted upon by constant forces.

If  $c_1 = c_2$ , the equilibrium, due to the stabilizing effect of the Coriolis force, is stable for any value of  $\omega$ , however the latent instability at  $\omega^2 = c m$  is still present.

12. Purely Instationary Systems

If in (7.0) the coefficients depend on the time, the system, provided that not only the gyroscopic terms are functions of  $t$ , is instationary. In order that it be purely instationary in the sense of Table 4, (7.0) must have the form

$$\sum_k (m_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} \dot{q}_k) + h_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{12.1}$$

( $m_{ik}$ ) being constant, symmetric and positive definite while ( $c_{ik}$ ) and  $h_i$  are given functions of  $t$ .

It is clear that systems of this kind do not necessarily have an equilibrium configuration. If one exists, there is no reason why its stability should obey any of the laws established so far.

Example 12.1. Let  $m$  (Figure 12.1) be a mathematical pendulum, subjected to its weight and a harmonically oscillating perturbation. The differential equation of motion, when linearized, is

$$\ddot{\vartheta} + \left( \frac{g}{l} + \frac{p}{l} \cos \omega t \right) \vartheta = 0. \tag{12.2}$$

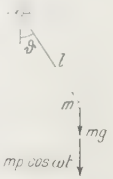


Figure 12.1  
Pendulum with oscillating axial load.

If we let  $\tau = \omega t$ , a new time scale is introduced. By designating derivatives with respect to  $\tau$  by primes, we have

$$\vartheta'' + (\delta + \varepsilon \cos \tau) \vartheta = 0,$$

where

$$\delta = \frac{g}{l \omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{p}{l \omega^2}.$$

This differential equation, which is of the MATHIEU type, may be deduced from the energies

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}'^2, \quad V = \frac{1}{2} (\delta + \varepsilon \cos \tau) \theta^2;$$

since  $V$  depends on  $\tau$ , however, the problem is nonconservative.

The general solution is obtained by superposition of two fundamental solutions; whether it is limited or not depends on the parameters  $\delta$ ,  $\varepsilon$ , i. e. on the period and the intensity of the perturbation. Figure 12.2 (taken from [24] and often referred

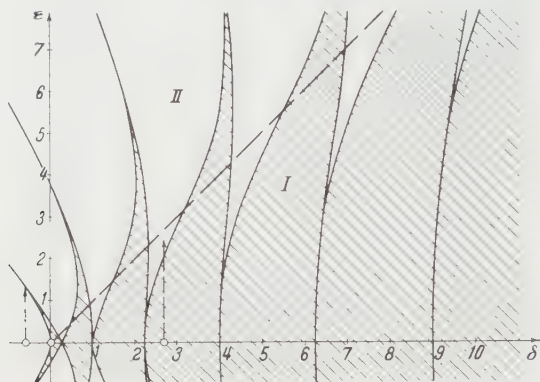


Figure 12.2  
STRUTT'S Table.

to as STRUTT'S Table) illustrates the stable and unstable sets  $\delta$ ,  $\varepsilon$ . The shaded regions, which are symmetric with respect to the  $\delta$ -axis, represent the sets for which the motion is stable. Any point outside the shaded regions (boundary points with the exception of those on the  $\delta$ -axis included) gives rise to an unstable solution.

In the absence of a perturbation, the representative point  $P(\delta, \varepsilon)$  in Figure 12.2 lies on the positive  $\delta$ -axis; thus, the pendulum is stable. When  $p$  increases,  $P$  moves parallel to the  $\varepsilon$ -axis. No matter what the value of  $\delta$  is,  $P$  can, by a suitable choice of  $p$ , be made to leave the shaded region. Thus, it is always possible to make the pendulum unstable by a perturbation of any given period.

If  $l$  is assumed to be negative, the inverted pendulum is obtained. Its representative point  $P$ , in the absence of a perturbation, lies on the negative  $\delta$ -axis; hence, the pendulum is unstable. However, for any value of  $\delta$  by a suitable choice of  $p$  the point  $P$  can be shifted into the interior of a branch of the shaded region; thus, the pendulum becomes stable.

By the straight line  $\varepsilon = \delta$  the upper half plane of Figure 12.2 is divided into two regions I, II. When  $P$  lies inside I,  $V$  is positive definite and vice versa.

From this example follows

*Theorem 12a. The equilibrium of a purely instationary system can be stable or unstable regardless of its potential energy being positive definite or not.*

By comparison with Theorem 7 we obtain

*Theorem 12b. Conservative systems may be stabilized or made unstable by instationary forces.*

### III. Elastic Stability

By means of the classification of Table 4 and the theorems established in 5 to 12, we are ready to analyze the different methods in use to solve stability problems, particularly in regard to their limits of validity.

#### 13. *Methods for the Calculation of Critical Loads*

In the unloaded state any elastic system has a configuration of equilibrium which is stable provided the system is not prestressed. If under the action of a given load and of small though arbitrary initial disturbances, the displacements  $q_1, q_2, \dots$  measured from this equilibrium position become too great, the system is endangered.

Ordinary problems of linear elasticity are characterized by small displacements proportional to the applied load. If these displacements, under certain values of the load, increase disproportionately and without a limit, we encounter a stability problem. Here the increase of the quantities  $q_1, q_2, \dots$  may be due either to the displacement of the equilibrium configuration itself or to its destabilization by the load.

It is obvious (see 6) that any stability problem can be solved by integration of the differential equations of motion, i. e. by the *kinetic method*. The loads for which, at least under the influence of small initial disturbances, illimited solutions exist, are called *critical loads*. Thus, we have

*Theorem 13: The kinetic method is valid without restriction.*

Evidently, it even applies in nonlinear, nonholonomic and rheonomic cases.

In rotating systems, at least some of the loads are centrifugal forces. In such cases, every critical load is associated with a certain angular velocity; thus, we are faced with a problem of *critical speeds*.

Usually the application of the kinetic method is cumbersome. Therefore, it is not surprising that it has been avoided as far as possible, and that, for stationary systems, the simpler *static methods* are preferred.

One of them is the *equilibrium method* already used by L. EULER in his famous investigation of compressed rods [25]. It defines as critical the values of the load for which nontrivial equilibrium positions exist.

The other one is the *energy method* developed by S. TIMOSHENKO (see [1], p. 78) and others. It defines as critical the value of the load for which the potential energy of the system ceases to be positive definite.

In a slightly different interpretation, the energy method defines as critical the values of the load for which the potential energy is stationary; in this modified form the method is equivalent to the equilibrium method.

Both static methods have been applied with such success that neither their validity nor their equivalence with the kinetic method ever have been questioned.

They are used so exclusively that the concept of stability (which, according to is essentially kinetic) in elasticity has acquired a purely static meaning (which according to 8 and 10, occasionally results in errors).

#### 14. Purely Nongyroscopic Systems

Most buckling problems are of the purely nongyroscopic type. The potential energy of the system is the sum

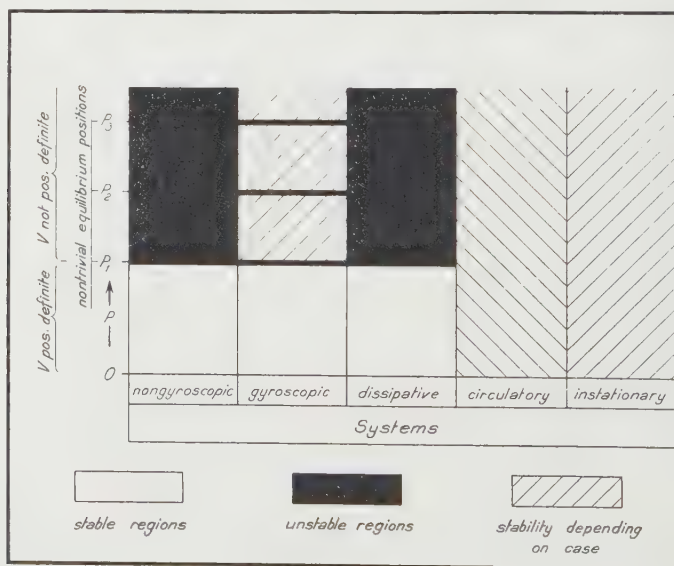
$$V = U + W \quad (14.)$$

of the strain energy  $U$  and the potential energy

$$W = -P W_0 \quad (14.)$$

of the load  $P$  [8]. Whereas  $U$  is positive definite,  $W_0$  is not negative definite; hence, the coefficients  $c_i$  in the normal form of  $V$ , positive for sufficient small values of  $P$ , decrease with increasing  $P$  and (at least part of them) change their sign. Under the load  $P_1$  for which the first of them,  $c_1$ , passes through zero,  $V$  ceases to be positive definite; at the same time, by Theorem the equilibrium becomes unstable (Table 14). Moreover, whenever  $c_i = 0$ , i. under a series of loads  $P_1 < P_2 < \dots$ , there appear, according to Theorem 11 nontrivial equilibrium configurations. Thus, we obtain at once

Table 14  
Critical loads for systems of different categories



*Theorem 14a.* In purely nongyroscopic systems, the energy method yields the smallest critical load  $P_1$ . The equilibrium method, too, yields  $P_1$  as the smallest load of a series  $P_1 < P_2 < \dots$ , the other elements of which are insignificant, since any load  $P \geq P_1$  is critical.

*Example 14.1.* Figure 14.1 shows a simplified model of an elastic rod built in at one end and compressed by an axial load. The potential energy,

$$V = \frac{1}{2} (c - P l) \vartheta^2,$$

is positive definite as long as  $P < c/l$ . The equilibrium condition is

$$(c - P l) \vartheta = 0,$$

and the differential equation of motion is

$$\ddot{\vartheta} + \frac{c - P l}{\Theta} \vartheta = 0. \quad (14.3)$$

Thus, by either of the static methods as well as by the kinetic method the critical loads  $P \geq P_1 = c/l$  are obtained.

Actual systems never are free from physical imperfections. As a consequence, in stationary systems, the trivial equilibrium configuration is slightly different from  $q_1 = q_2 = \dots = 0$ . Any such deviation, according to 11, is equivalent to the presence of constant forces. Therefore, the possibility of latent instabilities must be considered. However, according to Theorems 11, latent instabilities appear whenever  $c_i = 0$ , i. e. under the loads  $P_1, P_2, \dots$  for which the equilibrium itself is unstable. Thus, we have

*Theorem 14b:* In purely nongyroscopic systems, latent instabilities due to physical imperfections can be entirely disregarded.

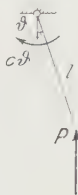


Figure 14.1

Pendulum loaded axially.

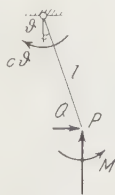


Figure 14.2

Pendulum of Figure 14.1 acted upon by constant forces.

*Example 14.2.* If, in Example 14.1, the load is slightly oblique and eccentric, these imperfections can be represented by the small constant quantities  $Q, M$  (Figure 14.2). The equilibrium condition is

$$(c - P l) \vartheta - Q l - M = 0.$$

Thus, the only latent instability arises when  $P = c/l = P_1$ , i. e. when the smallest critical load of the perfect pendulum ( $Q = M = 0$ ) is reached.



### 15. Purely Gyroscopic Systems

Most problems of critical speeds (if referred to a rotating coordinate frame) are of the purely gyroscopic type. According to Theorems 8, they differ from those considered in 14 insofar as the gyroscopic forces are capable of stabilizing the equilibrium for  $P < P_1$ . By Theorems 11, however, they do not stabilize the latent instabilities under the loads  $P_1, P_2, \dots$  (Table 14). Thus, we have

*Theorem 15a: In purely gyroscopic systems, the energy method yields the smallest critical load  $P_1$ . The equilibrium method yields the critical load  $P_1 < P_2 < \dots$ . Any other load  $P > P_1$  may or may not be critical.*

Thus, by the static methods alone it is impossible to decide whether a load  $P > P_1$  but not equal to  $P_2, P_3, \dots$  is critical or not.

In Example 8.1, provided  $c_2 > c_1$ , any angular velocity satisfying the inequality  $c_1/l \leq \omega^2 \leq c_2/l$  is critical. However, the energy method only yields  $\omega_1^2 = c_1/l$ , i. e. the smallest value, whereas by means of the equilibrium method both limits  $\omega_1^2 = c_1/l, \omega_2^2 = c_2/l$  of the critical interval are obtained. That the whole interval is critical follows only from the analysis based on the kinetic method.

By contrast with 14, the loads  $P_1, P_2, \dots$ , due to the stabilizing effect of the gyroscopic forces, may represent but latent instabilities which might remain undetected if physical imperfections were disregarded. We have, therefore,

*Theorem 15b. In any but purely nongyroscopic systems, the existence of latent instabilities due to physical imperfections must be recognized.*

If, in Example 8.1,  $c_1 = c_2$ , the equilibrium itself is stable for any angular velocity. For  $\omega_1^2 = c/l$ , however, as shown in Example 11.2, a latent instability arises.

Examples 8.1 and 11.2 represent a simple problem of critical speed. For a shaft carrying a single disc the forces in Figure 8.1 exemplify the elastic restoring force, the centrifugal and the Coriolis forces for an observer taking part in the rotation. The additional forces  $X, Y$  in Figure 11.2 represent a small eccentricity of the disc. If the shaft has two equal flexural rigidities  $c_1 = c_2$ . Then the critical angular velocity  $\omega_1$  is due to a latent instability and would escape detection if the eccentricity were neglected.

### 16. The Influence of Damping

Mechanical systems always are subjected to damping forces which, however, usually are small. From Theorems 9 follows (Table 14)

*Theorem 16a. Small dissipative forces do not affect the stability of a purely nongyroscopic system.*

There is, however, no reason to assume that other systems, likewise, are insensitive to damping.

*Example 16.1.* If, in Example 8.1, in addition to the forces shown in Figure 8.1, a damping force  $-2mb\dot{\mathbf{v}}$  is introduced (Figure 16.1), the differential equations of motion are, provided  $c_1 = c_2 = c$ ,

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} - 2\omega\dot{y} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)x = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + 2b\dot{y} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)y = 0. \quad (16.1)$$

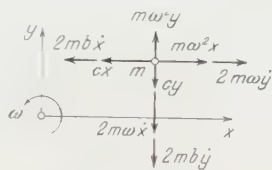


Figure 16.1

Particle of Figure 8.1 subjected to damping.

The characteristic equation is

$$\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0,$$

where

$$p_1 = 4b, \quad p_2 = 2\left(\frac{c}{m} + \omega^2 + 2b^2\right), \quad p_3 = 4b\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right), \quad p_4 = \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)^2.$$

In order that none of the four roots have a positive real part, the coefficients of the characteristic equation must satisfy the conditions of E. J. ROUTH (see [15], vol. II, p. 228),

$$p_1 = 4b > 0,$$

$$p_1 p_2 - p_3 = 4b\left(\frac{c}{m} + 3\omega^2 + 4b^2\right) > 0,$$

$$(p_1 p_2 - p_3) p_3 - p_1^2 p_4 = 64b\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)(\omega^2 + b^2) > 0,$$

$$p_4 = \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)^2 > 0.$$

Evidently, they are satisfied exactly as long as  $\omega^2 < c/m = \omega_1^2$ . Thus, for  $\omega > \omega_1$ , i. e. in the range where the particle, according to Example 8.1, is stabilized by the Coriolis force, it is again made unstable by the damping force.

From this example follows

*Theorem 16b.* Dissipative forces, applied to other than purely nongyroscopic systems, may have a destabilizing effect.

In accordance with the statement made at the end of 15, Example 16.1 represents the problem of critical speed for a shaft equipped with a single disc and subjected to internal damping. The result obtained implies that any angular velocity  $\omega > \omega_1$  should be critical. It contradicts the fact that, actually,  $\omega_1$  alone is critical while, for  $\omega > \omega_1$ , shafts of this type run smoothly. It is improbable that this discrepancy is due to the fact that external damping (air resistance) has been neglected. Equally unsatisfactory results obtained in

other cases (see [8], p. 55) suggest that, at least in other than purely nongyroscopic problems, *internal damping is inadequately represented by linear damping forces*. As a matter of fact, internal damping is characterized by a time effect (see [26], p. 237) which is suppressed if the damping forces are assumed to be linear combinations of the generalized velocities. Thus, it is to be expected that the actual behaviour of other systems, too, is more satisfactorily explained by neglecting damping:

*Theorem 16c. While in purely nongyroscopic systems it is allowed to disregard small damping forces, in any other system it is to be recommended.*

### 17. Circulatory Systems

Certain elastic stability problems are of the circulatory type. In view of Theorems 10 it is not to be expected that they can be solved by static methods.

*Example 17.1.* The double pendulum of Figure 17.1, characterized by concentrated masses and elastic restoring moments, is a simplified model of an elastic

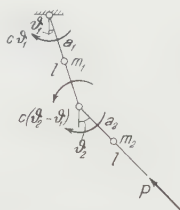


Figure 17.1

Double pendulum, loaded tangentially.

rod built in at one end and compressed by a tangential end load. Its energies are

$$T = \frac{1}{2} [m_1 a_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_2 (l \dot{\vartheta}_1 + a_2 \dot{\vartheta}_2)^2], \quad V = \frac{1}{2} c [\vartheta_1^2 + (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2],$$

the generalized forces are

$$P_1 = P l (\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad P_2 = 0.$$

Thus, we obtain the differential equations of motion

$$\left. \begin{aligned} (m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\vartheta}_2 + (2c - Pl) \vartheta_1 - (c - Pl) \vartheta_2 &= 0, \\ m_2 l a_2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\vartheta}_2 - c \vartheta_1 + c \vartheta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

The characteristic equation is

$$p_0 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_4 = 0,$$

where

$$\begin{aligned} p_0 &= m_1 m_2 a_1^2 a_2^2, \\ p_2 &= (m_1 a_1^2 + m_2 l^2) c + m_2 a_2 (l + a_2) (2c - Pl), \\ p_4 &= c^2. \end{aligned}$$

Since  $p_4 > 0$ , there does not exist any nontrivial equilibrium position. By Theorem 11a, latent instabilities are absent. Moreover, neither the equilibrium method nor the energy method yield a critical load.

Let  $m_1 = m_2 = m$  and  $a_1 = a_2 = l/2$ . Then the masses are concentrated at the two centers of gravity, and Figure 17.1 represents a prismatic, homogeneous elastic rod. The coefficients of the characteristic equation become

$$p_0 = \frac{1}{16} m^2 l^4, \quad p_2 = \frac{1}{4} m l^2 (11c - 3Pl), \quad p_4 = c^2,$$

and its discriminant is given by

$$1 - p_2^2 - 4p_0p_4 = \frac{3}{16} m^2 l^4 (39c^2 - 22cPl + 3P^2l^2).$$

Provided  $P$  is sufficiently small, the quantities  $\Delta$ ,  $p_0$ ,  $p_2$ ,  $p_4$  are positive; the roots  $\lambda^2$  are negative and thus the pendulum is stable. When

$$3 \frac{c}{l} < P < \frac{13}{3} \cdot \frac{c}{l},$$

$\Delta$  is negative; the roots  $\lambda^2$  are conjugate complex: the system is unstable. If  $P$  exceeds the upper limit,  $\Delta$  is positive again; however, since  $p_2$  is negative, both roots  $\lambda^2$  are positive: the system remains unstable. Hence, any load  $P > 3c/l$  is critical.

Example 17.1 illustrates the possibility of a complete failure of the static methods when applied to circulatory systems.

Let, in Example 17.1,  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$ ,  $a_1 = a_2 = l$ . Thus, the mass is concentrated in three points. Now we obtain

$$\text{and} \quad p_0 = 2m^2 l^4, \quad p_2 = m l^2 (7c - 2Pl), \quad p_4 = c^2,$$

$$1 - m^2 l^4 + 11c^2 - 28cPl + 4P^2l^2.$$

Again, the pendulum is stable for sufficiently small values of  $P$ . When

$$\left(\frac{7}{2} - \sqrt{2}\right) \frac{c}{l} < P < \left(\frac{7}{2} + \sqrt{2}\right) \frac{c}{l},$$

$\Delta$  is negative, and for higher values of  $P$  the coefficient  $p_2$  becomes negative. Thus, in contrast to the former result, any load  $P > (7/2 - \sqrt{2})c/l = 2.09c/l$  is critical.

The instabilities appearing in Example 17.1 have the character of self-excited oscillations, depending on the mass distribution. Since, in static investigations, the masses do not enter, we have (Table 14)

*Theorem 17: Stability problems of the circulatory type cannot be solved by static methods.*

## 18. Purely Instationary Systems

In view of the results obtained in 17, it would be surprising if stability problems of the instationary type could be treated by static methods.

*Example 18.1.* The pendulum of Figure 18.1 represents a simplified model of an elastic rod built in at one end and compressed by a pulsating axial load. Its differential equation of motion is

$$\ddot{\vartheta} + \left( \frac{c}{m a^2} - \frac{p l}{m a^2} \cos \omega t \right) \vartheta = 0. \quad (18.1)$$

Taking, as in Example 12.1,  $\tau = \omega t$ , and introducing the notation

$$\delta = \frac{c}{m a^2 \omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{p l}{m a^2 \omega^2},$$

we obtain the Mathieu equation

$$\vartheta'' + (\delta + \varepsilon \cos \tau) \vartheta = 0, \quad (18.2)$$

Figure 18.1  
Pendulum  
under pulsating  
axial load.

the solution of which is stable whenever in STRUTT'S Table (Figure 12.2) the point  $P(\delta, \varepsilon)$  lies in the shaded region.

If the mass of the pendulum is concentrated at its center,  $a = l/2$ ,

$$\delta = \frac{4c}{m l^2 \omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{4p}{m l \omega^2}.$$

If, on the other hand, it is distributed between the two end sections, we obtain by replacing  $m$  by  $m/2$  and taking  $a = l$ ,

$$\delta' = \frac{2c}{m l^2 \omega^2} = \frac{1}{2} \delta, \quad \varepsilon' = -\frac{2p}{m l \omega^2} = \frac{1}{2} \varepsilon.$$

As is seen in Figure 12.2, it is possible that of the two points  $P(\delta, \varepsilon)$ ,  $P'(\delta/2, \varepsilon/2)$  only one is stable. Thus, here too, stability depends on the mass distribution.

From this example follows (Table 14)

*Theorem 18. Stability problems of the purely instationary type cannot be solved by static methods.*

This theorem, of course, does not apply to the more general case where gyroscopic or dissipative forces alone are instationary.

## BIBLIOGRAPHY

- [1] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability* (McGraw-Hill, New York and London, 1936).
- [2] J. RATZERSDORFER, *Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken* (Springer, Vienna, 1936).
- [3] A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950).
- [4] C. B. BIEZENO and R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin, 1938).
- [5] H. ZIEGLER, ZAMP 2, 265 (1951).
- [6] A. TRÖSCH, Ing.-Arch. 20, 258 (1952).
- [7] J. MORRIS, Aircraft Eng. 23, 375 (1951).
- [8] H. ZIEGLER, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).
- [9] H. ZIEGLER, ZAMP 3, 96 (1952).
- [10] W. T. KOITER, Proc. Kon. Akad. Wetensch., to be published.
- [11] H. ZIEGLER, Ing.-Arch. 20, 377 (1952).



- [12] H. ZIEGLER, *Elem. Math.* **7**, 121 (1952).
- [13] S. TIMOSHENKO and D. H. YOUNG, *Engineering Mechanics* (McGraw-Hill, New York and London, 1940).
- [14] J. P. DEN HARTOG, *Mechanics* (McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1948).
- [15] E. J. ROUTH, *Dynamics of a System of Rigid Bodies* (Macmillan, London, 1930).
- [16] S. TIMOSHENKO and D. H. YOUNG, *Advanced Dynamics* (McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1948).
- [17] A. A. ANDRONOW and C. E. CHAIKIN, *Theory of Oscillations* (Princeton University Press, Princeton, 1949).
- [18] TH. VON KÁRMÁN and M. A. BLOT, *Mathematical Methods in Engineering* (McGraw-Hill, New York and London, 1940).
- [19] E. MEISSNER and H. ZIEGLER, *Mechanik* (Birkhäuser, Basel, 1946–1952).
- [20] R. ZURMÜHL, *Matrizen* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950).
- [21] H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra* (Vieweg, Braunschweig, 1898).
- [22] R. COURANT and D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik* (Springer, Berlin, 1931–1937).
- [23] E. T. WHITTAKER, *Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper* (Springer, Berlin, 1924).
- [24] J. J. STOKER, *Nonlinear Vibrations* (Interscience Publishers, New York, 1950).
- [25] L. EULER, *Histoire de l'Académie*, vol. 13 (Berlin, 1757).
- [26] K. KLOTTER, *Technische Schwingungslehre* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1951).
- [27] H. ZIEGLER, *Schweiz. Bauztg.* **66**, 87 (1948).
- [28] P. FILLUNGER, *Z. angew. Math. Mech.* **6**, 294 (1926).
- [29] H. ZIEGLER, *Schweiz. Bauztg.* **66**, 463 (1948).
- [30] E. LÜSCHER, *Schweiz. Bauztg.* **71**, 172 (1953).
- [31] M. BECK, *ZAMP* **3**, 225 (1952).
- [32] E. METTLER, *Mitt. Forsch.-Inst. GHH-Konzern* **8**, 1 (1940).
- [33] E. METTLER, *Ing.-Arch.* **17**, 418 (1949).
- [34] E. METTLER, *Forsch.-Hefte Gebiete Stahlbaues* **4**, 1 (1941).
- [35] A. G. GREENHILL, *Proc. Inst. mech. Eng.* **1883**, p. 182.
- [36] R. GRAMMEL, *Z. angew. Math. Mech.* **3**, 262 (1923), see also [4], p. 540.
- [37] M. BECK, Thesis, Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich (to be published).
- [38] W. KELLER, Diplomarbeit, Technische Hochschule Stuttgart (Prof. R. GRAMMEL), 1951.
- [39] A. STODOLA, *Z. ges. Turbinenwesen* **15**, 253 (1918).
- [40] R. GRAMMEL, *Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950).
- [41] R. MELAN, *Z. öster. Ing.- u. Arch.-Ver.* **69**, 610 (1917).
- [42] CH. WEHRLI, Diplomarbeit, Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich (1952).

# Untersuchung einiger Integrale mit Bessel-Funktionen, die für die Elastizitätstheorie von Bedeutung sind

Von JOHANNES DÖRR, Darmstadt<sup>1)</sup>

## 1. Aufgabenstellung

In neueren Untersuchungen der Elastizitätstheorie<sup>2)</sup> treten Integrale Form

$$I^{(m)}(t_n, t_k) = \int_0^\infty \frac{t^m J_1^2(t)}{(t^2 - t_n^2)(t^2 - t_k^2)} dt, \quad (m = 0, 1, 2)$$

auf, worin die  $t_n$  und  $t_k$  Nullstellen der Bessel-Funktion  $J_1(t)$  sind. Durch Partialbruchzerlegungen lassen sich diese Integrale auf die folgenden zwei Typen zurückführen:

$$Q(\pm t_n) = \int_0^\infty \frac{J_1^2(t)}{t \pm t_n} dt, \quad R(\pm t_n) = \int_0^\infty \frac{J_1^2(t)}{(t \pm t_n)^2} dt.$$

Die Integrale  $R(\pm t_n)$  treten nur im Falle  $k = n$  auf. Die numerische Berechnung dieser Integrale ist wegen des unendlichen Integrationsweges mühsam und ungenau. Ein eleganterer, von SZABÓ angegebener Weg bietet sich durch die Reihenentwicklung des Integranden, indem man  $t \pm t_n = z$  setzt und auf eine Reihe

$$J_1(z \mp t_n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{1-m}(z) J_m(\mp t_n)$$

zurückgreift. Durch Quadrieren erhält man daraus eine Doppelreihe, mit deren Hilfe sich die Integrale  $Q$  und  $R$  berechnen lassen, wobei allerdings der Arbeitsaufwand wegen der Doppelsummen recht beträchtlich ist.

Im folgenden wird ein Weg gezeigt, die Integrale mit Hilfe numerischer Integration (zum Beispiel mit der Simpson-Regel) schnell und bequem berechnen, indem wir sie in andere Integrale mit endlich langem Integrationsweg

<sup>1)</sup> Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule.

<sup>2)</sup> I. SZABÓ, *Die achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf elastischer Unterlage*, Ing.-Arch. 19, 128 (1951); *Beiträge zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte besonders bei elastischer Lagerung*, Ing.-Arch. 19, 348 (1951).

weg und regulärem Integranden überführen. Wir wollen dabei aber die Aufgabe verallgemeinern, indem wir folgende Integrale betrachten:

$$Q_m(\pm a) = \int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t \pm a} dt \quad \text{mit } a = + |a|, \quad (1)$$

$$R_m(+a) = \int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt \quad \text{mit } a = + |a|, \quad (2a)$$

$$R_m(-t_{n,m}) = \int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{(t - t_{n,m})^2} dt \quad \text{mit } J_m(t_{n,m}) = 0 \quad \text{und } t_{n,m} \geq 0. \quad (2b)$$

Der Index  $m$  soll positiv ganz sein. Die Integrale  $Q_m(\pm a)$  sind als Cauchysche Hauptwerte zu verstehen.

## 2. Herleitung einer neuen Integraldarstellung für $Q_m(\pm a)$

Eine funktionentheoretische Auswertung der Integrale (1) wird dadurch erschwert, dass im Integranden das Quadrat einer Bessel-Funktion auftritt. Für eine unmittelbare numerische Integration ist ausserdem der unendlich lange Integrationsweg lästig. Um beide Übelstände zu beseitigen, ziehen wir die bekannte Integraldarstellung

$$J_m^2(t) = (-1)^m \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2m\vartheta) J_0(2t \cos\vartheta) d\vartheta \quad (3)$$

heran und erhalten damit für  $Q(\pm a)$  Doppelintegrale. Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist ohne weiteres möglich, wenn vor  $a$  das positive Vorzeichen steht, da dann der Integrand im gesamten Integrationsgebiet regulär ist und für  $t \rightarrow \infty$  genügend stark gegen Null strebt. Es ist also

$$Q_m(+a) = (-1)^m \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2m\vartheta) \int_0^{\infty} \frac{J_0(2t \cos\vartheta)}{t + a} dt d\vartheta. \quad (4)$$

Die Integration über  $t$  lässt sich jetzt ausführen und führt zu dem Ergebnis

$$Q_m(+a) = (-1)^m \int_0^{\pi/2} \cos(2m\vartheta) [S_0(2a \cos\vartheta) - N_0(2a \cos\vartheta)] d\vartheta.$$

Darin ist  $S_0$  die Struvesche und  $N_0$  die Neumannsche Funktion nullter Ordnung.

Aus der bekannten Beziehung

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(2a \cos \vartheta) \cos \nu \vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} J_{(\mu-\nu)/2}(a) J_{(\mu+\nu)/2}(a)$$

folgt auf Grund von

$$N_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} [J_\mu - (-1)^m J_{-\mu}]_{\mu=m}$$

die hier für uns wichtige Beziehung<sup>1)</sup>

$$\int_0^{\pi/2} N_0(2a \cos \vartheta) \cos(2m\vartheta) \, d\vartheta = \frac{\pi}{4} [J_m(a) N_{-m}(a) + J_{-m}(a) N_m(a)] - (-1)^m \frac{\pi}{2} J_m(a) N_m(a).$$

Damit erhält man schliesslich

$$\int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t+a} \, dt = -\frac{\pi}{2} J_m(a) N_m(a) + (-1)^m \int_0^{\pi/2} S_0(2a \cos \vartheta) \cos(2m\vartheta) \, d\vartheta.$$

Damit haben wir für  $Q_m(-a)$  eine Darstellung gefunden, die für die numerische Auswertung wesentlich angenehmer ist als (1).

Bei dem Versuch, für  $Q_m(-a)$  eine ähnliche Darstellung zu finden, stoßt man zunächst auf den jetzt im Integranden auftretende Pol  $t = a$ . Da der Integrand, abgesehen von diesem Pol, als eine in der komplexen  $t$ -Ebene regulär analytische Funktion aufgefasst werden darf, lässt sich der Cauchysche Hauptwert (1) wie folgt darstellen

$$Q_m(-a) = \frac{1}{2} \int_{\underbrace{0}_{-}}^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t-a} \, dt + \frac{1}{2} \int_{\underbrace{0}_{-}}^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t-a} \, dt.$$

Das Zeichen  $\underbrace{\quad}_{-}$  bzw.  $\underbrace{\quad}_{+}$  soll bedeuten, dass der Weg unterhalb bzw. oberhalb am Pol  $t = a$  vorbei von Null nach Unendlich geführt werden soll. Auf diesen beiden Wegen ist der Integrand regulär analytisch, so dass wir jetzt dieselben Überlegungen wie bei  $Q(+a)$  anwenden dürfen. Man erhält damit die Integraldarstellung (3)

$$Q_m(-a) = (-1)^m \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2m\vartheta) \left\{ \int_{\underbrace{0}_{-}}^{\infty} \frac{J_0(2t \cos \vartheta)}{t-a} \, dt + \int_{\underbrace{0}_{-}}^{\infty} \frac{J_0(2t \cos \vartheta)}{t-a} \, dt \right\} d\vartheta \quad (7)$$

<sup>1)</sup> J. DÖRR, Zwei Integralgleichungen erster Art, die sich mit Hilfe Mathiescher Funktionen lösen lassen, ZAMP 6, 427 (1952).

Nun gilt

$$J_0(k t) = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(k t) + \frac{1}{2} H_0^{(2)}(k t).$$

Aus dem asymptotischen Verhalten der Hankel-Funktionen folgt dann

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(2 t \cos \vartheta)}{t - a} dt}_{\text{}} = \pi i H_0^{(1)}(2 a \cos \vartheta) + \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} \frac{H_0^{(1)}(2 t \cos \vartheta)}{t - a} dt + \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} \frac{H_0^{(2)}(\dots)}{t - a} dt.$$

Dabei denken wir uns  $H_0^{(1)}(k t)$  bzw.  $H_0^{(2)}(k t)$  eindeutig gemacht durch einen von  $0$  nach  $t \rightarrow \infty$  über die reelle Achse gelegten Schnitt. Beim ersten Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung liegt der Integrationsweg auf dem oberen und beim zweiten Integral auf dem unteren Schnittufer. Setzen wir auf der rechten Seite in der letzten Gleichung  $t = -z$  und beachten noch die Umlaufrelationen für Hankel-Funktionen, so folgt schliesslich

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(2 t \cos \vartheta)}{t - a} dt}_{\text{}} = \pi i H_0^{(1)}(2 a \cos \vartheta) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{H_0^{(2)}(2 z \cos \vartheta)}{z + a} dz - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(\dots)}{z + a} dz \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right\} \quad (7b)$$

$$= \pi i H_0^{(1)}(2 a \cos \vartheta) - \int_0^{\infty} \frac{J_0(2 z \cos \vartheta)}{z + a} dz.$$

Mit denselben Überlegungen erhalten wir

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(2 t \cos \vartheta)}{t - a} dt}_{\text{}} = -\pi i H_0^{(2)}(2 a \cos \vartheta) - \int_0^{\infty} \frac{J_0(2 z \cos \vartheta)}{z + a} dz. \quad (7c)$$

Mit diesen Ergebnissen nimmt (7a) folgende Form an

$$J_m(a) = (-1)^m \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2 m \vartheta) \left\{ \pi N_0(2 a \cos \vartheta) + \int_0^{\infty} \frac{J_0(2 z \cos \vartheta)}{z + a} dz \right\} d\vartheta.$$

Daraus folgt aber mit den bereits hergeleiteten Beziehungen (4), (5) und (6) für beliebige Werte  $a = +|a|$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t - a} dt = -\frac{\pi}{2} J_m(a) N_m(a) - (-1)^m \int_0^{\pi/2} S_0(2 a \cos \vartheta) \cos(2 m \vartheta) d\vartheta. \quad (8)$$



Durch Addition und Subtraktion von (6) und (8) erhält man noch die Beziehungen:

$$\int_0^{\infty} \frac{t J_m^2(t)}{t^2 - a^2} dt = -\frac{\pi}{2} J_m(a) N_m(a), \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t^2 - a^2} dt = -\frac{(-1)^m}{a} \int_0^{\pi/2} S_0(2a \cos \vartheta) \cos(2m\vartheta) d\vartheta. \quad (9)$$

Auch diese beiden Beziehungen gelten für beliebige Werte  $a = +|a|$ . In beiden links stehenden Integrale sind wieder als Cauchysche Hauptwerte zu verstehen. Für  $m = 0$  muss  $a \neq 0$  sein.

### 3. Herleitung neuer Integraldarstellungen für $R_m(+a)$ und $R_m(-t_n)$

Der Integrand von  $Q_m(+a)$  ist auf dem gesamten Integrationsweg regulär analytisch. Deshalb gilt

$$R_m(+a) = -\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t+a} dt.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{(t+a)^2} dt &= +\frac{\pi}{2} [J_m(a) N_{m-1}(a) - J_{m+1}(a) N_m(a)] \\ &- (-1)^m 2 \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{2}{\pi} - S_1(2a \cos \vartheta) \right] \cos(2m\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Zur Berechnung von  $R_m(-t_n)$  betrachten wir zunächst den Ausdruck

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{(t-a)^2} dt}_{\text{Hauptwert}} = \frac{\partial}{\partial a} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{t-a} dt}_{\text{Hauptwert}} \quad \text{mit} \quad a = +|a|.$$

Bei diesen Integralen wird also der Integrationsweg unterhalb am Pol  $t = a$  vorbei von  $t = 0$  nach  $t = \infty$  geführt, so dass der Integrand auf dem gesamten Integrationsweg regulär analytisch ist. Mit Hilfe der Integraldarstellung (7) und Beziehung (7b) erhält man dann

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{J_m^2(t)}{(t-a)^2} dt}_{\text{Hauptwert}} = (-1)^m \frac{\partial}{\partial a} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2m\vartheta) \left[ \pi i H_0^{(1)}(2a \cos \vartheta) - \int_0^{\infty} \frac{J_0(2z \cos \vartheta)}{z+a} dz \right] d\vartheta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial a} \{ \pi i J_m(a) H_m^{(1)}(a) - Q_m(+a) \} \\
 &= + R_m(+a) + \pi i \{ J_m(a) H_{m-1}^{(1)}(a) - J_{m+1}(a) H_m^{(1)}(a) \}.
 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung  $a = t_{n,m}$  gilt

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{J_m^2(t)}{(t - t_{n,m})^2} dt &= \int_{-\infty}^\infty \frac{J_m^2(t)}{(t - t_{n,m})^2} dt \\
 &= (-1)^m 2i \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{2}{\pi} - S_1(2t_{n,m} \cos \vartheta) \right] \cos(2m\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \\
 &\quad + \frac{\pi}{2} J_{m+1}(t_{n,m}) N_m(t_{n,m}).
 \end{aligned}$$

Damit haben wir auch für  $R_m(-t_{n,m})$  und  $R_m(+a)$  Integraldarstellungen gewonnen, die eine mühelose numerische Auswertung erlauben.

### Schlussbemerkung

Die Struveschen Funktionen  $S_0(x)$  und  $S_1(x)$  sind zur Zeit siebenstellig ver-  
 afelt<sup>1)</sup> für den Bereich  $x = 0(0,02)16$ . Dieser Wertebereich ist für die in der  
 Elastizitätstheorie auftretenden Problemstellungen nicht umfassend genug.  
 Die Berechnung von  $S_0(x)$  und  $S_1(x) = 2/\pi \cdot S'_0(x)$  für grössere  $x$ -Werte ist  
 über relativ bequem mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung

$$S_0(x) \sim N_0(x) + \frac{2}{\pi x} \left[ 1 - \frac{1^2}{x^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{x^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{x^6} + \dots \right]$$

möglich.

### Summary

In the mathematical analysis of elastically supported, thick circular plates,  
 certain improper integrals occur which must be evaluated between the limits 0  
 and  $\infty$ . The integrals consist of the square of a Bessel function multiplied by a  
 fractional rational function. These integrals are transformed into other integrals  
 having a finite integration path and regular integrands, in which Struve functions  
 of the first and second order replace the squared Bessel functions.

Eingegangen: 17. September 1952).

<sup>1)</sup> G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2. Aufl. (Cambridge University  
 Press, London 1944), S. 666.

## Le calcul de flutter en régime supersonique

Par WERNER RUPPEL, Madrid, et ROBERT WEBER, La Haye

### Introduction

L'établissement de l'équation du flutter, pour le calcul de la vitesse critique de flutter d'une surface portante d'un avion, nécessite la détermination de trois genres de coefficients: les coefficients massiques, les coefficients élastiques et les coefficients aérodynamiques. La détermination numérique de ces coefficients est assez longue et délicate, à part celle des coefficients élastiques qui, en général, peuvent se déduire directement des coefficients massiques. Le calcul des coefficients massiques ayant déjà été traité ailleurs [1]<sup>1)</sup>, la présente étude se limitera à la seule détermination numérique des coefficients aérodynamiques.

Les paramètres aérodynamiques apparaissant dans les formules pour les coefficients aérodynamiques sont des fonctions transcendentes de plusieurs variables et complexes. Généralement le calcul de ces coefficients se fait à l'aide de tables numériques pour les paramètres aérodynamiques [2], et le volume de ces calculs est assez grand. Pour pouvoir cependant les effectuer dans un temps raisonnable, on a souvent recours à des méthodes mécanographiques. Mais, comme l'usage des tables numériques présente certains inconvénients pour la détermination mécanographique des coefficients aérodynamiques, il est nécessaire de développer une méthode de calcul évitant l'emploi de ces tables.

Le présent rapport a pour but de donner une telle méthode de calcul mécanographique des coefficients aérodynamiques. La méthode est exposée pour le cas général d'une aile en flèche munie d'un aileron indéformable en lui-même.

On notera cependant que la méthode n'est exacte que pour le cas d'une aile plane et pour certains cas limites de l'aile tridimensionnelle qui, dans le supersonique, peuvent être traités rigoureusement au moyen des paramètres pour l'aile plane (par exemple l'aile en delta). Pour le cas général d'une aile tridimensionnelle, les paramètres aérodynamiques ne sont en effet pas connus, et on est alors obligé de recourir à la même méthode d'approximation que dans le subsonique: à l'intégration par tranches planes successives, en négligeant ainsi l'effet du bord extérieur libre de la surface portante. Cette approximation semble donner, comme dans le subsonique, des résultats assez satisfaisants.

La méthode qui va être exposée et qui est indépendante de tout système de notations, présente l'avantage que la fréquence réduite, apparaissant dans les formules pour les paramètres aérodynamiques comme variable auxiliaire, peut être complètement éliminée. Il ne reste plus, de ce fait, dans l'équation du flutter

<sup>1)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 144.

que les seules inconnues intéressantes pour le problème : la fréquence de flutter et le nombre de Mach critique correspondant à la vitesse critique de flutter cherchée. De plus, comme on peut éviter l'emploi de tables numériques, on évitera également les erreurs numériques d'interpolation qui se présentent toujours lorsqu'on utilise de telles tables. Enfin, la méthode est applicable à toute surface élastique exposée à un écoulement supersonique (par exemple une pale).

Remarquons encore que la méthode pourra être étendue au régime subsonique lorsqu'on connaîtra un développement des paramètres aérodynamiques dans ce régime ; il sera toutefois nécessaire alors d'isoler la singularité à l'origine.

## 1. Dénominations

Abréviation	Dimension	Désignation
	m	Coordonnée dans le sens de l'envergure
$\Delta z_n$	m	Largeur d'une tranche
$l(z)$	m	Profondeur totale du profil
$x l$	m	Coordonnée dans le sens de la profondeur
$x_0 l$	m	Ordonnée sur l'axe des $x l$ du bord d'attaque du profil
$\tau l$	m	Profondeur de l'aileron
$\varepsilon l$	m	Distance du bord d'attaque de l'aileron à son axe de rotation
$\delta$	—	Angle compris entre l'axe des $x$ et la direction d'une nervure
$\delta_0$	—	Angle compris entre l'axe des $z$ et le bord d'attaque du profil
$\delta_m$	—	Angle de flèche moyen du profil (valeur moyenne des angles du bord d'attaque et du bord de fuite avec l'axe des $z$ )
$\mu(x, z)$	kg m <sup>-3</sup> s <sup>2</sup>	Répartition de la masse du profil par unité de surface
$Y_i(x, z)$	m	$i$ -ième déformation propre de la surface portante
$y_0(z)$	m	Amplitude de translation du bord d'attaque
$\beta(z)$	—	Angle de rotation des nervures par rapport au plan $x z$
$\gamma_R(z)$	—	Angle de rotation de l'aileron par rapport au plan des nervures
$\Pi_i(x, z)$	kg m <sup>-2</sup>	Pression aérodynamique exercée en un point de la surface portante par suite de la déformation $Y_i(x, z)$ de la surface
$\nu$	s <sup>-1</sup>	Fréquence de flutter
$\nu_i$	s <sup>-1</sup>	Fréquence propre de la $i$ -ième déformation $Y_i(x, z)$
$\varrho_0$	kg m <sup>-4</sup> s <sup>2</sup>	Masse spécifique de l'air
$V$	m s <sup>-1</sup>	Vitesse du vent (dans la direction de l'axe des $x$ )
$c$	m s <sup>-1</sup>	Vitesse du son
$M$	—	Nombre de Mach
$\omega_r = \nu l / (2 V)$	—	Fréquence réduite (définition KÜSSNER)
$t$	s	Coordonnée du temps

## 2. Equation du flutter

### 2. 1. Déformation

Considérons une section d'aile parallèle à la direction des nervures (voir figure 1). Nous supposons les nervures indéformables en elles-mêmes lorsqu'il y a une déformation de l'aile effectue un mouvement vibratoire. L'amplitude  $Y$  d'un point  $P(z, x)$  quelconque de cette section sera alors donnée par l'équation [3]:

$$Y(z, x) = y_0(z + h) + \frac{h}{\sin \delta} \beta(z + h). \quad (1)$$

En développant  $y_0(z + h)$  et  $\beta(z + h)$  en une série de TAYLOR autour du point  $h = 0$ , et en remplaçant  $h$  par sa valeur:

$$h = l(x - x_0) \frac{\cos \delta_0 \sin \delta}{\cos(\delta_0 - \delta)}$$

qui s'obtient à partir du triangle  $PQR$  de la figure 1, l'équation (1) pour  $Y(z, x)$  devient:

$$Y(z, x) = \frac{l}{2} \sum_r \gamma_r(z) l^r \left[ \frac{x(z) - x_0(z)}{l/2} \right]^r = \frac{l}{2} \sum_r \gamma_r(z) 2^r [x(z) - x_0(z)]^r. \quad (2)$$

Cette équation représente la déformation d'une section d'aile parallèle à l'axe des  $x$ .

Les coefficients  $\gamma_r(z)$  sont sans dimension et s'expriment à l'aide des données initiales. On a:

$$\gamma_0(z) = \frac{y_0(z)}{l/2},$$

$$\gamma_1(z) = \left[ \beta(z) + y'_0(z) \sin \delta(z) \right] \frac{\cos \delta_0(z)}{\cos[\delta_0(z) - \delta(z)]},$$

$$\gamma_2(z) = \left[ \beta'(z) + y''_0(z) \frac{\sin \delta(z)}{2} \right] \frac{\cos^2 \delta_0(z) \sin \delta(z)}{\cos^2[\delta_0(z) - \delta(z)]},$$

$$\gamma_3(z) = \left[ \frac{1}{2} \beta''(z) + y'''_0(z) \frac{\sin \delta(z)}{6} \right] \frac{\cos^3 \delta_0(z) \sin^2 \delta(z)}{\cos^3[\delta_0(z) - \delta(z)]}, \quad \text{etc.}$$

avec

$$y'_0(z) = \frac{dy_0(z)}{dz}, \quad \dots, \quad \text{etc.},$$

$$\beta'(z) = \frac{d\beta(z)}{dz}, \quad \dots, \quad \text{etc.}$$

et, d'une façon générale,

$$\gamma_r(z) = \left[ \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}\beta(z)}{dz^{r-1}} + \frac{d^r y_0(z)}{dz^r} \cdot \frac{\sin \delta}{r!} \right] \frac{\cos^r \delta_0(z) \sin^{r-1} \delta(z)}{\cos^r[\delta_0(z) - \delta(z)]}. \quad (r \geq 1)$$



Le cas particulier de l'aile droite s'obtient en posant  $\delta_0 = 0$  et celui des nervures parallèles à l'axe des  $x$  en posant  $\delta = 0$ .

Dans ce qui suit, nous nous limiterons à un nombre fini de termes de la série (2) et considérerons de plus une aile comprenant un aileron effectuant un mouvement de rotation d'amplitude  $\gamma_R$  autour de sa charnière. Nous suppose-

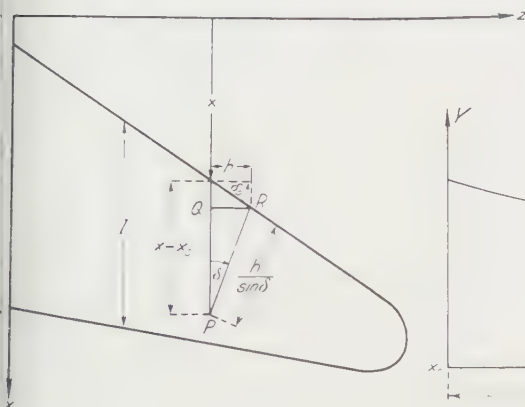


Fig. 1

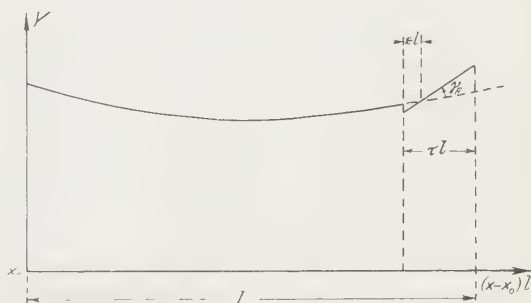


Fig. 2

rons l'aileron indéformable. La déformation d'une section d'aile parallèle à l'axe des  $x$  s'écrira alors (voir figure 2):

$$Y(z, x) = \frac{l}{2} \left[ \sum_{r=0}^{R-1} \gamma_r(z) 2^r (x - x_0)^r + 2 \eta (x - x_0 - 1 + \tau - \varepsilon) \gamma_R \right] \quad (3)$$

avec  $\eta = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 - \tau, \\ 1 & \text{pour } 1 - \tau \leq x \leq 1. \end{cases}$

Dans le cas où l'aileron reste toujours horizontal, on posera:

$$\gamma_R = -\gamma_1 - 4(1 - \tau + \varepsilon) \gamma_2.$$

## 2.2. Les coefficients de l'équation du flutter

On sait que la vitesse critique de flutter s'obtient par la résolution d'une équation donnée sous la forme d'un déterminant complexe:

$$\left| \frac{1}{\gamma^2} \varphi_{ik} - \mu_{ik} + A_{ik} \right| = 0. \quad (4)$$

Les coefficients de cette équation sont généralement définis par les formules suivantes:

Coefficient massique

$$\mu_{ik} = \begin{cases} \int \int l(z) Y_i(x, z) \mu(x, z) Y_k(x, z) dx dz & \text{pour } i = k, \\ 0 & \text{pour } i \neq k; \end{cases}$$

Coefficient élastique

$$\varphi_{ik} = \begin{cases} \nu_i^2 \mu_{ii} & \text{pour } i = k, \\ 0 & \text{pour } i \neq k; \end{cases}$$

Coefficient aérodynamique

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \int \int l(z) Y_i(x, z) \Pi_k(x, z) dx dz,$$

$Y_i(x, z)$  et  $Y_k(x, z)$  représentant les formes propres calculées de la surface portante ou encore les formes de résonance obtenues dans un essai au sol. Les intégrales dans ces formules s'étendent à toute la surface portante.

On voit que pour calculer le coefficient  $A_{ik}$  il est nécessaire de connaître la pression  $\Pi_k$  exercée en un point de l'aile par suite de la déformation  $Y_k$  de l'aile. Or cette pression  $\Pi_k$  n'est connue explicitement que pour le cas d'une aile «plane», c'est-à-dire une aile à bords parallèles et d'envergure infinie. Pour un cas pratique de calcul de la vitesse critique de flutter d'une aile d'envergure finie, on est alors obligé de recourir à une méthode d'approximation qui consiste à diviser l'aile en un certain nombre de tranches par des sections parallèles à la direction du vent. On suppose que ces tranches d'ailes ont leurs bords parallèles et que la déformation est constante dans chaque tranche. Cette méthode conduit à la définition suivante du coefficient  $A_{ik}$ :

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \sum_n \left\{ l_n(z_n) \int_0^1 Y_i(x, z_n) \Pi_k(x, z_n) dx \right\} \Delta z_n, \quad (5)$$

$l_n(z_n)$  désignant la profondeur moyenne de la tranche  $n$ ,  $Y_i(x, z_n)$  désignant la déformation «moyenne» de cette tranche et  $\Pi_k(x, z_n)$  désignant la pression exercée en un point  $x$  de cette tranche par suite de la déformation  $Y_k(x, z_n)$ .

Dans ce qui suit, nous nous occuperons uniquement du calcul du coefficient  $A_{ik}$ , le calcul des  $\mu_{ik}$  et  $\varphi_{ik}$  pouvant se faire de la manière habituelle, c'est-à-dire en divisant l'aile en tranches parallèles aux nervures.

### 2.3. Calcul du coefficient aérodynamique $A_{ik}$

D'après l'équation (3), on voit que la déformation  $Y_i$  peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des termes  $\gamma_{ir}$  qui s'obtiennent à partir des données initiales du problème. On montre que la pression  $\Pi_k(x, z_n)$  peut également s'écrire comme combinaison linéaire des termes  $\gamma_{ks}$  correspondant à

déformation  $Y_k$  (voir Annexe, page 137):

$$\Pi_k(x, z_n) = \sum_{s=0}^R \gamma_{ks}(z_n) p_s(x). \quad (6)$$

En introduisant les équations (3) et (6) dans l'équation (5), on obtient pour  $A_{ik}$ :

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \sum_n \left\{ l_n \int_0^1 \left( \frac{l_n}{2} \sum_{r=0}^{R-1} \gamma_{ir} 2^r (x - x_0)^r \right) \left( \sum_{s=0}^R \gamma_{ks} p_s \right) dx \right. \\ \left. + \int_{1-\tau}^1 \frac{l_n}{2} \gamma_{iR} 2 (x - x_0 - 1 + \tau - \varepsilon) \sum_{s=0}^R \gamma_{ks} p_s dx \right\} \Delta z_n$$

et, en transformant légèrement cette équation:

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \sum_n \left\{ \frac{l_n}{2} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{s=0}^R \gamma_{ir} \gamma_{ks} l_n \int_0^1 2^r (x - x_0)^r p_s dx \right. \\ \left. + \frac{l_n}{2} \sum_{s=0}^R \gamma_{iR} \gamma_{ks} l_n \int_{1-\tau}^1 2 (x - x_0 - 1 + \tau - \varepsilon) p_s dx \right\} \Delta z_n. \quad (7)$$

Les intégrales apparaissant dans l'équation (7) peuvent être ramenées au cas particulier de l'aile droite ( $\delta_m = 0$ ), c'est-à-dire d'une aile ayant ses bords perpendiculaires à la direction du vent, par la relation:

$$p_s = \cos \delta_m (p_s)_{\delta_m=0}.$$

En introduisant encore les abréviations suivantes:

$$l_n \int_0^1 2^r (x - x_0)^r (p_s)_{\delta_m=0} dx = q_0 V^2 \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \frac{l_n}{2} m_{rs}, \quad (0 \leq r \leq R-1) \quad (8a)$$

$$l_n \int_{1-\tau}^1 2 (x - x_0 - 1 + \tau - \varepsilon) (p_s)_{\delta_m=0} dx = q_0 V^2 \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \frac{l_n}{2} m_{Rs}, \quad (8b)$$

où les paramètres  $m_{rs}$  sont des paramètres aérodynamiques qui peuvent être explicitement calculés (voir Annexe, page 141), l'équation (7) pour  $A_{ik}$  devient:

$$A_{ik} = \left( \frac{V}{v} \right)^2 q_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_n \left( \frac{l_n}{2} \right)^2 \left( \sum_{r=0}^R \sum_{s=0}^R \gamma_{ir} m_{rs} \gamma_{ks} \right) \Delta z_n$$

ou bien, en notation matricielle:

$$A_{ik} = \left( \frac{V}{v} \right)^2 q_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_n \left( \frac{l_n}{2} \right)^2 [\gamma_{ir}] [m_{rs}] [\gamma_{ks}] \Delta z_n. \quad (9)$$

Dans cette équation :

$[m_{rs}]$  est une matrice carrée, représentant les paramètres aérodynamiques de l'aile pour la tranche  $n$ ;

$[\gamma_{ir}]$  est un vecteur contrevariant (ligne) représentant la  $i$ -ième déformation de l'aile pour la tranche  $n$ ;

$[\gamma_{sk}]$  est un vecteur covariant (colonne) représentant la  $k$ -ième déformation de l'aile pour la tranche  $n$ .

Lorsque l'aile à étudier a des nervures parallèles à l'axe des  $x$  ( $\delta = 0$ ), l'ordre de chacune des trois matrices ci-dessus diminue d'une unité.

Les paramètres aérodynamiques  $m_{rs}$  sont représentés par des fonctions continues de la fréquence réduite  $\omega_r$  (du moins pour des valeurs finies de  $\omega_r$ ). On peut donc développer ces fonctions en des séries convergentes autour du point  $\omega_r = 0$ . Ces développements sont connus sous la forme générale suivante (voir Annexe, page 143) :

$$m_{rs} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} m_{rs,\sigma} (-j \omega_r)^{\sigma}, \quad (1)$$

$j$  étant l'unité imaginaire.

Les coefficients  $m_{rs,\sigma}$  sont des fonctions du nombre de Mach et, pour les ailerons, des paramètres de l'aileron, de certaines grandeurs géométriques de l'aileron.

Le nombre de termes nécessaires de cette série dépend d'une part de la précision désirée et d'autre part de  $M$  et de  $\omega_r$ . Pour les problèmes stationnaires (divergence, inversion, stabilité, etc. [4]) caractérisés par des valeurs de  $\omega_r$  extrêmement faibles, ainsi que pour les problèmes de flutter à très haute vitesse, on pourra se limiter aux deux premiers termes de la série. Pour les calculs de flutter usuels ( $1 \leq M \leq 2$ ) il faudra en général prendre les huit premiers termes de la série ( $0 \leq \sigma \leq 7$ ).

En introduisant la série (10) dans l'équation (9) on obtient :

$$A_{ik} = \left(\frac{V}{v}\right)^2 \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_n \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-j \omega_r)^{\sigma} \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 [\gamma_{ir}] [m_{rs,\sigma}] [\gamma_{sk}] \Delta z_n$$

ou bien :

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= \left(\frac{V}{v}\right)^2 \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \\ &\times \sum_n \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-j)^{\sigma} \left(\frac{2 \omega_r}{l_n}\right)^{\sigma} \left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} [\gamma_{ir}] [m_{rs,\sigma}] [\gamma_{sk}] \Delta z_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En inversant la suite des sommations dans cette équation et en remarquant que le rapport  $2 \omega_r / l_n = v / V$  ne dépend pas de la tranche  $n$  considérée, on a finalement pour  $A_{ik}$  :

$$A_{ik} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-j)^{\sigma} \left(\frac{v}{V}\right)^{\sigma+2} A_{\sigma} \quad (1)$$

avec

$$A_{\sigma} = \sum_n \left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} B_{\sigma n} A_{z_n} \quad (13a)$$

et

$$B_{\sigma n} = [\gamma_{ir}] [m_{rs, \sigma}] [\gamma_{sk}] \quad (13b)$$

ou, en séparant en parties réelle et imaginaire :

$$A_{ik} = A'_{ik} + i A''_{ik}$$

avec

$$A'_{ik} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0} (-1)^{\sigma} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{2\sigma-2} A_{2\sigma},$$

$$A''_{ik} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0} (-1)^{\sigma+1} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{2\sigma-1} A_{2\sigma+1}.$$

Les indices  $n$  et  $\sigma$  de l'expression (13b) pour  $B_{\sigma n}$  indiquent qu'il faut calculer  $B_{\sigma n}$  pour chaque  $\sigma$  et chaque tranche. D'après l'équation (13a), la somme de toutes les tranches donne l'expression  $A_{\sigma}$  qui ne dépend donc plus que de  $\sigma$ . L'équation (12) donne ensuite le coefficient  $A_{ik}$  en fonction du rapport  $\nu/V$ .

Remarquons que l'équation (10) peut également s'écrire dans la forme matricielle suivante :

$$A_{ik} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[ (-j)^{\sigma} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{\sigma-2} \right] \left[ \left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} B_{\sigma n} \right] [Az_n] \quad (14)$$

$$\left[ (-j)^{\sigma} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{\sigma-2} \right] \quad \text{étant une matrice à une ligne ;}$$

$$\left[ \left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} B_{\sigma n} \right] \quad \text{étant une matrice rectangulaire ;}$$

$$[Az_n] \quad \text{étant une matrice à une colonne,}$$

$$\text{et } B_{\sigma n} \quad \text{étant défini par l'équation (13b).}$$

Enfin, en remplaçant dans les équations (12) et (14)  $V$  par  $M c$ , on obtient :

$$A_{ik} = \varrho_0 c^4 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0} (-j)^{\sigma} \nu^{\sigma-2} \bar{A}_{\sigma} \quad (15)$$

avec

$$\bar{A}_{\sigma} = \sum_n \left(\frac{l_n}{2c}\right)^{\sigma+2} \bar{B}_{\sigma n} A_{z_n}, \quad (16a)$$

$$\bar{B}_{\sigma n} = [\gamma_{ir}] \left[ \frac{m_{rs, \sigma}}{M^{\sigma-2}} \right] [\gamma_{sk}] \quad (16b)$$

ou bien

$$A_{ik} = \varrho_0 c^4 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} [(-j)^{\sigma} \nu^{\sigma-2}] \left[ \left(\frac{l_n}{2c}\right)^{\sigma+2} \bar{B}_{\sigma n} \right] [Az_n]. \quad (17)$$

On voit qu'en employant pour les coefficients  $A_{ik}$  les expressions (15) ou (17), l'équation du flutter ne contient plus que les deux inconnues  $\nu$  et  $M$ .



### 3. Résolution de l'équation du flutter

Les coefficients  $\mu_{ik}$ ,  $q_{ik}$  et  $A_{ik}$  une fois calculés, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation du flutter (4). Deux méthodes sont possibles, selon que l'on choisit comme équation de définition de  $A_{ik}$  une des équations (12) ou (14) contenant  $r$ ,  $\Gamma$  et  $M$  comme inconnues, ou bien une des équations (15) ou (17) ne contenant que  $r$  et  $M$  comme inconnues. Par suite du caractère compliqué des coef

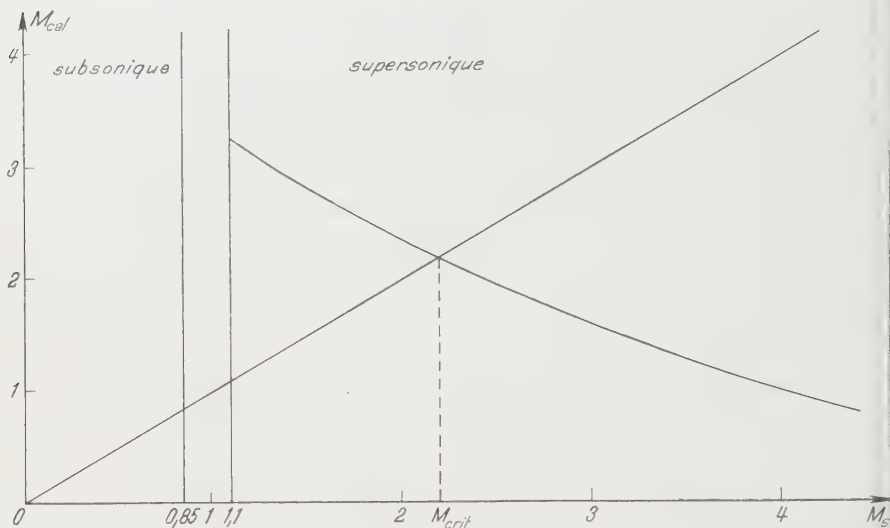


Fig. 3

ficients  $A_{ik}$ , on sera, dans les deux cas, obligé de recourir à un procédé de résolution semi-graphique de l'équation (4).

Dans le premier cas [équation de définition (12) ou (14) pour  $A_{ik}$ ], on considérera  $M$  comme paramètre et  $r$  et  $\nu/\Gamma$  comme inconnues. On se donnera différentes valeurs de  $M$  et on déterminera, pour chacune de ces valeurs, les inconnues  $r$  et  $\Gamma$  de telle façon que l'équation (4) soit satisfaite, la solution du problème étant celle pour laquelle la valeur calculée de  $\Gamma$  correspond à celle de  $M$  introduite comme paramètre. On part donc d'une vitesse critique supposée  $V_{sup}$  et on détermine d'abord le nombre de Mach effectif  $M$  correspondant, par la relation :

$$M = V_{sup} \frac{\cos \delta_m}{c},$$

$V_{sup}$  devant être choisi tel que  $M$  soit supérieur à 1.

Les deux équations résultant de l'équation complexe (4) ne contiennent alors plus que  $r$  et  $\nu/V$  comme inconnues. Pour la résolution de ce système d'équa

tions, on procédera comme dans l'incompressible, c'est-à-dire on calculera les coefficients des équations pour un certain nombre de valeurs  $\nu, V'$ , et on déterminera  $\nu$  graphiquement de telle sorte que les deux équations soient satisfaites. On obtiendra ainsi les solutions  $\nu$  et  $\nu/V'$  de l'équation (4) correspondant à la valeur de  $M$  introduite dans le calcul. Du couple de valeurs calculées  $\nu$  et  $\nu/V'$ , on déduira  $V'$  que l'on appellera vitesse critique calculée  $V_{cal}$ . On effectuera ainsi plusieurs calculs, chaque fois en partant d'une autre valeur pour  $V_{sup}$ , de façon à pouvoir tracer la courbe  $V_{cal}$  en fonction de  $V_{sup}$ . L'intersection de la droite  $V_{cal} = V_{sup}$  avec cette courbe donnera la vitesse critique de flutter cherchée (voir figure 3). Si la courbe possède plusieurs points d'intersection avec la droite, l'intersection correspondant à la vitesse la plus faible donnera la vitesse critique cherchée.

Dans le deuxième cas (équation de définition (15) ou (17) pour  $\{I_{ik}\}$ ), on cherchera pour différentes valeurs de  $M$  la ou les valeurs réelles  $\nu_1$  annulant la partie réelle de l'équation (4) et la ou les valeurs réelles  $\nu_2$  annulant la partie imaginaire de l'équation (4). On tracera ensuite les courbes  $\nu_1$  et  $\nu_2$  en fonction de  $M$ . L'intersection des deux courbes donnera la fréquence critique  $\nu_{crit}$  et le nombre de Mach critique  $M_{crit}$  correspondant à la vitesse critique de flutter cherchée; la vitesse critique elle-même s'obtiendra par la formule

$$V_{crit} = M_{crit} \cos \delta_m.$$

## ANNEXE

### Détermination des paramètres aérodynamiques

On sait qu'en régime supersonique les effets ne se répercutent que dans le sens de l'écoulement. Il s'en suit que la pression aérodynamique  $\Pi(x)$  exercée en un point  $x$  d'une aile plane  $A$ , ayant une profondeur égale à  $\tau l$  et effectuant un mouvement d'amplitude  $Y$ , est égale à la pression exercée en un point  $(x + 1 - \tau)$  de l'aileron d'une aile plane  $B$  dont la partie située en avant de l'aileron n'effectue pas de mouvement, l'aileron en question ayant une profondeur égale à  $\tau l$  et effectuant le même mouvement d'amplitude  $Y$  que l'aile  $A$ . Il suffira donc de calculer les paramètres  $\bar{m}_{rs}$  pour une aile plane de profondeur  $\tau l$ , tous les paramètres  $m_{rs}$  pour une aile plane de profondeur totale  $l$  et munie d'un aileron de profondeur  $\tau l$  pouvant être déduits directement des paramètres  $\bar{m}_{rs}$ .

De plus, comme les paramètres aérodynamiques pour une aile plane dont les bords font l'angle  $\delta_m$  avec la direction du vent se déduisent de ceux d'une aile droite ( $\delta_m = 0$ ) par simple multiplication par  $\cos \delta_m$ , on peut se limiter, pour la détermination des paramètres  $\bar{m}_{rs}$ , au cas particulier  $\delta_m = 0$ ; on pourra par conséquent également supposer  $x_0 = 0$ .

Nous considérerons donc une aile plane droite ayant une profondeur totale égale à  $\tau l$  et effectuant un mouvement vibratoire, harmonique en fonction du temps, d'amplitude:

$$\bar{Y}(x) e^{j\nu t} = \frac{l}{2} \sum_{r=0}^R \gamma_r 2^r x^r e^{j\nu t}, \quad (1)$$

cette aile étant exposée à un écoulement parallèle animé d'une vitesse supersonique  $V$ .

Pour les besoins du calcul de flutter d'une aile il sera suffisant de pousser la série (1) jusqu'au troisième terme ( $R = 2$ ).

D'après la définition des paramètres  $m_{rs}$  et d'après ce qui a été dit ci-dessus, il nous faudra calculer des intégrales de la forme générale suivante:

$$M_r(\tau, \xi) = l \int_0^\tau 2^r (x - \xi)^r \Pi(x) dx, \quad (0 \leq r \leq 2) \quad (2)$$

$\xi$  étant un point de référence quelconque.

### 1. Calcul de $M_0(\tau)$

La pression  $\Pi(\tau)$  exercée au point  $\tau$  de la tranche d'aile est donnée par la formule [5]:

$$\Pi(\tau) = 2 \varrho_0 V^2 \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \times \left[ -w(\tau) + \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r \int_0^\tau w(x) K\left(\frac{1}{M}, \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r (\tau - x)\right) dx \right] \quad (3a)$$

$$= \varrho_0 V^2 \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} [\gamma_0 \bar{p}_0(\tau) + \gamma_1 \bar{p}_1(\tau) + \gamma_3 \bar{p}_2(\tau)] \quad (3b)$$

avec

$$K(v, u) = v e^{-ju} [J_1(vu) + j v J_0(vu)]$$

et

$$w(x) = \frac{1}{V} \cdot \frac{d}{dt} \bar{Y} = \frac{1}{l} \cdot \frac{d\bar{Y}}{dx} + j \frac{v}{V} \bar{Y}.$$

$J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de BESSEL d'ordre 0 et 1. En posant la série (1) dans  $w(x)$ , et sachant que

$$\frac{v}{V} = \frac{2 \omega_r}{l},$$

on obtient:

$$w(x) = \gamma_0 j \omega_r + \gamma_1 (1 + 2 j \omega_r x) + \gamma_2 4 (x + j \omega_r x^2). \quad (4)$$

On sait que l'on a pour  $M_0(\tau)$ :

$$M_0(\tau) = l \int_0^\tau \Pi(x) dx \quad (5a)$$

$$= 2 \varrho_0 V^2 \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \times l \left[ -w_1(\tau) + \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r \int_0^\tau w_1(x) K\left(\frac{1}{M}, \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r (\tau - x)\right) dx \right] \quad (5b)$$

$$= \varrho_0 V^2 \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \frac{l}{2} [\gamma_0 m_{00}(\tau) + \gamma_1 \bar{m}_{01}(\tau) + \gamma_2 \bar{m}_{02}(\tau)] \quad (5c)$$

vec

$$w_1(x) = \int_0^1 w(\xi) d\xi = \gamma_0 j \omega_r x + \gamma_1 (x + j \omega_r x^2) + \gamma_2 4 \left( \frac{x^2}{2} + j \omega_r \frac{x^3}{3} \right). \quad (6)$$

Le paramètre  $\bar{m}_{00}(\tau)$  est connu et admet un développement en une série convergente autour de  $\omega_r = 0$  ([2]). On a :

$$\bar{m}_{00}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma} h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^{\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{00,\sigma} (-j \omega_r)^{\sigma} \quad (7)$$

vec

$$\begin{aligned} h_{0,0} &= 0, & h_{0,4} &= -\frac{M^2}{6(M^2-1)^3} (4M^2+1), \\ h_{0,1} &= -1, & h_{0,5} &= -\frac{M^4}{12(M^2-1)^4} (4M^2+3), \\ h_{0,2} &= -\frac{1}{M^2-1}, & h_{0,6} &= -\frac{M^4}{60(M^2-1)^5} (8M^4+12M^2+1), \\ h_{0,3} &= -\frac{M^2}{(M^2-1)^2}, & h_{0,7} &= -\frac{M^6}{180(M^2-1)^6} (8M^4+12M^2+5), \\ h_{0,8} &= -\frac{M^6}{5040(M^2-1)^7} (64M^6+240M^4+60M^2+5) \end{aligned}$$

et bien, d'une façon générale :

$$h_{0,\sigma}(M) = \frac{M^{\sigma-2}}{(\sigma-1)(M^2-1)^{\sigma-1}} \sum_{m=0}^{(\sigma/2)-1} \frac{(2M)^{\sigma-2-2m}}{(\sigma-2-2m)! m! (m+1)!} \quad \text{pour } \sigma \geq 2.$$

Remarquons ici que cette série est également valable pour des valeurs complexes de  $\omega_r$ .

En comparant les équations (3a), (3b) et (4) avec les équations (5b), (5c) et (5d), on voit que l'on a :

$$\bar{p}_1(\tau) = \frac{1}{j \omega_r} \bar{p}_0(\tau) + 2 \bar{m}_{00}(\tau) \quad (8)$$

$$\bar{p}_2(\tau) = 4 \bar{m}_{01}(\tau). \quad (9)$$

En intégrant l'équation (8) de 0 à  $\tau$  on obtient :

$$\bar{m}_{01}(\tau) = \frac{1}{j \omega_r} \bar{m}_{00}(\tau) + 2 \int_0^{\tau} \bar{m}_{00}(\zeta) d\zeta$$

et, en introduisant pour  $\bar{m}_{00}(\tau)$  la série (7) :

$$m_{01}(\tau) = - \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma} h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^{\sigma-1} + 2 \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\tau^{\sigma+1}}{\sigma+1} h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^{\sigma}. \quad (10)$$

Sachant que  $h_{0,0}(M) = 0$ , l'équation (10) peut s'écrire :

$$\bar{m}_{01}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma+1} (-j \omega_r)^{\sigma} \left[ \frac{2}{\sigma+1} h_{0,\sigma}(M) - h_{0,\sigma+1}(M) \right].$$

Nous posons encore :

$$h_{1,\sigma}(M) = \frac{2}{\sigma+1} h_{0,\sigma}(M) - h_{0,\sigma+1}(M)$$

et  $m_{01}(\tau)$  sera égal à :

$$\bar{m}_{01}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{01,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma.$$

En intégrant l'équation (9) de 0 à  $\tau$ , on obtient :

$$\bar{m}_{02}(\tau) = 4 \int_0^\tau \bar{m}_{01}(\xi) d\xi$$

et, en introduisant pour  $\bar{m}_{01}(\xi)$  la série (12) :

$$\bar{m}_{02}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \frac{\tau^{\sigma+2}}{\sigma} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{02,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma.$$

## 2. Calcul de $M_1(\tau, \xi)$

On a pour  $M_1(\tau, \xi)$  :

$$M_1(\tau, \xi) = l \int_0^\tau 2(x - \xi) \Pi(x) dx$$

et, en effectuant une intégration partielle,

$$\begin{aligned} M_1(\tau, \xi) &= 2(\tau - \xi) M_0(\tau) - 2 \int_0^\tau M_0(x) dx \\ &= q_0 V^2 \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} [\gamma_0 \bar{m}_{10}(\tau, \xi) + \gamma_1 \bar{m}_{11}(\tau, \xi) + \gamma_2 \bar{m}_{12}(\tau, \xi)]. \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\bar{m}_{1s}(\tau, \xi) = 2(\tau - \xi) \bar{m}_{0s}(\tau) - 2 \int_0^\tau \bar{m}_{0s}(x) dx.$$

On aura donc, en introduisant dans cette équation tour à tour les séries (7), (13) :

$$\bar{m}_{10}(\tau, \xi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 2 \left( \tau - \xi - \frac{\tau}{\sigma+1} \right) \tau^\sigma h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{10,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma,$$

$$\bar{m}_{11}(\tau, \xi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 2 \left( \tau - \xi - \frac{\tau}{\sigma+2} \right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{11,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma,$$

$$\bar{m}_{12}(\tau, \xi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 2 \left( \tau - \xi - \frac{\tau}{\sigma+3} \right) 4 \frac{\tau^{\sigma+2}}{\sigma} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{12,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma.$$



### 3. Calcul de $M_2(\tau, \xi)$

On a pour  $M_2(\tau, \xi)$ :

$$M_2(\tau, \xi) = l \int_0^{\tau} 4 (\xi - x)^2 H(x) dx$$

, en effectuant deux intégrations partielles successives:

$$\begin{aligned} M_2(\tau, \xi) &= 4 \left[ (\xi - \tau)^2 M_0(\tau) + 2 (\xi - \tau) \int_0^{\tau} M_0(x) dx + 2 \int_0^{\tau} \int_0^x M_0(\xi) d\xi dx \right] \\ &= Q_0 V^2 \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} [\gamma_0 \bar{m}_{20}(\tau, \xi) + \gamma_1 \bar{m}_{21}(\tau, \xi) + \gamma_2 \bar{m}_{22}(\tau, \xi)] . \end{aligned}$$

s'en suit:

$$\bar{m}_{2s}(\tau, \xi) = 4 \left[ (\xi - \tau)^2 \bar{m}_{0s}(\tau) + 2 (\xi - \tau) \int_0^{\tau} \bar{m}_{0s}(x) dx + 2 \int_0^{\tau} \int_0^x \bar{m}_{0s}(\xi) d\xi dx \right] .$$

On aura donc, en introduisant dans cette équation successivement les séries (7), (2) et (13):

$$\begin{aligned} \bar{m}_{20}(\tau, \xi) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \left[ (\tau - \xi)^2 - (\tau - \xi) \frac{2\tau}{\sigma+1} + \frac{2\tau^2}{(\sigma+2)(\sigma+1)} \right] \tau^{\sigma} h_{0,\sigma}(M) (-j\omega_r)^{\sigma} \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{20,\sigma} (-j\omega_r)^{\sigma} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{21}(\tau, \xi) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \left[ (\tau - \xi)^2 - (\tau - \xi) \frac{2\tau}{\sigma+2} + \frac{2\tau^2}{(\sigma+3)(\sigma+2)} \right] \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}(M) (-j\omega_r)^{\sigma} \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{21,\sigma} (-j\omega_r)^{\sigma} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{22}(\tau, \xi) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \left[ (\tau - \xi)^2 - (\tau - \xi) \frac{2\tau}{\sigma+3} + \frac{2\tau^2}{(\sigma+4)(\sigma+3)} \right] \\ &\quad \times \frac{4\tau^{\sigma+2}}{\sigma+2} h_{1,\sigma}(M) (-j\omega_r)^{\sigma} \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{22,\sigma} (-j\omega_r)^{\sigma} . \end{aligned}$$

### 4. Calcul des paramètres $m_{rs}$

Nous pouvons maintenant calculer sans peine les paramètres  $m_{rs}$  et  $m_{Rs}$  définis par les équations (7a) et (7b) du paragraphe 2 du présent rapport.

Les paramètres  $m_{rs}$  concernant l'aile ( $0 \leq r, s \leq 2$ ) se déduisent des paramètres  $\bar{m}_{rs}$  en posant  $\tau = 1$  et  $\xi = 0$  [puisque le point de référence est, d'après l'équation de définition (8a) du paragraphe 2, le bord d'attaque]. On a donc:

$$m_{rs} = \bar{m}_{rs}(1, 0) . \quad (0 \leq r, s \leq 2)$$

Les paramètres  $m_{R_s}$  concernant l'aile ( $0 \leq s \leq 2$ ) et ayant comme point de référence l'axe de rotation de l'aileron s'obtiennent à partir des paramètres en décomposant l'intégrale de définition (8b) du paragraphe 2 de la façon suivante (avec  $x_0 = 0$ ):

$$l \int_{1-\tau}^1 2(x-1+\tau-\varepsilon) p_s dx = l \left[ 2 \int_{1-\tau}^1 [x-(1-\tau)] p_s dx - 2\varepsilon \int_{1-\tau}^1 p_s dx \right].$$

On a donc pour  $m_{R_s}$ :

$$m_{R_s} = \bar{m}_{1s}(1, 1-\tau) - \bar{m}_{1s}(1-\tau, 1-\tau) - 2\varepsilon [\bar{m}_{0s}(1) - \bar{m}_{0s}(1-\tau)]. \quad (0 \leq s \leq 2)$$

Pour calculer les paramètres  $m_{rR}$  concernant l'aileron ( $0 \leq r \leq 2$  et  $r \neq 0$ ), nous devons effectuer une transformation des paramètres du fait que la rotation de l'aileron ne s'effectue pas autour de son bord d'attaque, mais autour de sa charnière. En désignant par  $\bar{m}_{rR}$  le paramètre de l'aileron, pris par rapport au point de référence  $\xi$ , lorsque l'aileron effectue une rotation autour de sa charnière, on a d'une façon générale:

$$\bar{m}_{rR}(\tau, \xi) = \bar{m}_{r1}(\tau, \xi) - 2\varepsilon \bar{m}_{r0}(\tau, \xi). \quad (0 \leq r \leq 2 \text{ et } r \neq 0)$$

Pour les trois premiers de ces paramètres ( $0 \leq r \leq 2$ ), le point de référence d'après leur équation de définition (8a) (paragraphe 2), le bord d'attaque de l'aile, c'est-à-dire situé à une distance égale à  $|\tau-1|$  du bord d'attaque de l'aileron. On a donc  $\xi = \tau - 1$ , et on obtient:

$$m_{rR} = \bar{m}_{rR}(\tau, \tau-1) = \bar{m}_{r1}(\tau, \tau-1) - 2\varepsilon \bar{m}_{r0}(\tau, \tau-1). \quad (0 \leq r \leq 2)$$

Enfin le quatrième paramètre  $m_{RR}$ , qui correspond au moment par rapport à l'axe de rotation de l'aileron, lorsque l'aileron effectue une rotation autour de son axe [d'après l'équation de définition (8b) du paragraphe 2], s'obtient de  $\bar{m}_{1R}(\tau, \varepsilon)$  en y posant  $\xi = \varepsilon$ ; on a:

$$m_{RR} = \bar{m}_{1R}(\tau, \varepsilon) = \bar{m}_{11}(\tau, \varepsilon) - 2\varepsilon \bar{m}_{10}(\tau, \varepsilon).$$

## 5. Cas d'un aileron avec fente fermée

Dans ce qui précède nous n'avons considéré qu'un aileron avec fente ouverte (définition KÜSSNER-SCHWARTZ [6]), c'est-à-dire avec une compensation aérodynamique. Il nous faut donc encore considérer le cas d'un aileron avec fente fermée. On sait que cette caractéristique n'a d'influence que sur le paramètre aérodynamique provenant d'une translation de l'aileron, donc le paramètre  $\bar{m}_{00}$ . Soit  $m_{00}$  le paramètre de l'aileron avec fente fermée lorsque celui-ci effectue une translation. Considérons la figure 4. Le profil d'aile  $A_1$  est rigide et effectue un mouvement vibratoire de rotation autour du bord d'attaque  $x = 0$ . Le profil  $A_2$  se compose d'une suite d'ailerons à fente fermée et disposés en escalier; chaque aileron a la même profondeur  $\Delta x$ ; les ailerons effectuent chacun un mouvement vibratoire de translation, tous avec la même fréquence et en phase, de sorte que lorsque les ailerons passent par zéro (axe des  $x$ ) le profil  $A_2$  est une droite. désignant par  $\beta$  l'angle de rotation du profil  $A_1$ , on voit que l'amplitude de vibration d'un aileron par rapport à l'aileron précédent est égale à  $l \beta \Delta x$ . La force aérodynamique agissant sur le profil  $A_1$  est égale (à un facteur près) à  $l \beta m_{00}$ , tandis que celle agissant sur le profil  $A_2$  est égale à  $l \Sigma \beta \Delta x \bar{m}_{00}$ . A la limite

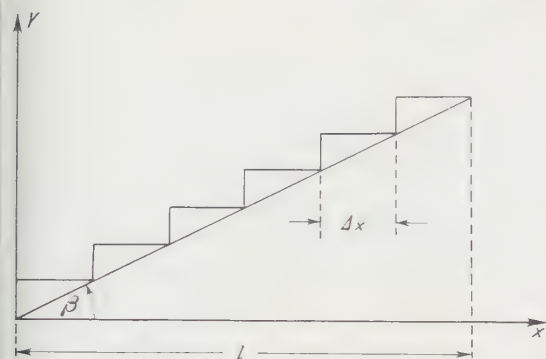


Fig. 4

$\Delta x \rightarrow 0$ , les deux forces aérodynamiques sont égales :

$$m_{01} = 2 \int_0^1 \bar{m}_{00} dx.$$

Par le changement de variable  $x = 1 - \tau$ , on obtient :

$$m_{01} = 2 \int_0^1 \bar{m}_{00} d\tau.$$

Nous développons  $\bar{m}_{00}$  en une série semblable à la série (7) :

$$\bar{m}_{00} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma} \bar{h}_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^{\sigma}.$$

En introduisant pour  $m_{01}$  la série (12), avec  $\tau = 1$ , on obtient :

$$h_{1,\sigma}(M) = 2 \bar{h}_{0,\sigma}(M) \int_0^1 \tau^{\sigma} d\tau = \frac{2}{\sigma+1} \bar{h}_{0,\sigma}(M).$$

On voit donc que pour un aileron non compensé aérodynamiquement (fente fermée) il suffit de remplacer  $h_{0,\sigma}(M)$  par

$$\bar{h}_{0,\sigma}(M) = \frac{\sigma+1}{2} h_{1,\sigma}(M)$$

dans les formules pour  $m_{rs}$  ( $0 \leq r \leq 2$  et  $r = R$ ).

## 6. Les paramètres $m_{rs}$ pour $r, s > 2$

Dans certains cas (pales ou autres surfaces de ce genre), il sera nécessaire de considérer plus que trois termes dans le développement en série de TAYLOR de  $Y$ . Il sera alors également nécessaire de connaître les paramètres  $m_{rs}$  pour  $r, s > 2$ . Pour déterminer ces paramètres, on posera, en généralisant les formules obtenues dans les paragraphes précédents :

$$m_{rs} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} m_{rs,\sigma} (-j \omega_r)^{\sigma}.$$

Comme on pourra facilement s'en rendre compte en raisonnant par récurrence, les termes  $m_{rs,\sigma}$  s'obtiennent par la formule générale suivante :

$$m_{rs,\sigma} = \frac{2^r (\sigma + s)}{\sigma + r + s} m_{0s,\sigma} \quad (r, s \neq R)$$

avec

$$m_{0s,\sigma} = \begin{cases} h_{0,\sigma} & \text{pour } s = 0, \\ \frac{2^{s-1} s! (\sigma - 1)!}{(\sigma + s)!} h_{1,\sigma} & \text{pour } s \geq 1. \end{cases}$$

## 7. Conclusion

Nous avons ainsi obtenu un développement en série autour de  $\omega_r = 0$  pour le seize paramètres  $m_{rs}$  entrant en ligne de compte pour un calcul de flutter d'une aile avec aileron. Comme on a pu s'en rendre compte, tous les paramètres se déduisent d'un seul d'entre eux, en l'occurrence le paramètre  $m_{00}$ . De plus, les coefficients des séries sont des produits d'une fonction de  $\omega_r$  seul et d'une fonction de  $M$  seul; d'ailleurs cette fonction de  $M$  ne doit être calculée que pour un seul paramètre; en effet, il n'apparaît dans les coefficients que les fonctions  $h_{0,\sigma}$  et  $h_{1,\sigma}$  et les deux fonctions sont liées par une relation très simple [équation (11)]. Dans les cas pratiques, on déterminera donc uniquement  $h_{0,\sigma}$ , et on en déduira  $h_{1,\sigma}$  par la relation (11).

Tous les résultats obtenus dans cette annexe pour les paramètres  $m_{rs}$  sont rassemblés dans le tableau ci-contre.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. WEBER, *Orthogonalisation des formes de vibration d'un avion, mesurées dans un essai au sol*, Publication O. N. E. R. A., N° 29 (1949).
- [2] R. WEBER, *Table des coefficients aérodynamiques instationnaires, Régime plan supersonique*, 1<sup>re</sup> partie, Publication O. N. E. R. A. N° 41 (1950).
- [3] W. RUPPEL, *Sur la détermination des coefficients aérodynamiques instationnaires d'une aile en flèche*, Recherche aéronaut. N° 16, 55-59 (1950).
- [4] W. RUPPEL, *Etude de l'instabilité stationnaire d'un avion en vol à l'aide des coefficients d'influence*, Recherche aéronaut. N° 14, 25-29 (1950).
- [5] R. WEBER, *Détermination des coefficients aérodynamiques instationnaires en régime supersonique. Problème plan. Méthode L. Schwartz*, Publication O. N. E. R. A. N° 5 (1948).
- [6] H. G. KÜSSNER et L. SCHWARTZ, *Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder*, Luftfahrtforschung 17, 337-354 (1940).

## Zusammenfassung

In vorliegendem Bericht wird eine Methode entwickelt zur numerischen Berechnung der im Überschallgebiet geltenden Luftkraftkoeffizienten mit Hilfe von Lochkartenmaschinen oder programmgesteuerten Maschinen. Dazu werden die Ausdrücke für diese Koeffizienten in Reihen entwickelt, wobei jedes Reihenglied ein Matrizenprodukt ist. Dadurch wird es ebenfalls möglich, die reduzierte Frequenz, die bei Flatterrechnungen immer als Hilfsvariable auftritt, zu eliminieren. Die Flattergleichung enthält dann als Unbekannte nur noch die wirklich interessierenden Größen: die kritische Frequenz (Flutterfrequenz) und die kritische Machsche Zahl (Flattergeschwindigkeit).

Da die Luftkraftbeiwerte für den allgemeinen Fall einer schwingenden Tragfläche noch nicht bekannt sind, wird diese streifenweise eben angenommen. Die Methode wird dargelegt an Hand einer schräg zur Windrichtung angestellten Tragfläche mit ebenfalls schräg zur Windrichtung angebrachten Querrippen. Alle anderen Fälle lassen sich ohne weiteres aus diesem allgemeinen Fall ableiten.

In einem Anhang werden die zur Berechnung der Luftkraftkoeffizienten benötigten Reihenentwicklungen der Luftkraftbeiwerte bestimmt.

(Reçu: le 20 novembre 1952.)

$r$ effet	Aile			Rotation de l'aileron autour de son axe
	Translation du bord d'attaque	Rotation autour du bord d'attaque	Courbure au bord d'attaque	
	0	1	2	$\bar{h}_{0,\sigma} = \begin{cases} h_{0,\sigma} & \text{pour une fente ouverte} \\ \sigma + 1 \over 2 h_{1,\sigma} & \text{pour une fente fermée} \end{cases}$
Force totale $m_{0s,\sigma}$	$h_{0,\sigma}$	$h_{1,\sigma}$	$\frac{4}{\sigma + 2} h_{1,\sigma}$	$R$ $\tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $- 2 \varepsilon \tau^{\sigma} \bar{h}_{0,\sigma}$
Moment total par rapport au bord d'attaque $m_{1s,\sigma}$	$2 \frac{\sigma}{\sigma + 1} h_{0,\sigma}$	$2 \frac{\sigma + 1}{\sigma + 2} h_{1,\sigma}$	$2 \frac{\sigma + 2}{\sigma + 3} \cdot \frac{4}{\sigma + 2} h_{1,\sigma}$	$2 \left( 1 - \frac{\tau}{\sigma + 2} \right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $- 2 \varepsilon 2 \left( 1 - \frac{\tau}{\sigma + 1} \right) \tau^{\sigma} \bar{h}_{0,\sigma}$
Moment du deuxième degré par rapport au bord d'attaque $m_{2s,\sigma}$	$4 \frac{\sigma}{\sigma + 2} h_{0,\sigma}$	$4 \frac{\sigma + 1}{\sigma + 3} h_{1,\sigma}$	$4 \frac{\sigma + 2}{\sigma + 4} \cdot \frac{4}{\sigma + 2} h_{1,\sigma}$	$4 \left( 1 - \frac{2 \tau}{\sigma + 2} + \frac{2 \tau^2}{(\sigma + 2)(\sigma + 3)} \right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $- 2 \varepsilon 4 \left( 1 - \frac{2 \tau}{\sigma + 1} + \frac{2 \tau^2}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)} \right) \tau^{\sigma} \bar{h}_{0,\sigma}$
Moment par rapport à l'axe de rotation $m_{Rs,\sigma}$	$2 \left( \tau - \frac{1 - (1 - \tau)^{\sigma+1}}{\sigma + 1} \right) h_{0,\sigma}$ $- 2 \varepsilon [1 - (1 - \tau)^{\sigma}] h_{0,\sigma}$	$2 \left( \tau - \frac{1 - (1 - \tau)^{\sigma+2}}{\sigma + 2} \right) h_{1,\sigma}$ $- 2 \varepsilon [1 - (1 - \tau)^{\sigma+1}] h_{1,\sigma}$	$2 \left( \tau - \frac{1 - (1 - \tau)^{\sigma+3}}{\sigma + 3} \right) \frac{4}{\sigma + 2} h_{1,\sigma}$ $- 2 \varepsilon [1 - (1 - \tau)^{\sigma+2}] \frac{4}{\sigma + 2} h_{1,\sigma}$	$\left( 2 \tau \frac{\sigma + 1}{\sigma + 2} - 2 \varepsilon \right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $- 2 \varepsilon \left( 2 \tau \frac{\sigma}{\sigma + 1} - 2 \varepsilon \right) \tau^{\sigma} \bar{h}_{0,\sigma}$
$m_{rs} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} m_{rs,\sigma} (j \omega_r)^{\sigma}$				Tableau des paramètres $m_{rs,\sigma}$



# Résolution de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles<sup>1)</sup>

Par PAUL BURGAT, Neuchâtel

## 1. Introduction

On a utilisé, pour résoudre certains problèmes aux limites, la transformation finie de FOURIER<sup>2)</sup>.

Je me suis proposé, dans ce travail, non de prendre pour point de départ une transformation et de déterminer son champ d'application quant à la résolution des problèmes aux limites, mais de rechercher un opérateur ou, ce qui revient au même, un type de série approprié à un problème donné<sup>3)</sup>.

La relation de Green, j'en fais usage, joue un rôle fondamental dans plusieurs questions relatives aux équations différentielles<sup>4)</sup>. Elle s'écrit (pour les fonctions d'une variable)

$$(L u, v) - (u, L^* v) = (\vec{U}, A \vec{V}) = A(\vec{U}, \vec{V}),$$

si l'on pose

$$L u = p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_n u,$$

$$(f, g) = \int_a^b f g dx \quad (f \text{ et } g, \text{ fonctions réelles et intégrables})$$

et que l'on désigne par  $L^*$  l'expression différentielle adjointe de  $L u$  et par  $(\vec{U}, \vec{V})$ , le produit intérieur des vecteurs

$$\vec{U} [u(a), u'(a), \dots, u^{(n-1)}(a), u(b), u'(b), \dots, u^{(n-1)}(b)]$$

et

$$\vec{V} [v(a), \dots, v^{(n-1)}(a), v(b), \dots, v^{(n-1)}(b)].$$

$A$  est une matrice régulière à  $2n$  lignes et  $2n$  colonnes; les fonctions réelles satisfont aux hypothèses habituelles<sup>5)</sup>.

## 2. Problème

Considérons l'équation différentielle linéaire du  $n$ -ième ordre

$$L y + r y = f(x)$$

<sup>1)</sup> Résumé des trois premiers chapitres d'une thèse élaborée sous la direction de M. CH. BLA, professeur à l'Université de Lausanne, et présentée, en 1950, à Neuchâtel. Voir aussi C. r. Acad. Sci. Paris 231, 321-323 et 398-400 (1950).

<sup>2)</sup> G. DOETSCH, Math. Ann. 112, 52-68 (1935). H. KNISS, Math. Z. 44, 266-292 (1939). V. aussi IDA ROETTINGER, Quart. appl. Math. 5, n° 3, 298-319 (1947).

<sup>3)</sup> Cf. R. V. CHURCHILL, Amer. math. Monthly 59, n° 3, 149-155 (1952).

<sup>4)</sup> Cf. M. PICONE, Appunti di analisi superiore (Rondinella, Naples, 1940), p. 746.

<sup>5)</sup> Cf. E. L. INCE, Ordinary Differential Equations (Dover Publications, New-York, 1944), p. 2.

et les conditions aux limites, supposées *linéairement indépendantes*,

$$L_i(y) = \alpha_1^{(i)} y(a) + \alpha_2^{(i)} y'(a) + \dots + \alpha_n^{(i)} y^{(n-1)}(a) \\ + \alpha_{n+1}^{(i)} y(b) + \dots + \alpha_{2n}^{(i)} y^{(n-1)}(b) = \alpha^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (2)$$

$r$  et les  $\alpha$  sont des constantes réelles;  $f(x)$  est une fonction *généralement continue* (*stückweise stetige Funktion*) sur  $(a, b)$ .

Nous nous proposons de trouver une série de fonctions propres qui représente, dans l'intervalle ouvert  $(a, b)$  ou sur le segment  $(a, b)$ , la solution  $y$  du problème (1) et (2), supposé déterminé. Nous n'envisagerons ici que le cas dans lequel le problème homogène correspondant est auto-adjoint.

### 3. Méthode de résolution

Soient  $v$  une fonction que l'on va définir et  $\vec{Y}$  le vecteur de composantes

$$y(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), \dots, y^{(n-1)}(b).$$

On a

$$(y, L^* v + r v) = (f, v) - A(\vec{Y}, \vec{V}). \quad (3)$$

Dans les questions où la formule de Green intervient, on cherche d'ordinaire à déterminer  $v$  de manière que  $A(\vec{Y}, \vec{V})$  soit nul; nous choisirons au contraire  $v$  de façon que cette expression soit une fonction connue des quantités  $\alpha^{(i)}$ .

$M$  désignant une matrice régulière quelconque, à  $2n$  lignes et  $2n$  colonnes, posons

$$N = (M^{-1})' A; \quad \vec{Y} = M \vec{Y}, \quad \vec{V} = N \vec{V};$$

nous avons

$$A(\vec{Y}, \vec{V}) = Y' A V = (M^{-1} Y)' A N^{-1} V = Y' (M^{-1})' A N^{-1} V \\ = (M^{-1})' A N^{-1} (\vec{Y}, \vec{V}) = E(\vec{Y}, \vec{V}).$$

Le second membre de la formule de GREEN prend la forme (dite canonique)

$$E(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^{2n} Y_k(y) V_k(v),$$

les  $Y_k(v)$  et les  $V_k(v)$  étant respectivement les composantes des vecteurs  $\vec{Y}$  et  $\vec{V}$ .

Jusqu'à présent, la matrice  $M$  était quelconque (régulière); désormais, ses  $n$  premières lignes seront constituées par les coefficients qui figurent dans les conditions aux limites (2); nous aurons

$$A(\vec{Y}, \vec{V}) = E(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{i=1}^n \alpha^{(i)} V_i(v) + \sum_{j=n+1}^{2n} Y_j(y) V_j(v).$$

Nous prendrons, pour  $v$ , une fonction satisfaisant aux conditions

$$V_j(v) = 0 \quad (j = n+1, n+2, \dots, 2n);$$

$A(\vec{Y}, \vec{V})$  sera une fonction connue des  $\alpha^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et la relation (3) deviendra

$$(y, L^* v + r v) = (f, v) - \sum_{i=1}^n \alpha^{(i)} V_i(v). \quad (3')$$

<sup>1)</sup>  $Y'$ , par exemple, est la matrice transposée de  $Y$ , matrice à une colonne.

Pour définir complètement la fonction  $v$ , nous l'astreignons à vérifier l'équation

$$L^* v + \lambda v = 0 \quad (4)$$

outre les conditions trouvées précédemment:

$$V_j(v) = 0. \quad (j = n+1, n+2, \dots, 2n) \quad (5)$$

Nous supposons dès maintenant que le problème [(4) et (5)], nous l'appellons «*problème associé*»<sup>1)</sup> de [(1) et (2)], est *auto-adjoint*. Désignons par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  ses valeurs propres et par  $v_1, v_2, \dots$  les solutions propres correspondantes. La relation (3') nous donne, si nous tenons compte de l'équation (4),

$$(y, v_k) = \frac{1}{\lambda_k - \gamma} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha^{(i)} V_i(v_k) - (f, v_k) \right]; \quad (3'')$$

$(y, v_k)$  est la transformée de la solution  $y$  du problème [(1) et (2)] par l'opérateur intégral de noyau  $v_k$ . Si les fonctions propres forment, après avoir été normées, un système complet<sup>2)</sup>, la formule (3'') donne, à un facteur près, les coefficients du développement de  $y$  selon les fonctions orthogonales  $v_1, v_2, \dots$

#### 4. Equation du second ordre; conditions de troisième espèce

Nous allons résoudre, par la méthode développée dans le § 3, le problème:

$$L y + r y = [p(x) y']' + q(x) y + r y = f(x), \quad (6)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha, \quad \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \beta, \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_3^2 + \beta_4^2) \neq 0; \quad (7)$$

$p(x)$  et  $q(x)$  sont des fonctions continues sur  $(a, b)$ ; on suppose de plus que  $p(x)$  est positive et qu'elle admet une dérivée première continue [sur  $(a, b)$ ].

Ici,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & p(a) & 0 & 0 \\ -p(a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(b) \\ 0 & 0 & p(b) & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons prendre pour  $M$  la matrice régulière

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_4 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Calculons la matrice  $N$ , puis les composantes du vecteur  $\vec{V}$ ; nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} V_{2i-1}(v) &= (-1)^i \frac{\alpha_{3-i}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} p(a) v(a) + \frac{\alpha_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} p(a) v'(a), \\ V_{2i}(v) &= \frac{\beta_{5-i}}{\beta_3^2 + \beta_4^2} p(b) v(b) + (-1)^i \frac{\beta_{2+i}}{\beta_3^2 + \beta_4^2} p(b) v'(b). \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

1) (4) et (5) et  $L v + \lambda v = 0$ ,  $L_i(v) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sont des problèmes équivalents. Dans certains cas cependant (équation du second ordre avec conditions aux limites générales, par exemple) le premier conduit aux résultats les plus simples.

2) *Vollständig* (COURANT et HILBERT); *closed*.

Le problème associé de [(6) et (7)] est le problème de STURM-LIOUVILLE. Les théorèmes d'équiconvergence nous permettent d'affirmer que la solution  $y$  de [(6) et (7)], fonction à variation bornée, est représentée, dans  $(a, b)$ , par son développement à l'aide des  $v_k$  [on suppose que  $p(x)$  et  $q(x)$  satisfont aux hypothèses de ces théorèmes]. Si  $\alpha_2 \beta_4 \neq 0$ ,  $y$  est égale à son développement *sur* le segment  $(a, b)$  (théorème de HAAK).

Les coefficients  $a_k$  de ce développement sont données par la formule

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k - r} \left\{ \frac{1}{N_k} \left[ \frac{\alpha_2}{x_1^2 - x_2^2} v_k(a) - \frac{\alpha_1}{x_1^2 - x_2^2} v'_k(a) \right] + \beta p(b) \left( \frac{\beta_4}{\beta_3^2 + \beta_4^2} v_k(b) - \frac{\beta_3}{\beta_3^2 + \beta_4^2} v'_k(b) \right) - A_k \right\}, \quad (9)$$

déduite des relations (3''), pour  $n = 2$ , et (8); on a posé  $N_k = (v_k, v_k)$  et  $A_k = (1/N_k) (f, v_k)$ . Les  $A_k$  sont les coefficients du développement de la fonction  $f(x)$ , second membre de l'équation (6).

On peut mettre le second membre de (9) sous une autre forme, plus commode dans certains cas.

Soient  $g(x, \lambda)$  et  $h(x, \lambda)$  deux solutions de l'équation  $Lv + \lambda v = 0$  qui constituent un système fondamental et telles que

$$g'(a, \lambda) = 0, \quad h(a, \lambda) = 0,$$

quel que soit  $\lambda$ . Posons

$$g(a, \lambda) = c(\lambda) \quad \text{et} \quad h'(a, \lambda) = d(\lambda).$$

L'équation caractéristique du problème associé peut s'écrire

$$\frac{\alpha_1 c(\lambda)}{\beta_3 g(b, \lambda) + \beta_4 g'(b, \lambda)} - \frac{\alpha_2 d(\lambda)}{\beta_3 h(b, \lambda) + \beta_4 h'(b, \lambda)} = 0.$$

Désignons par  $q_k$  la valeur commune de ces rapports, pour  $\lambda = \lambda_k$ . On obtient aisément

$$q_k = \frac{\beta_4 v_k(b) - \beta_3 v'_k(b)}{(\beta_3^2 + \beta_4^2) [g'(b, \lambda_k) h(b, \lambda_k) - g(b, \lambda_k) h'(b, \lambda_k)]} \\ = - \frac{p(b)}{c(\lambda_k) d(\lambda_k) p(a)} \cdot \frac{\beta_4 v_k(b) - \beta_3 v'_k(b)}{\beta_3^2 + \beta_4^2},$$

puis

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k - r} \left\{ \frac{c(\lambda_k) d(\lambda_k) p(a)}{N_k} [\alpha - q_k \beta] - A_k \right\}; \quad (10)$$

les fonctions propres sont:

$$v_k(x) = \frac{\alpha_1 c(\lambda_k) h(x, \lambda_k) - \alpha_2 d(\lambda_k) g(x, \lambda_k)}{\beta_3^2 + \beta_4^2}.$$

## 5. Exemples

a)

$$[x^2 y']' + r y = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (b > a > 0)$$

Les fonctions propres sont:

$$v_k = x^{-1/2} \sin \left( \sqrt{\frac{4\lambda_k - 1}{2}} \ln \frac{x}{a} \right), \quad \text{avec} \quad 4\lambda_k = 1 + k^2 l^2; \quad l = \frac{2\pi}{\ln b/a},$$

La formule (9) devient ici

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k - r} \left\{ \frac{\sqrt{4\lambda_k - 1}}{2N_k} [a^{1/2} \alpha - (-1)^k b^{1/2} \beta] - A_k \right\}, \quad \left( N_k = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

b)

$$y'' + r y = f(x);$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = \alpha, \quad \beta_3 y(l) + \beta_4 y'(l) = \beta, \quad (\alpha_1 \alpha_2 \leq 0; \beta_3 \beta_4 \geq 0)$$

Les fonctions propres sont

$$v_k = \alpha_1 \sin \omega_k x - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k x,$$

les  $\omega_k$  étant les racines positives de l'équation caractéristique

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \omega \\ \beta_3 \cos \omega l - \beta_4 \omega \sin \omega l & \beta_3 \sin \omega l + \beta_4 \omega \cos \omega l \end{vmatrix} = 0.$$

En particulierisant (10), nous obtenons la formule

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k - r} \left[ \frac{\omega_k}{N_k} (\alpha - \alpha_2 \beta) - A_k \right] \quad (\lambda_k = \omega_k^2)$$

où

$$N_k = (v_k, v_k) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \omega_k^2) \frac{l}{2} + \frac{\alpha_2^2 \omega_k^2 - \alpha_1^2}{4 \omega_k} \sin 2 \omega_k l - \alpha_1 \alpha_2 \sin^2 \omega_k l$$

et

$$q_k = \frac{\alpha_1}{\beta_3 \cos \omega_k l - \beta_4 \omega_k \sin \omega_k l} = \frac{\alpha_2 \omega_k}{\beta_3 \sin \omega_k l + \beta_4 \omega_k \cos \omega_k l}.$$

*Remarque.*  $\lambda = 0$  est valeur propre si les conditions aux limites sont  $y'(0) = \alpha$ ,  $y'(l) = \beta$ , et dans ce cas seulement. Alors  $\lambda_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  et

$$a_0 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\alpha - \beta}{l} + A_0 \right].$$

## 6. Application à l'équation de la chaleur

Pour donner un exemple d'application à une équation aux dérivées partielles considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

à laquelle se ramène celle de la chaleur par un choix convenable des unités, la condition initiale

$$\lim_{t \rightarrow +0} U(x, t) = 0 \quad (0 < x < l)$$

et les conditions aux limites

$$\lim_{x \rightarrow +0} U(x, t) = A(t), \quad \lim_{x \rightarrow l-0} \frac{\partial U}{\partial x} = B(t), \quad (t > 0)$$

Appliquons la transformation de LAPLACE; nous obtenons le problème

$$u'' - s u = 0, \quad u(0, s) = a(s), \quad u'(l, s) = b(s),$$

$$u(x, s) = L\{U(x, t)\}, \quad a(s) = L\{A(t)\}, \quad b(s) = L\{B(t)\};$$

$$U' = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

En consultant le tableau de la page 152, on trouve que

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right]^2 + s} \cdot \frac{1}{l} \left[ (2k-1) \frac{\pi}{l} a(s) - (-1)^k 2 b(s) \right] \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x$$

où

$$= \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (2k-1) \frac{\pi}{l} A(t) * e^{-\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right]^2 t} - (-1)^k 2 B(t) * e^{-\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right]^2 t} \right\} \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x, \quad (0 < x < l)$$

Nous avons obtenu ce résultat sans recourir à la théorie des résidus.

## 7. Conclusion

Tout problème aux limites complètement non homogène est réductible, on sait, à un problème semi-homogène. L'intérêt des séries que nous avons obtenues réside dans le fait qu'elles donnent la solution des problèmes non homogènes sans qu'il soit nécessaire de faire cette réduction, ni de chercher l'intégrale générale de l'équation du problème considéré. Ces séries conviennent parfaitement à l'intégration des équations dont le second membre est une fonction *généralement continue*, des équations qui se présentent fréquemment dans les applications.

Le tableau à la page 152 donne l'expression des coefficients de la série dans quelques cas particuliers.

## Summary

The purpose of this article is not to use a certain transformation to solve boundary problems, but to find an operator (viz. a type of series) adapted to the given problem.

In this paper, we limit ourselves to problems for which the homogeneous corresponding problem is self-adjoint; the method is applied to problems of the second order and to a partial differential equation.

The obtained series give the solution of completely non-homogeneous problems without our having to reduce them to semi-homogeneous problems or to find the general solution of their equation.

Reçu le 27 novembre 1952.)



$$\text{Equation } y'' + \nu y = f(x)$$

Conditions	Equation caractéristique	$\lambda_k = \omega_k^2$	$\nu_k$	$a_k$
$y(0) = \alpha; y(l) = \beta$	$\operatorname{tg} \omega l = 0$	$\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2$ ( $k = 1, 2, \dots$ )	$\sin k \frac{\pi}{l} x$	$\frac{1}{\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2 - \nu} \left[ \frac{2k\pi}{l^2} [\alpha - (-1)^k \beta] - A_k \right]$
$y'(0) = \alpha; y'(l) = \beta$	$\operatorname{tg} \omega l = 0$	$\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2$ ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )	$\cos k \frac{\pi}{l} x$	$a_0 = \frac{1}{\nu} \left[ \frac{\alpha - \beta}{l} - A_0 \right]$ $\frac{-1}{\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2 - \nu} \left[ \frac{2}{l} [\alpha - (-1)^k \beta] + A_k \right] \quad (k \neq 0)$
$y'(0) = \alpha; y(l) = \beta$	$\operatorname{ctg} \omega l = 0$	$\left[ \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \right]^2$	$\cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x$	$\frac{-1}{\left[ \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \right]^2 - \nu} \times \left[ \frac{1}{l} \left( 2\alpha + (-1)^k (2k - 1) \frac{\pi}{l} \beta \right) + A_k \right]$
$y(0) = \alpha; y'(l) = \beta$	$\operatorname{ctg} \omega l = 0$	$\left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \right]^2$	$\sin \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x$	$\frac{1}{\left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \right]^2 - \nu} \times \left[ \frac{1}{l} \left( (2k + 1) \frac{\pi}{l} \alpha - (-1)^k (2\beta) \right) - A_k \right]$
$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = \alpha$ $\alpha_1 y(l) + \alpha_2 y'(l) = \beta$ ( $\alpha_1 \neq 0$ )	$\operatorname{tg} \omega l = 0$	$\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2$ ( $k = 1, 2, \dots$ )	$\alpha_1 \sin k \frac{\pi}{l} x$ $-\alpha_2 k \frac{\pi}{l} \cos k \frac{\pi}{l} x$	$\frac{1}{\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2 - \nu} \left[ \frac{2k\pi}{\alpha_1^2 l^2 + \alpha_2^2 k^2 \pi^2} [\alpha - (-1)^k \beta] - A_k \right]$

## Über die Instabilität beim Verfahren der zentralen Differenzen für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Von LOTHAR COLLATZ, Hamburg<sup>1)</sup>

Bei schrittweiser numerischer Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  kann es passieren, dass ein an sich gutes Verfahren mit kleinem Fehlerglied in der numerischen Brauchbarkeit durch ein instabiles Verhalten<sup>2)</sup> (Aufschaukeln, Aufrauhung) mehr oder weniger stark beeinträchtigt wird.

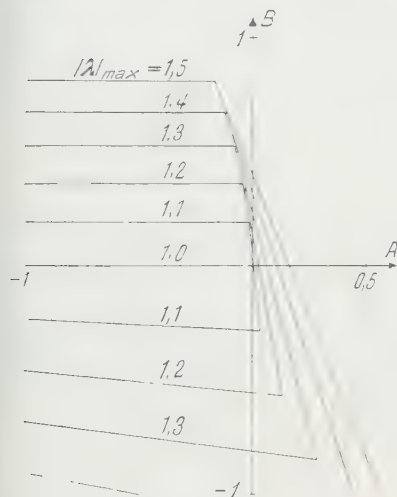


Fig. 1

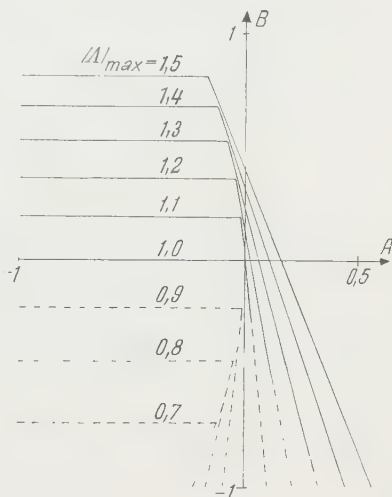


Fig. 2

tigt wird. In dieser Zeitschrift hat H. RUTISHAUSER<sup>3)</sup> eine Erklärung dieser Erscheinung gegeben; er vergleicht das Anwachsen kleiner Störungen nach  $k$  Schritten der Schrittweite  $h$ , welches unter der Annahme konstanter partieller Ableitungen von  $f$  nach  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  durch  $|\lambda|^k$  gegeben wird, mit dem Anwachsen der Lösungen der Differentialgleichung, welches etwa durch  $|A|^k$  gegeben sei. Dabei ist  $\lambda$  die dem Betrage nach grösste Wurzel einer gewissen algebraischen Gleichung. Durch Verwendung genauerer Näherungsformeln kann sich der Grad der algebraischen Gleichung erhöhen, und es werden weitere  $\lambda$  «eingeschleppt», für welche  $|\lambda| > |A|$  sein kann und welche dadurch Instabilität bewirken können.

Diskutiert man die Verhältnisse noch etwas weitergehend, zum Beispiel für das Verfahren der zentralen Differenzen bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $y'' = f(x, y, y')$ , so ergibt sich das folgende Bild, welches vielleicht von

<sup>1)</sup> Forschungsstelle für praktische Mathematik der Universität Hamburg.

<sup>2)</sup> Auf diese Erscheinung wurde hingewiesen in L. COLLATZ und R. ZURMÜHL, *Beiträge zu dem Interpolationsverfahren der numerischen Integration von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung*, Z. angew. Math. Mech. 22, 42–55 (1942), speziell Seite 46.

<sup>3)</sup> H. RUTISHAUSER, *Über die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*, ZAMP 3, 65–74 (1952).

Interesse ist, da das Verfahren der zentralen Differenzen wegen mancher Vorzüge ein vielbenutztes Verfahren ist.

Bei diesem rechnet man nach den Formeln

$$y_{k+1} = 2 y_k - y_{k-1} + \frac{h^2}{12} (f_{k+1} + 10 f_k + f_{k-1}),$$

$$y'_{k+1} = y'_{k-1} + \frac{h}{3} (f_{k+1} + 4 f_k + f_{k-1}).$$

Mit dem Ansatz für Störungen  $\eta_k = p \lambda^k$ ,  $\eta'_k = q \lambda^k$  kommt man mit den Abkürzungen  $A = h^2 f_{yy}$  und  $B = h f_{y'}$  auf die Gleichung (hergeleitet bei RUTISHAUSER; dort ist lediglich  $a = A/12$  und  $b = B/3$  geschrieben; wir beschränken uns hier auf das Mitteilen der Ergebnisse und verweisen bezüglich der Rechnung auf RUTISHAUSER)

$$(\lambda - 1) [12 (\lambda^2 - 1) (\lambda - 1) - A (\lambda + 1) (\lambda^2 + 10 \lambda + 1) + 4 B (\lambda - 1) (\lambda^2 + 4 \lambda + 1)] = 0.$$

Die Werte  $A$  berechnen sich mit  $A = e^2$  aus  $q^2 - B q - A = 0$ . Die Figuren 1 und 2 geben in einer  $(A, B)$ -Ebene die Werte des maximalen  $|\lambda|$  bzw. des maximalen  $|A|$ . Figur 3 zeigt in einer  $(A, B)$ -Ebene zwei Gebiete I, II; in I stimmen maximales  $|\lambda|$  und  $|A|$  mit grosser Genauigkeit überein; für das Verfahren der zentralen Differenzen ist dort keine Instabilität zu befürchten; im Gebiet II dagegen besteht Instabilitätsgefahr, sofern man nicht vorbeugende Massnahmen ergreift<sup>1)</sup>.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch bei verschiedenen anderen Verfahren durchführen.

### Summary

In the numerical solution of an ordinary differential equation by step by step methods it may be that the computational solution is instable and has after a certain number of integration steps of the length  $h$  nothing to do with the solution of the differential equation. For the method of central differences for the differential equation  $y'' = f(x, y, y')$  figure 3 gives in the  $(A, B)$ -plane (with  $A = h^2 f_{yy}$  and  $B = h f_{y'}$ ) a general view of the risk of instability; in the region I there is no risk for instability on account of the method of central differences.

(Eingegangen: 25. September 1952.)

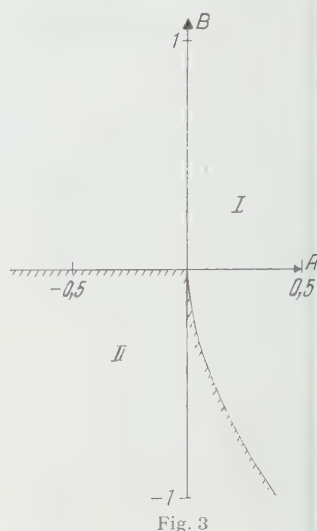


Fig. 3

<sup>1)</sup> Vgl. zum Beispiel L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Springer, Berlin 1951), S. 51.

# Beiträge zur numerischen Behandlung der Schrödinger-Gleichung im Falle des Yukawa-Potentials

Von KALERVO V. LAURIKAINEN und ERKKI K. EURANTO, Turku, Finnland<sup>1)</sup>

Die Eigenwerte der radialen Schrödinger-Gleichung

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \left[ k^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} - b \frac{e^{-x}}{x} \right] \Phi = 0 \quad (1)$$

mit den Randbedingungen

$$\Phi(0) = \Phi(\infty) = 0 \quad (2)$$

neulich im Falle  $l = 0$  von HULTHÉN und LAURIKAINEN durch Benutzung der Rayleigh-Ritzschen Variationsmethode tabuliert worden [1]<sup>2)</sup>. Für die Eigenfunktionen wurde dabei der von HULTHÉN vorgeschlagene Ansatz

$$\Phi = e^{-kx} (1 - e^{-x}) \sum_{\nu=0}^n h_{\nu} e^{-\nu x} \quad (3)$$

gewandt [2]. Für grosse Werte von  $k$  wurden die drei niedrigsten Eigenwerte  $b_2, b_3$ , unabhängig von der Variationsmethode, auch zu semikonvergenten asymptotischen Potenzreihen nach Potenzen von  $\tau = 1/(2k+2)$  entwickelt. (Wir haben versucht, diese Berechnungen für andere Werte von  $l$  zu verallgemeinern. Zuerst war es möglich [3], verallgemeinerte asymptotische Entwicklungen für grosse Werte von  $k$  zu gewinnen, wenn  $l$  eine beliebige ganze Zahl  $\geq 0$  ist. Wählt man

$$\tau = \frac{1}{2k+2(l+1)} \quad (4)$$

Entwicklungsparameter, so lautet die Entwicklung des ersten Eigenwertes:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{l+1}{\tau} - (l+1)^2 \tau + \frac{2}{3} (l+1)^2 (2l^2 + 4l + 3) \tau^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (l+1)^2 (10l^2 + 24l + 15) \tau^3 \\ &\quad + \frac{1}{15} (l+1)^2 (464l^4 + 946l^3 + 664l^2 + 761l + 495) \tau^4 \\ &\quad + \frac{1}{90} (l+1)^2 (4560l^6 + 23360l^5 + 24280l^4 - 37020l^3 - 88120l^2 \\ &\quad - 60605l - 15015) \tau^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wenn man den Variationsansatz (3) für positive  $l$ -Werte verallgemeinern will, so muss man vor allem das Verhalten der Eigenlösungen bei grossen und kleinen Werten von  $x$  beachten. Wenn  $x \rightarrow \infty$  geht, so reduziert sich (1) asymptotisch auf die Gleichung

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \left[ k^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \Phi = 0. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Universität Turku.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 158.

Die im Unendlichen verschwindende Lösung ist hier

$$\Phi_{as} = \text{const } x^{l+1} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \right)^{l+1} e^{-kx}, \quad (x \rightarrow \infty)$$

und dasselbe asymptotische Verhalten muss also die Ansatzfunktion aufweisen. In der Nähe von  $x = 0$  haben wir entsprechenderweise folgenden asymptotischen Ausdruck

$$\Phi_{as} = \text{const } x^{l+1}, \quad (x \rightarrow 0)$$

Wir haben zunächst den Fall  $l = 1$  untersucht, wobei insbesondere die folgenden Ansätze versuchsweise gebraucht wurden:

$$\Phi = e^{-kx} (1 - e^{-x})^2 \sum_{v=0}^n h_v e^{-vx},$$

$$\Phi = e^{-kx} \left( k + \frac{1}{x} \right) (1 - e^{-x})^3 \sum_{v=0}^n h_v e^{-vx}$$

(vergleiche zum Beispiel [4], IV C, (119), S. 412),

$$\Phi = e^{-kx} \left( k + \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) (1 - e^{-x})^2 \sum_{v=0}^n h_v e^{-vx}.$$

Man wird erwarten, dass (10) und (11) eine bessere Konvergenz für die Variationsmethode erzeugen als (9), weil erstere sich für grosse Werte von  $x$  den Eigenfunktionen näher anschliessen. Für kleine Werte von  $k$  gibt (10) in der Tat befriedigendere Resultate als (9), für grosse Werte von  $k$  verhält es sich aber gerade umgekehrt, während (11) für alle  $k$ -Werte die besten Resultate liefert (Tabelle 1).

Tabelle 1

Vergleich der Ansatzfunktionen (9), (10) und (11)  
 $b_2$  berechnet mit je 2, 3 und 4 Parametern  $h_v$

Ansatz	Anzahl der Para- meter $h_v$	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 3$
(9)	2	9,18645 <sub>1</sub>	10,15306 <sub>0</sub>	11,92370 <sub>5</sub>	19,79910 <sub>1</sub>
	3	9,18636 <sub>1</sub>	10,15068 <sub>2</sub>	11,92069 <sub>8</sub>	19,79702 <sub>1</sub>
	4	9,16103 <sub>9</sub>	10,14973 <sub>8</sub>	11,92051 <sub>1</sub>	19,79700 <sub>1</sub>
(10)	2	9,08283 <sub>9</sub>	10,15574 <sub>4</sub>	11,94789 <sub>1</sub>	19,96377 <sub>1</sub>
	3	9,08209 <sub>8</sub>	10,14927 <sub>3</sub>	11,92124 <sub>9</sub>	19,81465 <sub>1</sub>
	4	9,08198 <sub>9</sub>	10,14912 <sub>4</sub>	11,92046 <sub>9</sub>	19,79876 <sub>1</sub>
(11)	2	9,08283 <sub>9</sub>	10,14977 <sub>8</sub>	11,92133 <sub>5</sub>	19,79812 <sub>1</sub>
	3	9,08209 <sub>8</sub>	10,14915 <sub>9</sub>	11,92048 <sub>5</sub>	19,79701 <sub>1</sub>
	4	9,08198 <sub>9</sub>	10,14912 <sub>3</sub>	11,92046 <sub>5</sub>	19,79700 <sub>1</sub>

Im Falle  $l = 2$  wurde dann der Ansatz

$$\Phi = e^{-kx} \left[ k^2 + 3k \frac{1 - e^{-x}}{x} + 3 \left( \frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^2 \right] (1 - e^{-x})^3 \sum_{v=0}^n h_v e^{-vx}$$

gebraucht. Die Konvergenz des Variationsverfahrens ist dabei sehr befriedigend, aber die Berechnungen werden schon ziemlich mühsam. Die Ansatzfunktion

Tabelle 2  
Beispiele der approximativen Eigenwerte

rd- ngs- l des gen- ertes	Anzahl der Para- meter $h_p$	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 3$
a) $l = 0$ ; Ansatz (3); drei erste Eigenwerte					
$b_1$	2	1,67993 <sub>3</sub>	2,76923 <sub>7</sub>	3,81663 <sub>2</sub>	7,89663 <sub>9</sub>
	3	1,67985 <sub>3</sub>	2,76923 <sub>7</sub>	3,81662 <sub>4</sub>	7,89661 <sub>4</sub>
	4	1,67981 <sub>95</sub>	2,76922 <sub>8</sub>	3,81662 <sub>1</sub>	7,89661 <sub>4</sub>
$b_2$	3	6,44849 <sub>0</sub>	8,77351 <sub>9</sub>	10,96775 <sub>1</sub>	19,34521 <sub>2</sub>
	4	6,44771 <sub>5</sub>	8,77057 <sub>5</sub>	10,96404 <sub>6</sub>	19,34201 <sub>0</sub>
$b_3$	4	14,37 <sub>3</sub>	17,99	21,3828 <sub>7</sub>	34,210 <sub>3</sub>
b) $l = 1$ ; Ansatz (11); zwei erste Eigenwerte					
$b_2$	2	9,08283 <sub>9</sub>	10,14977 <sub>8</sub>	11,92133 <sub>5</sub>	19,79812 <sub>0</sub>
	3	9,08209 <sub>8</sub>	10,14915 <sub>9</sub>	11,92048 <sub>5</sub>	19,79701 <sub>2</sub>
	4	9,08198 <sub>9</sub>	10,14912 <sub>3</sub>	11,92046 <sub>5</sub>	19,79700 <sub>7</sub>
$b_3$	3	17,76476 <sub>6</sub>	19,66852 <sub>8</sub>	22,56134 <sub>5</sub>	34,79790 <sub>8</sub>
	4	17,74552 <sub>1</sub>	19,65087 <sub>0</sub>	22,53965 <sub>8</sub>	34,7753 <sub>6</sub>
c) $l = 2$ ; Ansatz (12); erster Eigenwert					
$b_3$	2	21,90461 <sub>8</sub>	22,86464 <sub>9</sub>	24,96898 <sub>9</sub>	36,01763 <sub>0</sub>
	3	21,89524 <sub>2</sub>	22,85935 <sub>9</sub>	24,96400 <sub>9</sub>	36,01150 <sub>9</sub>
	4	21,89500 <sub>5</sub>	22,85926 <sub>1</sub>	24,96393 <sub>8</sub>	36,01147 <sub>2</sub>

(11), (12) lassen sich für alle Werte von  $l$  verallgemeinern, wobei ohne Zweifel eine genügende Konvergenz erreicht wird, die Berechnungen werden aber bei größeren  $l$ -Werten noch beschwerlicher.

Für den Fall  $l = 0$  geben wir noch Interpolationsformeln für die Berechnung des ersten Eigenwertes  $b_1$  und der entsprechenden Koeffizienten  $h_p$ , wobei wir im Ansatz (3)  $n = 4$  gewählt haben:

$$\left. \begin{aligned}
 b_1 &= 2,448994_9 + 0,10742744t - 0,00025385t^2 + 0,000009812t^3 \\
 &\quad - 0,000000404t^4, \\
 b_0 &= 1,9801_7 + 0,0649660t - 0,0002654t^2 + 0,0000091t^3 \\
 &\quad + 0,0000004t^4, \\
 b_1 &= 1,3159_8 + 0,0456025t - 0,0002554t^2 + 0,0000125t^3 \\
 &\quad + 0,0000004t^4, \\
 b_2 &= -0,4553_4 + 0,0054684t - 0,0000010t^2 - 0,0000084t^3 \\
 &\quad + 0,0000008t^4, \\
 b_3 &= 0,4979_9 - 0,0059000t + 0,0002046t^2 - 0,0000009t^3 \\
 &\quad - 0,0000046t^4, \\
 b_4 &= -0,1871_8 + 0,0044466t - 0,0001417t^2 + 0,0000034t^3 \\
 &\quad + 0,0000017t^4,
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



wo

$$t = \frac{k - 0,35}{0,05} = 20 (k - 0,35)$$

ist. Die approximative Eigenfunktion ist hier auf 1 normiert worden. Den Eigenwert  $b_1$  erhält man aus (13) im Intervall (0,25 ... 0,45) mit etwa sieben Dezimalen und in den Parameterwerten  $h_n$  ist die fünfte Dezimale mit ein paar Einheiten unsicher.

Eine ausführlichere Darstellung wird etwas später in den «Annales Universitatis Turkuensis» veröffentlicht [5].

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HULTHÉN, L., und LAURIKAINEN, K. V., *Approximate Eigensolutions of the Equation*  $d^2\Phi/dx^2 + [a + b(e^{-x}/x)]\Phi = 0$ , Rev. mod. Phys. 23, 1 (1951).
- [2] HULTHÉN, L., *Some Integral Theorems for Eigenfunctions of a Discrete Spectrum*, K. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhandl. 15, Nr. 22, App. (1945).
- [3] LAURIKAINEN, K. V., *Asymptotic Eigensolutions of the Radial Deuteron Equation*, Ann. Acad. Sci. Fennicae AI 130 (1952, im Druck).
- [4] PAULI, W., und KUSAKA, S., *On the Theory of a Mixed Pseudoscalar and Vector Meson Field*, Phys. Rev. 63, 400 (1943).
- [5] LAURIKAINEN, K. V., und EURANTO, E. K., *Approximate Eigensolutions of the Equation*  $d^2\Phi/dx^2 - [k^2 + l(l+1)/x^2 - b e^{-x}/x]\Phi = 0$  for s-, p-, and d-states (in Vorbereitung).

### Summary

Earlier calculations by L. HULTHÉN and K. V. LAURIKAINEN concerning approximate solutions of the eigenvalue problem (1) and (2) in the case  $l = 0$  have been generalized for other values of  $l$ . Asymptotic expansions, valid for integer values of  $l$ , have been deduced for large values of  $k$  [3], the expansion for the lowest eigenvalue being (5). As possible generalizations of the function  $\Phi$ , which has turned out to be the "best fit" in the case  $l = 0$ —for the case  $l = 1$  trial functions (9), (10), and (11) have been studied, (11) giving the best results (Table 1). In the case  $l = 2$ , the trial function (12) was then chosen and found to lead to a very satisfactory convergence. These trial functions can be generalized for all values of  $l$ , no doubt leading to a good convergence in the variational procedure; the calculations, however, become very laborious for higher values of  $l$ . Some results are given in Table 2. For calculation of the lowest eigenvalue  $b_1$  and the corresponding parameters  $h_n$  there are also given interpolation formulas (13) for the case  $l = 0$ , taking  $n = 4$  in the trial function (11) and normalizing the approximative eigenfunction to unity.—A more detailed paper will be published in the *Annales Universitatis Turkuensis* [5].

(Eingegangen: 8. November 1952.)

## Zur Frage des Dunkelstromes in Photomultipliern

Von N. SCHÄETI und W. BAUMGARTNER, Zürich<sup>1)</sup>

In einer Arbeit<sup>2)</sup> über den Dunkelstrom von Li-Sb-Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern konnte gezeigt werden, dass dieser Dunkelstrom keinen von der Belichtung unabhängigen Wert besitzt. Eine Komponente des Dunkelstroms, die thermische Emission der Photokathode, ist nach Belichtung des Photomultipliers grösser und fällt erst nach einer gewissen Zeit auf den Anfangswert ab. Inzwischen sind analoge Verhältnisse bei Vervielfachern mit Cs-Sb-Kathoden konstatiert worden. Der Effekt ist hier noch ausgeprägter.

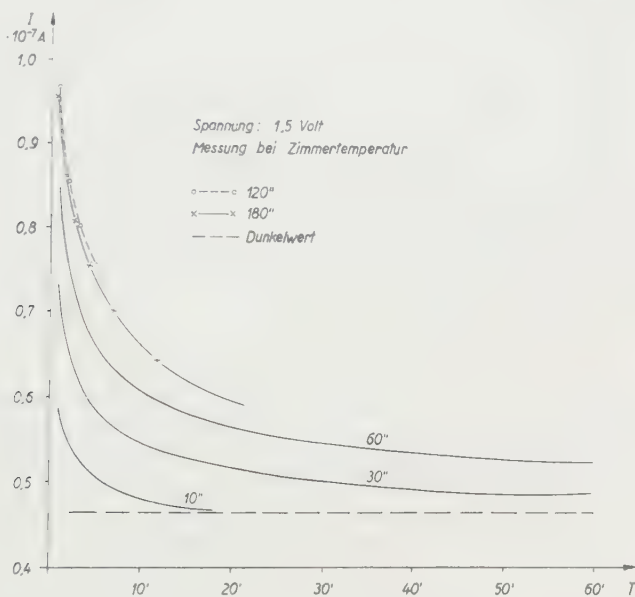


Fig. 1

Verlauf der Leitfähigkeit einer Cs-Sb-Schicht in Funktion der Vorbelichtungsdauer. Beginn der Messung: 1 min nach Belichtung der Schicht.

Alle Messungen wurden so durchgeführt, dass der Vervielfacher bei spannungslosem Dynodensystem mit einer W-Lampe vorbelichtet und der Dunkelstrom anschliessend verfolgt wurde.

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Durch Belichtung wird die Nullstosszahl einer Li-Sb- und Cs-Sb-Photokathode erhöht. Die Erhöhung der Nullstosszahl in Funktion der Belichtungsdauer zeigt Sättigung.

<sup>1)</sup> Institut für technische Physik an der ETH.

<sup>2)</sup> N. SCHÄETI und W. BAUMGARTNER, *Untersuchungen über den Dunkelstrom von Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern*, Helv. Phys. Acta 25, 605 (1952).

2. Nach Vorbelichtung der Photokathode findet man eine höhere Rotempfindlichkeit. Diese klingt parallel der Nullstosszahl im Dunkeln wieder ab.

3. Das Abklingen der Nullstösse einer vorbelichteten Photokathode kann durch Belichtung mit Rotlicht beschleunigt werden (Ausleuchteffekt).

4. Die spektrale Abhängigkeit von Nullstosszahlerhöhung und Photoeffekt ist für  $400 \text{ m}\mu < \lambda < 800 \text{ m}\mu$  im wesentlichen gleich. In der Nähe der langwelligen Grenze des Photoeffektes aber fällt die Nullstosszahlerhöhung langsamer ab.

Diese Untersuchungen sind weiter durch Messungen der Leitfähigkeit von Cs-Sb-Kathoden nach Vorbelichtung ergänzt worden. Diese Kathoden wurden in einer zylinderförmigen Zelle zwischen zwei Silberringen formiert<sup>1)</sup>. Wiederum wurden sie ohne Spannung vorbelichtet, und anschliessend wurde der Verlauf der Schichtleitfähigkeit verfolgt.

Figur 1 zeigt das Resultat dieser Messungen: Eine Vorbelichtung der Photokathode erhöht deren Leitfähigkeit. Durch genügend lange Vorbelichtungsdauer wird ein Sättigungswert der Leitfähigkeit erreicht. Die Abhängigkeit dieser Erscheinung von der Lichtwellenlänge der Vorbelichtung zeigt einen der Nullstosszahlerhöhung analogen Verlauf. Insbesondere stimmen die Werte der langwelligen Grenze für beide Effekte überein ( $\sim 775 \text{ m}\mu$  für Cs-Sb).

Das obenerwähnte Verhalten von Li-Sb- und Cs-Sb-Photokathoden zeigt, dass sie neben dem eigentlichen Photoeffekt ebenfalls Eigenschaften aufweisen, wie sie bei Photohalbleitern und Kristallphosphoren beobachtet werden. Lage und Aussehen des Absorptionsspektrums erinnern speziell an das vielfach untersuchte  $\text{CdS}^2)$ . Weitere Untersuchungen sollen zeigen, inwieweit die dort vorgeschlagenen Modellvorstellungen bezüglich optischer und elektrischer Eigenschaften auch auf diesen Fall zutreffen.

### Summary

The investigations on dark current in photomultipliers with Li-Sb- and Cs-Sb-photocathodes and on conductivity of Cs-Sb-cathodes indicate, that these cathodes show, beside the normal photoelectric effect, the behaviour of some photoconductive cells and cristal-phosphors.

(Eingegangen: 14. Februar 1953.)

---

### Varia - Miscellaneous - Divers

---

## X. Generalversammlung der Union Radio-Scientifique Internationale (U.R.S.I.)

Im gegenwärtigen Turnus vereinigt sich die U. R. S. I. alle zwei Jahre zu einer Generalversammlung. Als erste der elf wissenschaftlichen Unionen der UNESCO hat sie sich diesmal nach Australien begeben, wo sie als Gast der australischen Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation ihre X. Generalversammlung durchführte. Der amtierende Präsident, Sir EDWARD APPLETON,

<sup>1)</sup> N. SCHÄTTI und W. BAUMGARTNER, *Cathodes photoélectriques Lithium-Antimoine*, Le Vide 6, 1041 (1951).

<sup>2)</sup> J. FASSBENDER, Ann. Phys. [6] 5, 33 (1949). - I. BROSER und R. WARMSKY, Ann. Phys. [6] 7, 289 (1950).

eilte die sehr gut besuchte Versammlung – allein aus überseeischen Ländern waren 55 Delegierte eingetroffen, sozusagen alle auf dem Luftwege.

Die eigentlichen Verhandlungen, wofür die Universität Sydney ihre Räumlichkeiten zur Verfügung stellte, erstreckten sich auf den Zeitraum vom 12. bis 31. August. Der Stoff war auf sechs Kommissionen verteilt:

- I. Messtechnik und Normungsfragen,
- II. Wellenausbreitung in der Troposphäre,
- III. Wellenausbreitung in der Ionosphäre,
- IV. Atmosphärische Störungen,
- V. Radio-Astronomie,
- VI. Schwingungslehre und Schalttechnik.

Ganz allgemein führten die Verhandlungen zu einer Reihe von Resolutionen wissenschaftlicher und organisatorischer Natur. Diese werden demnächst in den Verhandlungsberichten, durch das Generalsekretariat in Brüssel, im einzelnen veröffentlicht. Auf den Abdruck der 300 wissenschaftlichen Beiträge – jeweils Vol. II der Verhandlungsberichte – wird dagegen verzichtet. Statt dessen sollen zukünftig in vermehrtem Masse Sonderberichte herausgegeben werden. Zu gegebener Zeit und von Fall zu Fall sollen damit bestimmte, wichtige Fragen in ihren weiteren Zusammenhängen übersichtlich dargestellt werden.

Den Abschluss der Versammlung bildete ein zweitägiger Besuch in der Bundeshauptstadt Canberra, verbunden mit einem Abstecher nach dem benachbarten Commonwealth Observatory auf dem Mt. Stromlo.

Die folgende, XI. Generalversammlung wird im Jahre 1954 in den Niederlanden durchgeführt. Der Präsident für die neue Amtsperiode ist R. P. PIERRE LEJAY (Frankreich).

W. GERBER

### Schweizerische Physikalische Gesellschaft

Die Frühjahrssitzung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft findet am Samstag, dem 2. Mai 1953, im Institut für Physik der Universität Genf statt. Anmeldungen für Referate aus dem Gebiet der angewandten Mathematik und Physik sind umgehend zu richten an die Schweizerische Physikalische Gesellschaft, Sekretariat für angewandte Physik (P. DE HALLER, c/o Gebrüder Sulzer AG., Winterthur), wo weitere Auskünfte über die Veranstaltungen und Besichtigungen während der Tagung zu erhalten sind.

P. DE HALLER

### 4. Kongress der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Cambridge und London 1952

Der wissenschaftliche Teil des 4. Kongresses der IVBH. wurde in den Räumen der Ingenieur fakultät der Universität Cambridge durchgeführt. In sechs Arbeits-sitzungen befasste sich der Kongress mit den Themen, deren wichtigste Schlussfolgerungen im folgenden zusammengefasst wiedergegeben werden.

#### A. Allgemeine Fragen

I. *Bemessungsgrundlagen und Sicherheit.* Eine zuverlässige Bemessung eines Bauwerkes stützt sich sowohl auf die Erfassung aller Belastungen im weitesten Sinne und auf die möglichst gute Kenntnis der Festigkeitseigenschaften der Bau-

stoffe; die dabei noch vorhandenen Lücken sind vor allem durch die Versuchsforschung zu schliessen, wobei eine internationale Zusammenarbeit wünschbar ist.

Bei der Behandlung der Frage der Sicherheit spielen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen eine immer grössere Rolle.

II. *Entwicklung der Berechnungsmethoden.* Die Berechnungsmethoden passen sich dank der Vielfältigkeit der neueren Untersuchungsverfahren immer besser den verschiedenartigsten Problemen an. Die Fortschritte sind besonders augenfällig bei den numerischen Methoden und der Entwicklung besserer experimenteller Verfahren.

### B. Stahlbau

I. *Grundlagen.* Im Vordergrund standen hier die Probleme, welche sich aus der Anwendung des Schweissens ergeben, wie etwa die Einwirkungen der Temperatur und der gefährlichen inneren Spannungen.

II. *Praktische Anwendungen.* Durch die Anwendung von Leichtprofilen, besonders im Hochbau, durch die geschickte Verwendung von Leichtmetallen oder durch geeignete Verfahren zur Vorspannung von Fahrbahndecken bei Verbundträgern sind in der letzten Zeit Fortschritte erzielt worden. Aber auch die klassischen Konstruktionsarten sind durch zweckmässige Massnahmen zur Aufnahme der Kräfte noch verbesserungsfähig. Durch eine bessere theoretische und experimentelle Erfassung der Beulprobleme können die Sicherheitsgrade bezüglich Ausbeulen noch weiter verkleinert werden.

### C. Massivbau

I. *Grundlagen und Eigenschaften des Betons.* Neben den eigentlichen Festigkeitseigenschaften wurden auch allgemeine Betoneigenschaften, wie Regelmässigkeit des Gefüges, Frostbeständigkeit und Verarbeitbarkeit, behandelt. Der Begriff der Dichte und seine verschiedenen Bedeutungen erforderte eine Klarstellung.

Bei den Verwitterungsvorgängen fällt vor allem die Vielfältigkeit der möglichen Ursachen auf. Von grossem Einfluss kann das Zusammenwirken von reinem oder säurehaltigem Wasser mit Meerwasser oder Meeratmosphäre sein.

II. *Aktuelle Probleme des Betons; vorgespannter Beton.* Bei der Berechnung des Eisenbetons ist die Tendenz festzustellen, die Bruchspannungen an Stelle der zulässigen Spannungen bei Gebrauchslast als massgebende Grösse einzuführen.

In letzter Zeit wird der vorgespannte Beton auch bei statisch unbestimmten Systemen angewendet. Das führt zu Problemen, deren Schwierigkeit besondere Anforderungen stellt, die jedoch systematisch einer Lösung entgegengeführt werden können. Beim vorgespannten Beton ist bei den Berechnungsmethoden und den Konstruktionsverfahren ein Höchstgrad von Genauigkeit und Sorgfalt erforderlich, um nicht nur die Tragfähigkeit der Bauwerke, sondern auch deren Dauerhaftigkeit zu gewährleisten.

H. WANZENRIE

## Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 21. bis 25. April 1953 in Aachen

Der Vorstandsrat der GaMM hat beschlossen, die diesjährige Tagung vom 21. bis 25. April 1953 in Aachen abzuhalten. Anmeldungen sind zu richten an Herrn Prof. Dr. F. SCHULTZ-GRUNOW, Technische Hochschule, Aachen.

H. GÖRTL



### Redaktionelles

Die Redaktionskommission beklagt den Verlust ihres Mitgliedes Herrn Prof. Dr. P. NIGGLI, der am 13. Januar unerwartet gestorben ist. Die Würdigung des Lebenswerkes des Verstorbenen wird zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.

---

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**The Vector Algebra of Vectors and Matrices.** By T. L. WADE (Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass., 1951), 189 pp., 10 figs.; \$4.50.

An der Florida State University gebräuchliches Lehrmaterial ist hier zu einem Buch von 189 Seiten zusammengefasst, das den Stoff der ersten einer Reihe von Vorlesungen über Algebra enthält.

149 Lehrsätze und 196 im Text verteilte Übungsaufgaben kreisen um die Grundaxiome der elementaren Vektoralgebra, so dass das Buch besonders für didaktische Betrachtungen Interesse finden dürfte.

*Th. Stutz*

**Supersonic Flow and Shock Waves.** By R. COURANT and K. O. FRIEDRICH (Interscience Publishers, New York, 1948) XVI + 464 S., 216 Abb.; \$7.00.

Das vorliegende bedeutungsvolle Buch von R. COURANT und K. O. FRIEDRICH will einen Überblick geben über die Überschallströmungen und die damit verbundenen Fragen, also über eines der wichtigsten Gebiete der Aerodynamik. Trotz der grossen praktischen Bedeutung dieses Gebietes sind wir heute noch weit entfernt von einer allgemein befriedigenden Theorie; ebenso fehlen einheitliche Methoden zur Lösung der auftretenden Probleme. In den letzten Jahren wurden zwar die Bemühungen sehr intensiviert, vor allem auch in Amerika, und manche Fortschritte erreicht, aber das Ziel liegt noch in weiter Ferne. Von Bedeutung sind in erster Linie die Untersuchungen der nichtlinearen (quasilinearen) partiellen Differentialgleichungen, die zum Begriff der einfachen Welle (*simple waves*) führen, mit deren Hilfe manche schwierigere Strömungsprobleme erfasst werden können. Wie B. RIEMANN schon fand, werden die quasilinearen Probleme in der Hodographenebene linear.

Die Darstellung der Gasdynamik ist in diesem Werke teilweise referierend behandelt, indem Probleme nur qualitativ, unter Hervorhebung der Grundgedanken, während andere Belange, insbesondere mathematische Entwicklungen und Verallgemeinerungen, etwas eingehender ausgeführt sind. Für Einzeluntersuchungen wird auf die einschlägige Literatur (im ganzen sind rund 200 Titel aufgeführt) hingewiesen, wobei allerdings manche Originalarbeiten in schwer zugänglichen Zeitschriften oder in nur mit Mühe erreichbaren Reports veröffentlicht sind. Um so dankenswerter ist es, dass R. COURANT und K. O. FRIEDRICH versuchten, eine Synthese zu geben, soweit das beim gegenwärtigen Stand der Erkenntnisse überhaupt möglich ist.

Einleitend geben die Autoren eine Zusammenfassung der Thermodynamik und der Bewegungsdifferentialgleichungen der kompressiblen Gase und der mathematischen Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen erster Ordnung für Funktionen mit zwei und mehr Variablen, und es werden die wichtigsten Begriffe, wie Charakteristik, Hodographentransformation und «simple waves», ein-



geführt. Das dritte und längste Kapitel befasst sich mit instationären, eindimensionalen Strömungen (Funktionen von  $x, t$ ) und behandelt Verdünnungs- und Verdichtungsströmungen, Verdichtungsstösse, sowie in allgemeiner Übersicht das Zusammenwirken mehrerer solcher Erscheinungen. An diesen Entwicklungen waren die beiden Verfasser während des Krieges massgebend beteiligt. Anschliessend folgen Untersuchungen von Explosionswellen und Verbrennungsvorgängen. Im nächsten Teil kommen die ebenen isentropischen wirbelfreien stationären Strömungen zur Sprache. Als wichtigste hier behandelte Probleme sind zu nennen: Strömungen durch Kanäle und Düsen, Verdichtungsstösse und damit zusammenhängende Fragen, Überschallströmungen um Tragflügel gemäss den Störungsmethoden. Bemerkenswert ist die hier eingeschaltete allgemeine Diskussion über das Problem der Randbedingungen bei stationären Strömungen. Gasströmungen durch zwei- und dreidimensionale Kanäle und das Ausströmen aus Düsen (speziell Lavaldüsen, wie sie bei Turbinen, Raketen, Windkanälen auftreten) werden im fünften Kapitel behandelt. Das letzte Kapitel befasst sich mit dreidimensionalen Strömungen, insbesondere mit den zylindersymmetrischen Strömungen um schlanke Körper, mit stationären, isentropischen und wirbelfreien kegelförmigen Strömungen und instationären Kugelwellen (Explosionswellen in Wasser, Luft).

So gibt das Buch, dessen Text durch zahlreiche Figuren unterstützt wird, einen vorzüglichen Überblick über dieses interessante physikalische Gebiet, und gelegentlich werden auch allgemeine erkenntnistheoretische Fragen gestreift. Die Verfasser bemühten sich, weder zu sehr die mathematischen Probleme noch die physikalisch-experimentelle Seite in den Vordergrund zu rücken, so dass gleicherweise Physiker, Ingenieure und Mathematiker dieses Buch mit Gewinn zur Hand nehmen werden.

*E. Roth-Desmeules*

**Adhesion and Adhesives.** By N. A. DE BRUYNE and R. HOUWINK (Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1951), 518 pp., 205 figs.; 70s.

Das allgemeine Bestreben der Technik, die Werkstoffe dem jeweiligen Verwendungszweck möglichst anzupassen, um eine maximale Ausnützung zu erreichen, bringt es bei der grossen Zahl heute zur Verfügung stehender Werkstoffe mit sich, dass auch Fragen über die Verbindungsmöglichkeiten der einzelnen Werkstoffe miteinander an Bedeutung stark zugenommen haben. Dabei sind vor allem bei ungleichartigen Werkstoffpaaren (Metall – Keramik, Metall – Kunststoffe usw.) die Verbindungen besonders von Interesse, die mit Hilfe eines Bindemittels (Leim, Klebstoff, Kitt, Adhesiv usw.) erreicht werden. Gerade in den letzten Jahren sind auf diesem Gebiet, wie das Beispiel des bekannten Klebstoffes «Araldit» der Ciba zeigt, grosse Erfolge erzielt worden, die erlauben, konstruktiv prinzipiell neue Wege zu gehen. Die Technologie des Verbindens stofflich gleichartiger oder ungleichartiger Konstruktionselemente mit Hilfe eines Bindemittels ist äusserst komplex, denn es spielen hier vor allem Fragen der Oberflächenbeschaffenheit und damit der wirksam werdenden Grenzflächenkräfte eine wesentliche Rolle, die bei der Wahl des Bindemittels und bei der Herstellung der Verbindung berücksichtigt werden müssen. Obschon noch viele Einflüsse, welche die Haftfestigkeit zweier Grenzflächen bestimmen, nicht in allen Einzelheiten abgeklärt sind, ist es ausserordentlich zu begrüssen, dass in diesem Buch die Gesamtprobleme der Haftung auf Grund der in den letzten Jahren erzielten theoretischen und praktischen Ergebnissen behandelt werden. Die Verfasser haben bei der ausserordentlichen Vielgestaltigkeit des Stoffes den einzig richtigen Weg gewählt und jedes Spezialgebiet durch einen Fachmann behandeln lassen. Was dadurch

vielleicht an Kontinuität des gesamten Stoffes verlorengelht, wird mehr als wettgemacht durch eine klare und gründliche Darstellung der einzelnen Stoffgebiete. Die wichtigsten Kapitel behandeln dabei folgende Themata:

a) *Theoretischer Teil*: Die allgemeinen Bedingungen für Benetzung von Oberflächen und Adhäsionen von Grenzflächen. Molekulare Kräfte, die an Grenzflächen wirksam sind. Das Verhalten von Klebstoffen während und nach dem Abbindeprozess bei mechanischer Beanspruchung. Kraftlinienverlauf in der Verbindungsschicht bei statischer Beanspruchung in Funktion der Art der Grenzflächen.

b) *Praktischer Teil*: Aufbau und Verwendung organischer Bindemittel, aufgeteilt in tierische, pflanzliche, synthetische und asphaltartige Stoffe. Anorganische Bindemittel, umfassend Zemente und metallische Verbindungen (Lote). Spezielle Bindemittel für natürliche und synthetische Kautschuke. Physikalische Prüfung der Bindemittel und der Haftfestigkeit.

Am Schluss jedes Kapitels folgt eine ausführliche Literaturübersicht, wobei auch die wichtigsten Patente angeführt sind.

Trotz der Vielgestaltigkeit der in den einzelnen Kapiteln behandelten Probleme ist es den Autoren gelungen, eine geschlossene Darstellung des Stoffes zu geben, wobei vor allem die Tendenz, allgemein gültige Zusammenhänge hervorzuheben, erfreulich stark hervortritt. Die meisten Kapitel sind nicht nur für den Chemiker von Interesse, sondern ebensoehr für den konstruktiv tätigen Ingenieur, sei es im Holz- oder Maschinenbau oder in der Elektrotechnik. Überall stellen sich Probleme über zweckmässige Verbindung von Werkstoffen, für deren Lösung das Studium des vorliegenden Buches sicher wertvolle Anregungen geben wird. Bezüglich Ausstattung befriedigt der bekannte Verlag auch verwöhnteste Ansprüche, und das Buch darf als Standardwerk auf diesem speziellen Gebiet der Werkstoffe allen interessierten Fachleuten bestens empfohlen werden. *F. Held*

**The Magnetron.** By R. LATHAM, A. H. KING and L. RUSHFORTH (Chapman & Hall, London, 1952). 142 pp., 82 figs.; 18 s.

Die Verfasser sind bekannt durch Beiträge zur Entwicklung des Multi-Cavity-Magnetrons in Blockkonstruktion. Das Buch gibt mit einer historischen Einleitung, welche auch andere Oszillatoren umfasst, eine zusammenfassende Darstellung des Magnetrons speziell im Hinblick auf die Verwendung für Radar auf Zentimeterwellen mit Impulstechnik hoher Leistungen. Die allgemeinen Eigenschaften des Multi-Cavity-Systems (gekoppelte Resonanzkreise) und die Leistungsauskopplung werden ausführlich in zwei weiteren Kapiteln behandelt. Drei folgende Kapitel diskutieren den Elektronenmechanismus, Schwingungsunterhaltung (*mode stability*), Schwingungsanfachung, Wirkungsgrad, ferner die Probleme der Kathodenkonstruktion für hohe Emissionsströme, die Konstruktion und Fabrikation des Magnetrons. Anschliessend folgt das Kapitel über die Belastung des Magnetrons mit Betriebscharakteristiken (Belastungsdiagramme, Leistungsmessung). Den Schluss bildet die Anwendung des Magnetrons für Radar mit zugehöriger Modulationstechnik.

Den Verfassern gelingt im ganzen eine anschauliche Darstellung, welche durch die 82 schematischen Figuren und Photographien vorteilhaft unterstützt wird. Das Literaturverzeichnis nach jedem Kapitel (hauptsächlich Reports) zeugt von grosser Verarbeitung des Materials. Ob den Verfassern auch die anschauliche Darstellung des Elektronenmechanismus (nach den schwierigen Originalarbeiten) gelungen ist, bleibe dem Leser zur Beurteilung überlassen. Jedenfalls wendet sich das Buch nicht nur an den Aussenstehenden, sondern auch der Fachmann kann vieles daraus lernen. *F. Lüdi*

**Partielle Differentialgleichungen.** Von J. HORN (W. de Gruyter, Berlin 1949). 228 S., 8 Abb.; DM 14.-.

Die vorliegende vierte Auflage dieses bewährten Lehrbuches ist ein Neudruck und entspricht damit im wesentlichen der zweiten Auflage aus dem Jahre 1929. Einzig das Literaturverzeichnis, das nur das Wichtigste umfasst, ist bis etwa 1940 nachgeführt. Das Buch bietet den klassischen Bestand der Theorie der partiellen Differentialgleichungen unter Beschränkung auf die am häufigsten auftretenden partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Die allgemeinen theoretischen Entwicklungen werden klar und ausführlich dargestellt, die Existenz der Lösungen wird bewiesen. Meist sind die verschiedenen Lösungsmethoden noch an wichtigen Beispielen aus der theoretischen Physik (Mechanik, Thermodynamik, Potentialtheorie) und der Flächentheorie vollständig durchgeführt. Inhaltsübersicht: Normalformen der linearen partiellen Differentialgleichungen (DGln.) zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen; hyperbolische DGln.; Theorie der linearen Integralgleichungen nach D. HILBERT und E. SCHMIDT, Lösung von FREDHOLM; Randwertaufgaben für gewöhnliche lineare DGln., soweit diese für die partiellen DGln. von Bedeutung sind; Randwertaufgaben für elliptische DGln.; parabolische DGln.; partielle DGln. erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen; partielle DGln. zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen (Monge-Ampèresche DGL.).

Das gut und übersichtlich aufgebaute Werk kann den Studenten der Mathematik und der Physik sowie der Ingenieurwissenschaften sehr empfohlen werden. Allerdings sei abschliessend noch darauf hingewiesen, dass das Buch – und dies lag in der Absicht des Verfassers, der nur die «reine» Theorie darstellen wollte – nichts enthält über numerische Methoden zur Lösung von nicht geschlossen integrierbaren Fällen, die ja in vielen Gebieten eine Rolle spielen und von grosser praktischer Bedeutung sind.

*E. Roth-Desmeules*

**Tables of the Error Function and of the First Twenty Derivatives.** By the Staff of the Computation Laboratory (The Annals of the Computation Laboratory of the Harvard University, Vol. 23). (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1952). 300 pp.; \$8.00.

Es handelt sich um eine ausführliche, sechsstellige Tafel des Fehlerintegrals

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

und dessen 21 ersten Ableitungen  $[\varphi^{(0)}(x)$  bis  $\varphi^{(20)}(x)]$ , die jedem, der mit dem Fehlerintegral arbeiten muss, eine willkommene Hilfe sein wird.

Die Tabelle reicht so weit, als die Funktionswerte noch die Schwelle von  $10^{-6}$  übersteigen, und das Argumentintervall (meist 0,002 oder 0,004) ist so gewählt, dass mit Hilfe der mit tabellierten Ableitungen leicht nach HERMITE oder auch mit einer Taylor-Reihe interpoliert werden kann.

Den eigentlichen Tabellen (276 Seiten) geht eine Einleitung voraus, in der die wichtigsten funktionentheoretischen Eigenschaften der tabellierten Funktionen und der damit zusammenhängenden Hermiteschen Polynome sowie einige Anwendungsmöglichkeiten mit den zugehörigen Literaturangaben zusammengestellt sind.

*H. Rutishauser*

# Linear Elastic Stability

## *A Critical Analysis of Methods*

By HANS ZIEGLER, E.T.H., Zurich

### CONTENTS

#### First Part<sup>1)</sup>

I. <i>Mechanical Systems</i> . . . . .	90
1. Work . . . . .	90
2. Conservative Forces . . . . .	91
3. Conservative Systems . . . . .	94
4. Classification of Mechanical Systems . . . . .	96
5. The Equations of LAGRANGE . . . . .	97
6. Stability of a Configuration of Equilibrium . . . . .	99
II. <i>Linear Systems</i> . . . . .	100
7. Purely Nongyroscopic Systems . . . . .	100
8. Purely Gyroscopic Systems . . . . .	103
9. Purely Dissipative Systems . . . . .	106
10. Purely Circulatory Systems . . . . .	107
11. Constant Generalized Forces . . . . .	109
12. Purely Instationary Systems . . . . .	111
III. <i>Elastic Stability</i> . . . . .	113
13. Methods for the Calculation of Critical Loads . . . . .	113
14. Purely Nongyroscopic Systems . . . . .	114
15. Purely Gyroscopic Systems . . . . .	116
16. The Influence of Damping . . . . .	116
17. Circulatory Systems . . . . .	118
18. Purely Instationary Systems . . . . .	119

#### Second Part

IV. <i>Buckling by Compression</i> . . . . .	168
19. EULER'S Buckling Cases . . . . .	168
20. The Influence of Constraints . . . . .	169
21. Asymmetric Constraints . . . . .	169
22. Twisted Rods . . . . .	170
23. Tangential Compression . . . . .	171
24. Pulsating Compression . . . . .	172
V. <i>Buckling by Torsion</i> . . . . .	173
25. Axial Torsion . . . . .	173
26. Conservative Torsion . . . . .	174
27. Semitangential Torsion . . . . .	176
28. Quasitangential Torsion . . . . .	176
29. Pseudotangential Torsion . . . . .	176
30. Pulsating Torsion . . . . .	177
VI. <i>Critical Angular Velocities</i> . . . . .	177
31. Critical Speeds of an Unloaded Shaft . . . . .	177
32. The Influence of Gyroscopic Moments . . . . .	178
33. Shafts Having Two Unequal Flexural Rigidities . . . . .	179
34. The Influence of Compression . . . . .	180
35. The Influence of Torsion . . . . .	180
36. Conclusion . . . . .	183
VII. <i>Bibliography</i> . . . . .	184

<sup>1)</sup> Published in fascicle 2.



## IV. Buckling by Compression

Straight rods and shafts present a variety of applications of the preceding theory.

### 19. Euler's Buckling Cases

A straight rod, subjected to a sufficiently small axial thrust  $P$  (Figure 19.1) has a stable equilibrium configuration in which it is slightly compressed. If

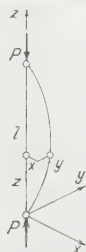


Figure 19.1

Rod under axial thrust.

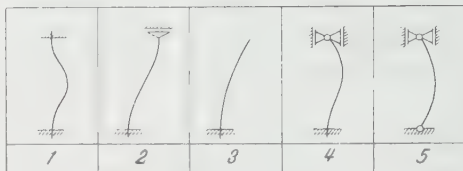


Figure 19.2

Buckling cases.

equilibrium is disturbed, it executes axial, torsional and flexural vibrations.  $P$  increases, the equilibrium, for a certain value  $P_1$ , becomes unstable, and the rod, being heavily bent by its load, buckles.

The so-called *buckling load*  $P_1$  depends on the constraints (Figure 19.2). The reactions, provided the constraints are rigid and frictionless, do no work. If damping, in accordance with Theorem 16c, is disregarded, the internal forces are conservative. So is the load, provided it is not only of a constant magnitude but also retains its axial direction independent of the shape of the deflection curve (Example 2.3). Hence, the problem is purely nongyroscopic. From Theorems 14 it follows that any load  $P > P_1$  is critical and that  $P_1$  can be obtained by either of the static methods.

Let the rod be homogeneous and prismatic. Then, provided it is supported symmetrically with respect to the principal planes  $(x, z)$ ,  $(y, z)$  (Figure 19.2), the displacements of the deflection curve in either of these planes are independent. Thus, we are confronted with the buckling problem of L. EULER [25]<sup>1)</sup>, the solution of which can be obtained by individual treatment of either projection while compression and torsion may be disregarded. The result is the well known formula of L. EULER

$$P_1 = k \pi^2 \frac{\beta}{l^2}, \quad (19)$$

where  $l$  denotes the length of the rod,  $\beta$  its smaller flexural rigidity and  $k$  a numerical factor taken from Table 19.

<sup>1)</sup> Numbers in square brackets refer to the Bibliography, page 184.

Table 19  
Euler's buckling loads

Case	1	2	3	4	5
Factor $k$	4	1	0.25	2.045	1

## 20. The Influence of Constraints

By Theorems 14 (Table 14) any purely nongyroscopic buckling problem is characterized by a buckling load  $P_1$  which represents the limit between the stable and the unstable regions and is obtained as the smallest value of  $P$  for which  $V$  is not positive definite. In order to distinguish it from other kinds of critical loads (particularly from the so-called buckling loads of higher order), we might call it a *genuine buckling load*.

Let  $A$  and  $B$  be two purely nongyroscopic systems differing only by their constraints. If  $B$  is subjected to all the constraints of  $A$  and, in addition, to a number of workless constraints,  $A$  and  $B$  have the same potential energy. Any configuration of  $B$  compatible with the constraints also is an admissible configuration of  $A$  (while the reverse is not true). Thus, if  $V$  in the system  $A$  is positive definite, so it is in the system  $B$ ; hence, the buckling load of  $B$  can not be smaller than the one of  $A$ . We have, therefore,

*Theorem 20a. If, in a purely nongyroscopic system, workless constraints are added, the buckling load does not decrease (but generally increases).*

From Theorem 6 it follows that Theorem 20a, formulated for the smallest critical load, remains valid in the presence of gyroscopic and dissipative forces. Thus, we obtain

*Theorem 20b. If in a stationary, noncirculatory system workless constraints are added, the smallest critical load does not decrease (but generally increases).*

The constraints illustrated by Figure 19.2 are workless, provided that friction is negligible. Their number increases from Case 3 to 1 and from Cases 3 and 5 respectively to Case 4. Table 19 shows the corresponding increase of  $k$ .

## 21. Asymmetric Constraints

If the constraints (Figure 19.2) are asymmetric with respect to the principal planes of the rod, the projections of the deflection curve, being connected by the end conditions, can not be treated separately. There are various types of asymmetric constraints; perhaps the most important one is represented by a large bearing, the axis of which is rotated in the end section through an arbitrary angle  $\vartheta$  with respect to the  $y$ -axis.



In Figure 21.1 *Case 5* is shown, both axes being rotated through the same angle  $\vartheta$  which can be restricted to the interval  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ . The buckling load  $P_1$  is given by (19.1) again, the numerical factor  $k$  (by which  $P_1$  exceeds the Euler load of Case 5) depending on the angle  $\vartheta$ . In Figure 21.2 the square root of the factor is plotted versus  $\vartheta$ , the parameter  $\lambda^2 = \alpha/\beta$  denoting the ratio of the flexural rigidities. For  $\vartheta = 0$ ,  $k = 1$ ; the rod buckles in the plane perpendicular to the axis of the bearings,  $P_1$  being the Euler load in Case 5. If  $\vartheta$  increases from 0 to  $\pi/2$ , the buckling load is raised by the increasing stiffness with respect to the axes of



Figure 21.1

Rod with rotated hinges.

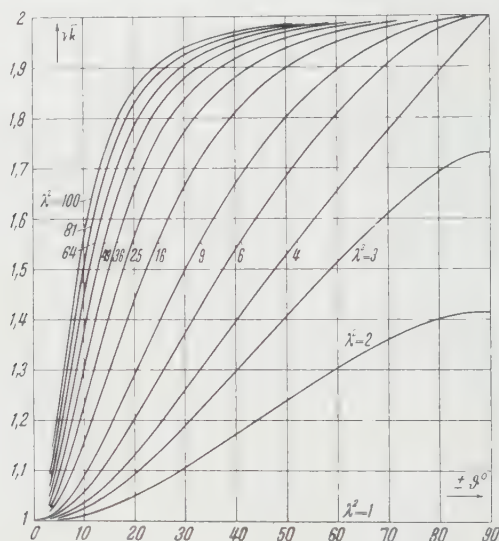


Figure 21.2

Buckling load for rotated hinges.

bearings, the deflection curve generally being a space curve. The highest value  $k = 4$ , attained by rods of slender cross section ( $\lambda^2 \geq 4$ ) for  $\vartheta = \pi/2$ , corresponds to buckling in the plane of the axes,  $P_1$  being the Euler load in Case 1.

Other examples of asymmetric constraints have been examined by P. F. LUNGER [28]. Like the case just treated, they are obtained from cases in Figure 19.2 by adding or removing workless constraints; hence, their buckling loads, according to theorem 20a, are limited by the corresponding values in Table 19.

## 22. Twisted Rods

If the rod is twisted in the unstrained state by a constant angle  $\omega$  per unit length, its displacements in either direction are connected by the differential equations.

In *Case 5*, the buckling load is found [29] to be given by (19.1), the numerical factor  $k$  (by which  $P_1$  exceeds the Euler load) depending on the total angle

twist,  $\vartheta = l \omega$ . In Figure 22.1,  $k$  is plotted versus  $\vartheta$  for several values of  $\lambda^2 = \alpha/\beta$ . In the whole, the buckling load, owing to the stiffening effect of the greater flexural rigidity  $\alpha$ , increases with the angle of twist,  $k$  tending, for  $\vartheta \rightarrow \infty$ , to  $\lambda^2/(1 - \lambda^2) \leq 2$ . For a given value of  $\lambda^2$ , the factor  $k$  is determined by an infinity of successive arcs. The reason is obvious: near  $\vartheta = 2\pi$  the buckling load of the first order (of the untwisted rod) begins to exceed the second order load, and since this process is repeated with higher orders,  $P_1$  is successively determined by buckling loads of increasing order.

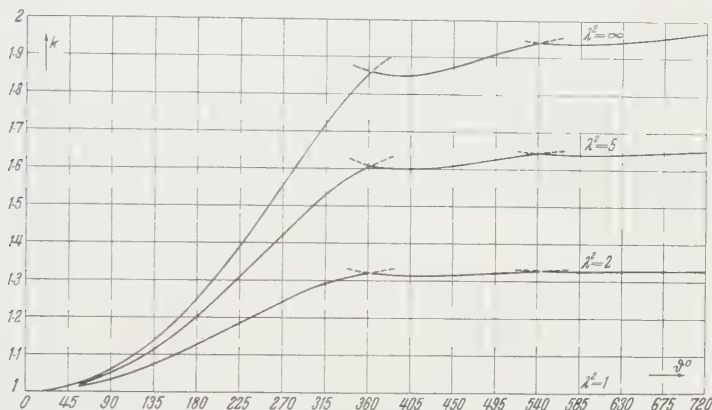


Figure 22.1

Buckling load of a twisted rod.

Case 3 has been solved by E. LÜSCHER [30]. Other cases of twisted rods have not been treated so far.

### 23. Tangential Compression

The rods considered in 19 to 22 are purely nongyroscopic. If, however, the thrust  $P$ , although of constant magnitude, has no constant direction but remains tangential to the deflection curve (Figure 23.1), the problem (Example 2.4) may be circulatory.

Resolving  $P$  as shown in Figure 23.1, we obtain, in the case of a prismatic rod with symmetric constraints,

$$V = P, \quad H = P x'_l. \quad (23.1)$$

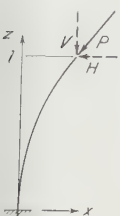


Figure 23.1  
Rod loaded  
tangentially.

While  $V$  is conservative,  $H$  represents the circulatory constituent of  $P$ . From Figure 19.2 it follows that  $H$ , apart from Case 3, does no work. Hence, Cases 1, 2, 4, and 5 are characterized by genuine buckling loads  $P_1$ , given by (19.1) in connection with Table 19. In Case 3, however, the existence of a genuine buckling load is uncertain. Besides, the critical loads according to Theorem 17, must be calculated by means of the kinetic method. Eventually, latent

instabilities must be taken into account, appearing, by Theorem 11a, whenever a nontrivial equilibrium position exists.

This problem has been solved by M. BECK [31]. He found that there exists a genuine buckling load, given by (19.1) with  $k = 2.031$ . It is approximately eight times as large as the axial buckling load.

#### 24. Pulsating Compression

If the rod is acted upon by a pulsating load

$$P = Q + S \cos \omega t, \quad (24.1)$$

the problem is instationary. According to Theorem 18, the kinetic method alone is legitimate; besides, the question of physical imperfections deserves attention.

Case 5 has been treated by E. METTLER [32]. The most general motion of the rod consists in an infinity of normal vibrations with amplitudes  $A_n$  satisfying the Mathieu equations

$$A_n'' + (\delta_n - \varepsilon_n \cos \tau) A_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (24.2)$$

where derivatives with respect to  $\tau = \omega t$  are denoted by primes. The parameters of (24.2) are

$$\delta_n = \frac{\lambda_n^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{Q}{Q_n}\right), \quad \varepsilon_n = \frac{\lambda_n^2}{\omega^2} \cdot \frac{S}{Q_n}, \quad \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} = \frac{S}{Q_n - Q} \quad (24.3)$$

where the quantities  $Q_n$ ,  $\lambda_n$  represent the static buckling loads (of all order) and the natural frequencies respectively of the unloaded rod.

Let the points  $P_n(\delta_n, \varepsilon_n)$  in Figure 12.2, for given values of  $Q$  and  $S$ , be represented by polar coordinates  $r_n, \vartheta_n$ . Since  $Q_n \sim n^2$ , their arguments form a rapidly decreasing sequence. At the same time, since  $\lambda_n \sim n^2$ , their radii increase so fast that  $\varepsilon_n \sim n^2$ . By the straight line  $\varepsilon = \delta$ , the upper half plane is divided into two regions of which, on the whole, I is stable while II is unstable. Provided  $Q + S < Q_1$ , all points  $P_n$ , according to (24.3), lie in the region I. Thus, a rod, as a rule, is stable if the maximum of the pulsating load does not exceed the static buckling load. If  $Q + S > Q_1$ , at least  $P_1$  lies in the region II. Moreover, for  $Q \rightarrow Q_1$ , the argument  $\vartheta_1 \rightarrow \pi/2$ , and for  $Q > Q_1$ ,  $\vartheta_1 > \pi/2$ . Thus, under a pulsating load the mean value of which is near or exceeds the static buckling load, the rod, as a rule, is unstable.

In order to discuss the most important exceptions from these rules, let us restrict ourselves to loads deviating but little from their mean values ( $S \ll Q$ ). Here, it follows from (24.3) that, apart from the cases  $Q \sim Q_n$ , the points  $P_n$  lie near the  $\delta$ -axis. Thus, mean loads  $Q > Q_1$  are critical. If  $Q < Q_1$ , however

stabilities are to be expected for  $\delta_n = 1/4, 1, 9/4, \dots$ , i. e. whenever

$$\frac{\bar{\lambda}_n}{\omega} \sqrt{1 - \frac{Q}{Q_n}} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

These conditions are met by arbitrarily small values of  $Q$  whenever

$$\omega = 2\lambda_n, \bar{\lambda}_n, \frac{2}{3}\bar{\lambda}_n, \dots \quad (24.4)$$

owing to damping and to the fact that the unstable regions near the  $\delta$ -axis, except in the vicinity of  $\delta = 1/4$ , are extremely narrow, the most important solution of (24.4) is  $\omega = 2\lambda_1$ . This instability is often referred to as *subharmonic resonance*.

In Cases 1 to 4, the problem is more complicated [33]. The influence of physical imperfections has been examined by E. METTLER [34].

## V. Buckling by Torsion

A. G. GREENHILL [35] has shown that straight rods and shafts subjected to torsion are capable of buckling. In order to discuss their instabilities, we shall confine ourselves to shafts having two equal flexural rigidities ( $\beta = \alpha$ ). The special case of a prismatic rod with different flexural rigidities has been treated by R. GRAMMEL [36].

### 25. Axial Torsion

Figure 25.1 shows a shaft acted upon by a constant couple of moment  $M$ . Provided that its vector remains axial during deflection, it shall be called an *axial moment*. Such a moment is (Example 2.5) circulatory unless the end of the shaft on which it acts is held in alignment. Thus, Cases 1 and 2 of Figure 19.2 indeed are purely nongyroscopic. They have, according to theorems 14, a genuine buckling load  $M_1$  which can be obtained by static methods. However, Cases 3, 4, and 5 are circulatory. Their critical moments, according to Theorem 17, must be calculated by means of the kinetic method.

According to A. G. GREENHILL [35], the buckling moment has the form

$$M_1 = \pm k\pi \frac{\alpha}{l}, \quad (25.1)$$

Figure 25.1  
Shaft acted  
upon by a  
couple.

$k$  being a numerical factor depending on the constraints and given by Table 25. It has been calculated by A. G. GREENHILL [35], the author [5] and A. TRÖSCH [6]. In Cases 1 and 2,  $k$  defines a genuine buckling load. In the other cases, it merely marks the transition of the shaft from a

stable to an unstable state. It is probable but has not been rigorously proved so far that in the latter cases  $M_1$  is a genuine buckling load.

Table 25  
*Axial buckling moments*

Case	1	2	3	4	5
Factor $k$	2.861	2	0	0	2

The stability of rods both under compression and axial torsion has been discussed by A. G. GREENHILL [35], R. GRAMMEL (see [4], p. 545), and A. TRÖSSEL [6]; for a full account of all buckling cases see [6].

## 26. Conservative Torsion

Since actually, for arbitrarily small values of  $M$ , instabilities never have been observed, the results obtained in 25 for Cases 3 and 4 disagree with the facts. Thus, the question arises whether it be justifiable to assume that the vector of the moment  $M$  remain axial during deflection. One might as well assume that it remain tangential to the deflection curve; however, an attempt by J. MORRIS [7] based on this assumption has shown that (at least in Case 3) the instability does not disappear. In any event, it is evident that any a priori assumption concerning the direction of the moment vector is arbitrary and that, in order to obtain more reliable results, the forces contributing to the moment  $M$  must be examined [9].

If the moment acting on the section  $z_1$  of a shaft is produced by two constant forces having fixed lines of action (Figure 26.1), the moment vector

$$\mathbf{M} = M(0, 0, 1) \quad (26.1)$$

is axial. This case, however, is extremely rare; perhaps it is approximately realized in Pelton turbines. In most cases, however, any deflection of the shaft is accompanied by a displacement of the lines of action of the forces and, in consequence, by an inclination of the moment vector, though the force vectors themselves remain constant.

In Figure 26.1, for instance, the lines of action of the constant forces may be free to follow an inclination of the disc. This type of loading is easily obtained by means of threads; besides, it is realized (in connection with an axial thrust) in axial turbines having two jets. As soon as the shaft is deflected, the tangential vector  $\mathbf{t}(x'_1, y'_1, 1)$  at  $z_1$  is inclined. So is the moment vector  $\mathbf{M}$  (Figure 25.1), which is given by

$$\mathbf{M} = M(x'_1, 0, 1), \quad (26.2)$$

provided the forces are parallel to the  $y$ -axis. A moment vector of this type has been called a *quasitangential moment*.

If two couples of this type are combined as shown in Figure 26.2, the moment vector is

$$\mathbf{M} = M\left(\frac{1}{2} x'_1, \frac{1}{2} y'_1, 1\right). \quad (26.3)$$

Such a *semitangential moment* is independent of the axes  $x, y$  and appears whenever a uniform distribution of more than two circumferential forces are applied to the disc, particularly if this distribution is continuous as in most axial turbines.

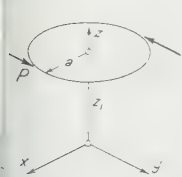


Figure 26.1  
Axial or quasitangential moment.

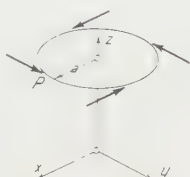


Figure 26.2  
Semitangential moment.

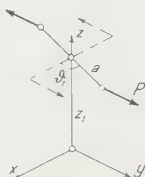


Figure 26.3  
Pseudotangential moment.

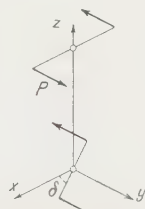


Figure 26.4  
Two quasitangential moments.

In Figure 26.3 the couple is applied by means of a cross bar fixed at right angles on the shaft. This type of loading, too, is easily realized by threads or an electric or magnetic field. If  $M_0 = 2 P a$  denotes the original moment and  $\vartheta_1$  the angle of twist just before buckling sets in, the moment responsible for buckling is  $M = M_0 \cos \vartheta_1$ , while obviously

$$0 \leq \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (26.4)$$

during deflection,

$$\mathbf{M} = M(x'_1 + y'_1 \tan \vartheta_1, 0, 1), \quad (26.5)$$

provided that the cross bar in the unloaded state and the loads are parallel to the axes  $x, y$  respectively. Equation (26.5) defines a *pseudotangential moment*.

If the shaft is loaded by means of a Cardan link,  $\mathbf{M}$  is of the quasitangential type. In case 5 (Figure 19.2) the buckling load, provided that the moments at both ends are quasitangential, depends on the angle  $\delta$  (Figure 26.4) through which one of these couples is rotated with respect to the other one. If the direction of the forces  $P$  is fixed, so is  $\delta$ . In the case of two Cardan links, however,  $\delta$  depends on the elastic twist which itself is a function of  $M$ ; this problem, which is more complicated, has been solved by W. T. KOITER [10].

Since the moments (26.2), (26.3) and (26.5) are conservative [9], we have

*Theorem 26. Semi-, quasi- and pseudotangential moments are purely non-rotoscopic.*



### 27. Semitangential Torsion

According to theorems 26 and 14, a shaft loaded by a semitangential moment has a genuine buckling moment which can be obtained by static methods.

The semitangential buckling moments, calculated [9] for the cases of Figure 19.2, are given by (25.1); the factor  $k$  being taken from Table 27. Since in Cases 1 and 2, there is no difference between the semitangential and the axial moment, the corresponding values in Tables 27 and 25 are identical.

Table 27  
*Semitangential buckling moments*

Case	1	2	3	4	5
Factor $k$	2.861	2	1	2.168	1.564

Note that the values of Table 27 satisfy Theorem 20a.

### 28. Quasitangential Torsion

Quasitangential moments are treated in the same way as those of 27.

The quasitangential buckling moments, calculated [9] for the cases of Figure 19.2, are given by (25.1), the factor  $k$  being taken from Table 28. The

Table 28  
*Quasitangential buckling moments*

Case	1	2	3	4	5
Factor $k$	2.861	2	0.5	1.576	1 ( $\delta = 0$ ) 1.021 ( $\delta = \pi/2$ )

differ from those of Tables 25 and 27 in Cases 3 to 5 and again are in accordance with Theorem 20a.

In Case 5, provided both external couples be quasitangential, the buckling moment depends on the angle  $\delta$  (Figure 26.4). Table 28 gives the values  $\delta = 0$  and  $\delta = \pi/2$  only.

### 29. Pseudotangential Torsion

Pseudotangential moments are treated in a similar manner [9]. In all of the cases of Figure 19.2, however, the buckling moment would produce an angle of twist beyond the interval (26.4). Thus, the shafts of Figure 19.2 do not buckle under pseudotangential moments acting at their ends.

The stability of shafts both under compression and conservative torsion has been examined by M. BECK [37]; the results will soon be published.

### 30. Pulsating Torsion

If a shaft is acted upon by a pulsating moment

$$M = Q + S \cos \omega t, \tag{30.1}$$

the problem is instantaneous. A kinetic investigation shows that the shaft executes torsional vibrations which, in the case of resonance, may be dangerous. Besides, the pulsating moment, like the pulsating load of 24, is capable of exciting lateral vibrations.

In Case 5 and under the assumption of an axial moment, they have been investigated by W. KELLER [38].

## VI. Critical Angular Velocities

For an observer at rest the critical speeds of a shaft are resonance phenomena [11]. For an observer rotating with the shaft, they are instabilities of a gyroscopic system. In a few simple cases it is possible to obtain the critical angular velocities by static methods which, thus far, have been used almost without exception. According to Theorem 15a, however, this way of approach is unsatisfactory; in numerous problems it does not yield all of the critical speeds.

### 31. Critical Speeds of an Unloaded Shaft

Figure 31.1 shows a shaft rotating with the angular velocity  $\omega$ . It is equipped with a single rotor of mass  $m$ , which is assumed to be statically and dynamically balanced. In order to simplify the problem, let us neglect the mass of the shaft, its compression and twist, the weight of the rotor and its deformation.

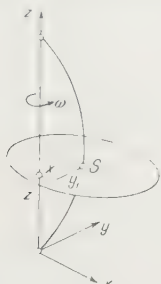


Figure 31.1

Shaft equipped with a rotor.

Case	1	2	4
Constraints			
Infl. number	$\frac{l^3}{3\alpha}$	$\frac{l^3}{192\alpha}$	$\frac{l^3}{48\alpha}$

Figure 31.2

Different cases of critical speeds.

as well as frictional forces and gyroscopic moments. Then the flexural vibrations, referred to a coordinate frame rotating with  $\omega$ , are determined by

$$m (\ddot{x}_1 - 2\omega \dot{y}_1 - \omega^2 x_1) = -F_x, \quad m (\ddot{y}_1 + 2\omega \dot{x}_1 - \omega^2 y_1) = -F_y, \tag{31.1}$$

where  $E_s, E_t$  may be interpreted as the forces producing the static displacements  $x_1, y_1$  of section  $z_1$ .

Provided that the flexural rigidities  $\alpha, \beta$  of the shaft are equal, the deflection  $a$  at  $z_1$  due to a unit force acting at  $z_1$  is parallel to this force. It has character of an influence number and depends on the constraints of the shaft. Introducing this influence number which, in three simple cases is given in Figure 31.2, into (31.1), we obtain

$$\ddot{x}_1 - 2\omega \dot{y}_1 + \left(\frac{1}{ma} - \omega^2\right)x_1 = 0, \quad \ddot{y}_1 + 2\omega \dot{x}_1 + \left(\frac{1}{ma} - \omega^2\right)y_1 = 0. \quad (31.2)$$

Hence, the problem is purely gyroscopic. Its differential equations are those of Example 8.1, provided the particular case  $c_1 = c_2 = 1/a$  is considered. Thus the shaft is stable for any value of  $\omega$ .

In order to explain the existence of a critical speed, physical imperfections such as static or kinetic unbalances must be taken into account. They can be represented by a few small additional masses located at arbitrary points of the rotor, giving rise to constant inertia forces. These forces, according to Theorem 11a, produce a latent instability whenever a nontrivial equilibrium position exists. Thus (and in accordance with Example 11.2), the angular velocity

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{ma}} \quad (31.3)$$

is critical (if negative values of  $\omega$  are neglected).

### 32. The Influence of Gyroscopic Moments

When the gyroscopic moments of the rotor are taken into account, the problem still is purely gyroscopic.

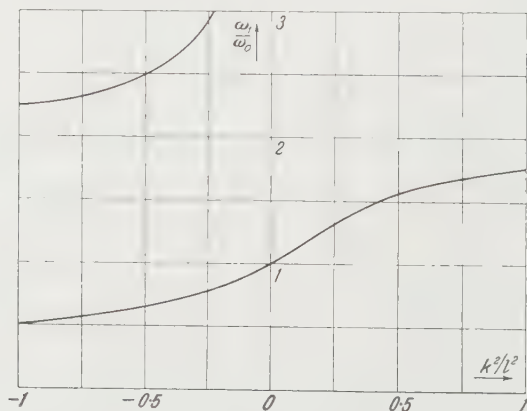


Figure 32.1

Influence of a gyroscopic moment on critical speed.

It has been treated by A. STODOLA [39], R. GRAMMEL (see [40], vol. II, 13) and the author [11]. Here again, the critical angular velocities represent latent instabilities. Provided the rotor is flattened (its axial moment of inertia exceeding the equatorial moment  $A$ ), there appears a single critical angular velocity  $\omega_1 > \omega_k$ . If the rotor is elongated ( $C < A$ ), there exists a pair of them the greater and the other smaller than  $\omega_0$ .

In Figure 32.1,  $\omega_1/\omega_0$  is plotted versus  $k^2/l^2$ , the quantity  $k^2 = (C - A)/m$  being positive or negative according to whether the rotor is flattened or elongated. The curves are obtained by using the influence numbers of a cantilever beam; thus, they are valid in Case 1 of Figure 31.2.

### 33. Shafts Having Two Unequal Flexural Rigidities

Provided the flexural rigidities  $\alpha, \beta$  of the shaft are unequal, the elastic force  $(F_x, F_y)$  introduced in 31 generally does not have the direction of the deflection  $(x_1, y_1)$ . If the influence number  $a_{ik}$  ( $i, k = x, y$ ) represents the deflection at  $z_1$ , measured in the direction  $i$  and due to a unit force parallel to the axis  $k$ , we have

$$a_{xx} > 0, \quad a_{yy} > 0, \quad a_{xy} < 0 \quad (33.1)$$

$$F_x = \frac{1}{a_{xx}} x_1, \quad F_y = \frac{1}{a_{yy}} y_1. \quad (33.2)$$

Neglecting the gyroscopic moments again, we obtain, by introduction of (31.1),

$$-2\omega \dot{y}_1 + \left( \frac{1}{m a_{xx}} - \omega^2 \right) x_1 = 0, \quad \ddot{y}_1 + 2\omega \dot{x}_1 + \left( \frac{1}{m a_{yy}} - \omega^2 \right) y_1 = 0. \quad (33.3)$$

Thus, the problem still is purely gyroscopic. Its differential equations are those of Example 8.1; hence, the angular velocities

$$\sqrt{\frac{1}{m a_{xx}}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{1}{m a_{yy}}} \quad (a_{xx} > a_{yy}) \quad (33.4)$$

are critical.

This result has been established by R. GRAMMEL (see [4], p. 786). According to (33.3), both limits of the critical interval (33.4) represent latent instabilities which might have been obtained by static methods. According to Theorem 15a, however, it cannot be proved by static means that the whole interval is critical. Hence, the *principle of equivalence* which, likewise, is due to R. GRAMMEL (see [4], p. 782), stating that the critical values of  $\omega$  are those for which, in the absence of unbalances, nontrivial equilibrium positions exist, is not generally valid. It must be replaced by

*Theorem 33. In a purely gyroscopic system, the angular velocities  $\omega_1 < \omega_2$  admitting nontrivial equilibrium positions (in the rotating coordinate frame) critical. Any other angular velocity  $\omega > \omega_1$  may or may not be critical.*

### 34. The Influence of Compression

The shafts of Figure 31.2, loaded by a constant axial thrust  $P$ , give to the five cases illustrated in Figure 34.1. Since  $P$  is conservative, the prob-

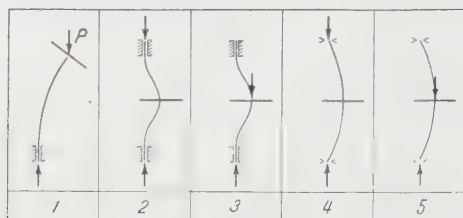


Figure 34.1

Loaded shafts.

still is purely gyroscopic. Provided that  $\alpha \neq \beta$ , the differential equations of motion are (31.2); the critical angular velocity therefore is

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{m \bar{a}}}, \quad (3)$$

the influence number  $\bar{a}$  denoting the deflection at  $z_1$  due to a horizontal unit force at  $z_1$  and the vertical thrust.

The evaluation of  $\bar{a}$  shows that, for loads small compared with the buckling load, the ratio of  $\omega_1$  and  $\omega_0$  is given by the formula of R. MELAN [41],

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 - k \frac{Pl^2}{\alpha}, \quad (3)$$

the factor  $k$  being taken from Table 34 (see also [4], p. 800).

Table 34

*Influence of a thrust on critical speed*

Case	1	2	3	4	5
Factor $k$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$

### 35. The Influence of Torsion

If the shafts of Figure 34.1 are acted upon by a torque in place of thrust, the differential equations (31.1) remain valid. Due to the torque, how-

and in spite of the assumption  $\alpha = \beta$ , the force  $(F_x, F_y)$  does not necessarily have the direction of the deflection  $(x_1, y_1)$ . Making use of the influence numbers defined in 33, we have

$$x_1 = a_{xx} F_x + a_{xy} F_y, \quad y_1 = a_{yx} F_x + a_{yy} F_y. \quad (35.1)$$

The determinant

$$\Delta = a_{xx} a_{yy} - a_{xy} a_{yx} \quad (35.2)$$

is positive (see [4], p. 89); hence

$$F_x = \frac{1}{\Delta} (a_{yy} x_1 - a_{xy} y_1), \quad F_y = \frac{1}{\Delta} (-a_{yx} x_1 + a_{xx} y_1). \quad (35.3)$$

Introducing (35.3) into (31.1), we obtain the differential equations

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\omega \dot{y}_1 + \left( \frac{a_{yy}}{m\Delta} - \omega^2 \right) x_1 - \frac{a_{xy}}{m\Delta} y_1 &= 0, \\ \ddot{y}_1 + 2\omega \dot{x}_1 - \frac{a_{yx}}{m\Delta} x_1 + \left( \frac{a_{xx}}{m\Delta} - \omega^2 \right) y_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (35.4)$$

and the characteristic equation

$$\left. \begin{aligned} \lambda^4 + \left( 2\omega^2 + \frac{a_{xx} + a_{yy}}{m\Delta} \right) \lambda^2 + 2 \frac{a_{xy} - a_{yx}}{m\Delta} \omega \lambda \\ + \omega^4 - \frac{a_{xx} + a_{yy}}{m\Delta} \omega^2 + \frac{1}{m^2 \Delta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35.5)$$

If all of the couples acting on the shaft are *axial*, the rotating system (except in Case 2) is not only gyroscopic but also circulatory. This implies, according to 10, that  $a_{yx} \neq a_{xy}$ .

In Case 1 the shaft at rest, according to 25, is unstable under arbitrarily small values of  $M$ . It has been proved in [5] that it remains unstable for any value of  $\omega$ ; thus, any angular velocity is critical. A. TRÖSCH [6] has shown that the same result applies in Cases 4 and 5, while in Cases 2 and 3 the critical angular velocity (for moments small compared with the buckling moment) is given by the formula of R. GRAMMEL (see [4], p. 800),

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 - k \left( \frac{M l}{\alpha} \right)^2, \quad (35.6)$$

the factor  $k$  being taken from Table 35a.

Table 35a

*Influence of an axial moment on critical speed*

Case	2	3
Factor $k$	3 (640)	3 (1280)



In most actual cases, however, the moments acting on the shaft are either semi- or quasitangential. In Case 2, this is irrelevant. In Cases 1 and 3, the moment acting on the disc must be specified; in Cases 4 and 5 those acting at the ends must also be specified.

If the moment acting on the disc is *semitangential* (as is the case in turbomachinery having more than two jets), the problem, in Cases 1 to 3, is purely gyroscopic; hence

$$a_{xx} > 0, \quad a_{xy} = a_{yx}, \quad a_{yy} > 0. \quad (32)$$

Moreover, since the semitangential moment (26.3) is independent of the coordinate frame,  $a_{xx} = a_{yy}$  and  $a_{xy} = -a_{yx}$ ; thus

$$a_{xx} = a_{yy} = \bar{a} > 0, \quad a_{xy} = a_{yx} = 0. \quad (33)$$

It follows that (35.5) is quadratic in  $\lambda^2$ . The discriminant of (35.5) is

$$D = 8 \frac{a_{xx} - a_{yy}}{m^2 + 1} \omega^2 + \frac{(a_{xx} - a_{yy})^2}{m^2 + 1} + 4, \quad (34)$$

and the roots  $\lambda^2$  are negative or zero. Hence, the only instabilities are of latent type. They are given by (34.1),  $\bar{a}$  denoting the deflection at  $z_1$  due to a horizontal unit force at  $z_1$  and to the moment  $M$ .

The evaluation of  $\bar{a}$  shows that, in Cases 1 to 3, formula (35.6), together with the factors  $k$  taken from Table 35b, is valid [11].

Table 35b  
*Influence of a semitangential moment on critical speed*

Case	1	2	3
Factor $k$	$\frac{7}{160}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{13}{7680}$

In Cases 4 and 5, the moments acting at the ends of the shaft still may be of various types. If applied by means of Cardan links, they are quasitangential, i. e. of the form (26.2). The problem, which is being treated by CH. WEHRLI [12], is purely gyroscopic. Since the relations (35.7) still hold, the discriminant (35.9) is positive; hence, the roots  $\lambda^2$  of (35.5) are real. They are both negative if and only if the constant term in (35.5) is positive. Thus, an entire interval

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (35)$$

is critical, the limits of which follow from

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2m+1} \left( a_{xx} + a_{yy} \mp \sqrt{(a_{xx} - a_{yy})^2 + 4a_{xy}^2} \right). \quad (36)$$

In Case 5, CH. WEHRLI [42] obtained the critical interval

$$1 - \frac{3}{64} \cdot \frac{Ml}{\alpha} \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1 + \frac{3}{64} \cdot \frac{Ml}{\alpha}; \quad (35.12)$$

Case 4 is more complicated, since the critical interval depends on the angle  $\delta$  (figure 26.4) which, by itself, is a function of  $M$ .

If the moment acting on the disc is *quasitangential* (as is the case in turbines having two jets), (26.2) holds in a coordinate system at rest. Therefore, the problem is best treated in a fixed coordinate frame.

In Cases 1 to 3, this treatment [11] shows that there are two critical angular velocities. In Case 1, they are given by

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} - 1 = \frac{3}{16} \cdot \frac{Ml}{\alpha}. \quad (35.13)$$

In Cases 2 and 3, they coincide for small values of  $M$ , being given by (35.6) in connection with Table 35c.

Table 35c

*Influence of a quasitangential moment on critical speed*

Case	2	3
Factor $k$	$\frac{3}{640}$	$\frac{13}{7680}$

Case 4 does not present any new aspects, since the disc is not loaded. In Case 5, the assumption of a cardan link at one end implies that at the disc (26.2) holds with respect to a fixed coordinate frame, at the end, however, with respect to a rotating one. As a consequence, there exists no coordinate frame in which the influence numbers are independent of the time. The problem which, in this case, is instationary, is still unsolved.

### 36. Conclusion

The problems treated in 19 to 35 are taken from a comparatively narrow field. Yet they clearly show that the range of validity of static methods is more limited than is usually supposed. Besides, it seems probable that this result will have some bearing on other problems treated so far by static methods.

## BIBLIOGRAPHY

- [1] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability* (McGraw-Hill, New York and London, 1936).
- [2] J. RATZERSDORFER, *Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken* (Springer, Vienna, 1936).
- [3] A. PFLUGER, *Stabilitätsproblem der Elastostatik* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950).
- [4] C. B. BILZENO and R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin, 1935).
- [5] H. ZIEGLER, ZAMP 2, 265 (1951).
- [6] A. TRÖSCH, Ing.-Arch. 20, 258 (1952).
- [7] J. MORRIS, Aircraft Eng. 23, 375 (1951).
- [8] H. ZIEGLER, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).
- [9] H. ZIEGLER, ZAMP 3, 96 (1952).
- [10] W. T. KOITER, Proc. Kon. Akad. Wetensch., to be published.
- [11] H. ZIEGLER, Ing.-Arch. 20, 377 (1952).
- [12] H. ZIEGLER, Elem. Math. 7, 121 (1952).
- [13] S. TIMOSHENKO and D. H. YOUNG, *Engineering Mechanics* (McGraw-Hill, New York and London, 1940).
- [14] J. P. DEN HARTOG, *Mechanics* (McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1948).
- [15] E. J. ROUTH, *Dynamics of a System of Rigid Bodies* (Macmillan, London, 1930).
- [16] S. TIMOSHENKO and D. H. YOUNG, *Advanced Dynamics* (McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1948).
- [17] A. A. ANDRONOW and C. E. CHAIKIN, *Theory of Oscillations* (Princeton University Press, Princeton, 1949).
- [18] TH. VON KÁRMÁN and M. A. BIOT, *Mathematical Methods in Engineering* (McGraw-Hill, New York and London, 1940).
- [19] E. MEISSNER and H. ZIEGLER, *Mechanik* (Birkhäuser, Basel, 1946–1952).
- [20] R. ZURMÜHL, *Matrizen* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950).
- [21] H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra* (Vieweg, Braunschweig, 1898).
- [22] R. COURANT and D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik* (Springer, Berlin, 1931–1937).
- [23] E. T. WHITTAKER, *Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper* (Springer, Berlin, 1924).
- [24] J. J. STOKER, *Nonlinear Vibrations* (Interscience Publishers, New York, 1950).
- [25] L. EULER, *Histoire de l'Académie*, vol. 13 (Berlin, 1757).
- [26] K. KLOTTER, *Technische Schwingungslehre* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1951).
- [27] H. ZIEGLER, Schweiz. Bauztg. 66, 87 (1948).
- [28] P. FILLUNGER, Z. angew. Math. Mech. 6, 294 (1926).
- [29] H. ZIEGLER, Schweiz. Bauztg. 66, 463 (1948).
- [30] E. LÜSCHER, Schweiz. Bauztg. 71, 172 (1953).
- [31] M. BECK, ZAMP 3, 225 (1952).
- [32] E. METTLER, Mitt. Forsch.-Inst. GHK-Konzern 8, 1 (1940).
- [33] E. METTLER, Ing.-Arch. 17, 418 (1949).
- [34] E. METTLER, Forsch.-Hefte Gebiete Stahlbaues 4, 1 (1941).
- [35] A. G. GREENHILL, Proc. Inst. mech. Eng. 1883, p. 182.
- [36] R. GRAMMEL, Z. angew. Math. Mech. 3, 262 (1923), see also [4], p. 540.
- [37] M. BECK, Thesis, Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich (to be published).

- [3] W. KELLER, Diplomarbeit, Technische Hochschule Stuttgart (Prof. R. GRAMMEL), 1951.  
 [9] A. STODOLA, Z. ges. Turbinenwesen 15, 253 (1918).  
 [10] R. GRAMMEL, *Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950).  
 [11] R. MELAN, Z. öster. Ing.- u. Arch.-Ver. 69, 610 (1917).  
 [12] CH. WEHRLI, Diplomarbeit, Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich (1952).

### Zusammenfassung

Elastische Systeme können im wesentlichen in konservative (und zwar 1. nicht-zyroskopische und 2. gyroskopische) sowie nichtkonservative (3. dissipative, 4. zirkulatorische und 5. instationäre) Systeme eingeteilt werden. Eine Analyse der fünf Kategorien zeigt, dass die bei Stabilitätsuntersuchungen üblichen statischen Verfahren nur in der 1. und in beschränktem Masse in der 3. Kategorie anwendbar sind, während die übrigen Systeme kinetisch behandelt werden müssen.

(Received: January 7, 1953.)

## Beitrag zur Kenntnis der Eigenschwingung einer idealen Flüssigkeit in kommunizierenden Röhren

Von HSIEN-CHIH LIU, Schanghai<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung und Geschichtliches

ISAAC NEWTON<sup>2)</sup> behandelte die Schwingungen von Wasser in einer U-förmig gebogenen Röhre mit senkrechten Schenkeln und konstantem Querschnitt. Wenn  $L$  die Länge der Wassersäule ist, so beträgt die Zeit einer vollen Schwingung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}. \quad (1)$$

JOHANN BERNOULLI<sup>3)</sup> zeigte, dass, wenn die Schenkel des Rohres die Neigungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gegenüber der Waagrechten haben, die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)}}. \quad (2)$$

st.

DANIEL BERNOULLI<sup>4) 5)</sup> untersuchte die Schwingungen von Wasser in verbundenen Gefässen mit senkrechten Schenkeln. Es werde angenommen, dass

<sup>1)</sup> Technische Hochschule Tsinan.

<sup>2)</sup> ISAAC NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (London 1687).

<sup>3)</sup> JOHANN BERNOULLI, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* (1727).

<sup>4)</sup> H. DE LAGRENÉ, *Cours de Navigation intérieure* (Paris 1869).

<sup>5)</sup> DANIELIS BERNOULLI, *Hydrodynamica* (Argentorati 1738).

die Endräume Zylinder bilden oder, bei beliebiger Gefäßform, dass die Schwingungen in derart engen Grenzen bleiben, dass man  $F_1$  und  $F_2$  als konstant betrachten darf (wobei man unter  $F_1$  und  $F_2$  die Mittelwerte der Querschnitte im Bereich der Schwingung versteht). Ferner sei

$$\int \frac{ds}{F_s} = \frac{L}{F} = \text{const}$$

gesetzt (wobei  $F_s$  der Querschnitt des Rohres an einer beliebigen Stelle und ein Linienelement längs der mittleren Stromlinien bedeuten), nämlich bei zylindrischen Endräumen  $F_1 = F_2$ , oder nahezu konstant, nämlich bei ungleich zylindrischen Endräumen. Auch sei jeder Zylinderquerschnitt viel grösser als jener des Verbindungsrohres oder auch bei beliebiger Gefäßform die Schwingung recht klein. Unter diesen Annahmen erfordert die Vollschiwingung die Zeit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L F_1 F_2}{g F (F_1 + F_2)}}$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Eigenschwingung einer idealen Flüssigkeit in kommunizierenden Röhren von veränderlichem Querschnitt.

## 2. Ableitung der Bewegungsgleichung

Nach der erweiterten Bernoullischen Gleichung für nichtstationäre Strömung ist für die beiden Spiegelquerschnitte wegen  $p_1 = p_2 = \text{Atmosphärendruck}$

$$\frac{v_1^2}{2g} - s_1 \sin \alpha_1 = \frac{v_2^2}{2g} + s_2 \sin \alpha_2 + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds.$$

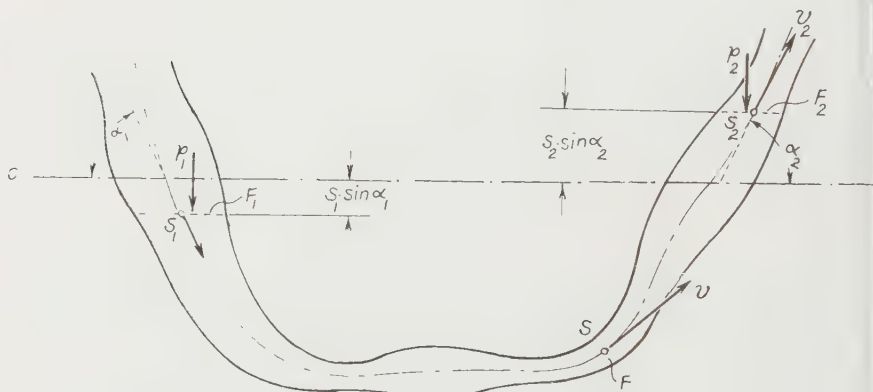


Fig. 1

Festlegung der Koordinaten für das Schwingungssystem.

dieser Gleichung und in Figur 1 bezeichnen  $v_1$  und  $v_2$  die Spiegelgeschwindigkeiten,  $v$  die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle  $s$  zwischen den beiden Spiegeln,  $s_1 \sin \alpha_1$  und  $s_2 \sin \alpha_2$  die entsprechenden lotrechten Komponenten der Verschiebungen der Spiegelflächen gegen die Gleichgewichtslage, und  $ds$  ein Strömungsrichtung gemessenes Längenelement. Wegen  $v_1 F_1 = v_2 F_2$  und  $F_1 = s_2 F_2$  folgt aus (4)

$$\frac{d^2}{ds^2} \left[ 1 - \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^2 \right] - \left( \sin \alpha_1 + \frac{F_1}{F_2} \sin \alpha_2 \right) s_1 = \frac{1}{g} \int \frac{d^2 v}{ds^2} ds$$

[und unter Beachtung von  $v_1 = ds_1/dt$  und  $vF = v_1 F_1$  wird

$$\left[ 1 - \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^2 \right] \left( \frac{ds_1}{dt} \right)^2 - 2g \left( \sin \alpha_1 + \frac{F_1}{F_2} \sin \alpha_2 \right) s_1 = 2 \frac{d^2 s_1}{dt^2} \int \frac{F_1}{F} ds$$

er mit

$$\eta = \frac{F_1}{F}, \quad \eta_2 = \frac{F_1}{F_2}, \quad \int \frac{F_1}{F} ds = \int \eta ds = L \quad \text{und} \quad \lambda = \eta_2^2 - 1$$

$$L \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{ds_1}{dt} \right)^2 + g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) s_1 = 0. \quad (5)$$

### 3. Umformung der Bewegungsgleichung für den Fall $F_1 = \text{const}$ , $F_2 = \text{const}$

Die beiden Schenkel der Röhre (Figur 2) mögen verschiedene Neigungen besitzen, also  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Jetzt gilt

$$\lambda = \eta_2^2 - 1 = \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 1 = \text{const.} \quad (6)$$

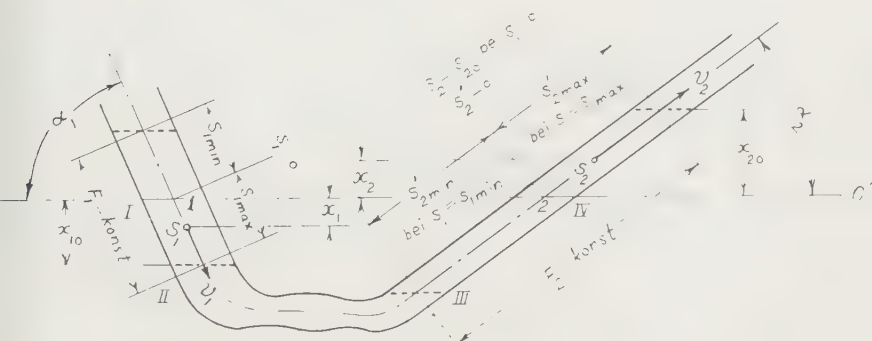


Fig. 2

Spezialfall des Rohres;  $0-0'$  die Gleichgewichtslage;  $F = F_1 = \text{const}$  bei Stelle 1;  
 $F = F_2 = \text{const}$  bei Stelle 2.



Für die reduzierte Länge  $L$  wird zweckmässig geschrieben

$$L \equiv \int_{s_1}^{s_2} \eta \, ds = \int_0^{s_{20}} \eta \, ds - \int_0^{s_1} \eta \, ds + \int_{s_{20}}^{s_2} \eta \, ds;$$

hierin sind

$$L_0 = \int_0^{s_{20}} \eta \, ds = \text{const}, \quad \int_0^{s_1} \eta \, ds = s_1, \quad \int_{s_{20}}^{s_2} \eta \, ds = \eta_2^2 s_1,$$

also  $L = L_0 + \lambda s_1$ , und damit lautet die Bewegungsgleichung:

$$(L_0 + \lambda s_1) \frac{d^2 s_1}{dt^2} - \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{ds_1}{dt} \right)^2 - g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) s_1 = 0.$$

#### 4. Integration der Bewegungsgleichung

Der Wert  $\eta_2$  ist je nach der Rohrgestaltung sehr verschieden, und demnach kann auch die Lösung dieser Differentialgleichung sehr mannigfaltig sein. Untersuchung soll hier nur auf den Spezialfall  $F_1 = \text{const}$ ,  $F_2 = \text{const}$  beschränkt werden, da man sonst auf grosse mathematische Schwierigkeiten stösst. Es wird also vorausgesetzt, dass die beiden Enden der Flüssigkeitssäule sich stets in Rohrstücken von konstantem Querschnitt bewegen.

Es seien  $2 s_{1 \max}$  (Figur 2) die Länge des Stückes 1 mit  $F_1 = \text{const}$  und  $2 s_{2 \max}$  die Länge des Stückes 2 mit  $F_2 = \text{const}$ . Das Rohr kann durch Ziffern I, II, III und IV in drei Abschnitte unterteilt werden, und zwar

$$L_0 = \int_I^{IV} \frac{F_1}{F} \, ds = s_{1 \max} + \int_{II}^{III} \frac{F_1}{F} \, ds + \eta_2 s_{2 \max}.$$

Nach der oben erwähnten Einschränkung sollen die Enden der Flüssigkeitssäule während der Bewegung sich niemals in dem Abschnitt II–III befinden. Infolgedessen muss sein:

$$s_{10} \leq \frac{s_{2 \max}}{\eta_2}.$$

Nach Multiplikation von (7) mit  $\dot{s}_1$  lässt sie sich in die folgende Form bringen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L_0}{2} \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} \lambda s_1 \dot{s}_1^2 + \frac{g}{2} (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) s_1^2 \right) = 0$$

oder nach Integration

$$(L_0 + \lambda s_1) \left( \frac{ds_1}{dt} \right)^2 + g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) s_1^2 = A, \quad (1)$$

obei

$$A = g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) s_{10}^2 \quad (11)$$

durch die Anfangsbedingung  $t = 0$ ,  $\dot{s}_1 = 0$  und  $s_1 = s_{10}$  bestimmt ist.  $s_{10}$  bedeutet die maximale Anfangsamplitude. Der Ausdruck (10) lässt sich schreiben

$$\frac{ds_1}{dt} = \sqrt{g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)} \sqrt{\frac{s_{10}^2 - s_1^2}{L_0 - (\eta_2^2 - 1) s_1}} \quad (12)$$

Gleichung (12) besagt, dass die Maximalausschläge auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage gleich sind. Auffällig ist das Auftreten von  $s_1$  im Nenner unter der Wurzel. Daraus lässt sich schließen, dass die absoluten Werte der Geschwindigkeit, bezogen auf gleiche Abstände zu beiden Seiten der Gleichgewichtslage nicht gleich sind. Wenn man  $\dot{s}_1$  gegen  $s_1$  aufträgt, so bekommt man ellipsenartige Kurven (Figur 3), deren Maximalwert jedoch nicht auf der Achse  $s_1 = 0$  liegt. Nach welcher Seite und um welchen Betrag dieser Maximalwert von der Mittellage abweicht, wird durch den Wert  $\eta_2$  bestimmt.

Bei dem Ausschlag

$$s_1 = -\frac{L_0}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{L_0}{\lambda}\right)^2 - s_{10}^2} \quad (13)$$

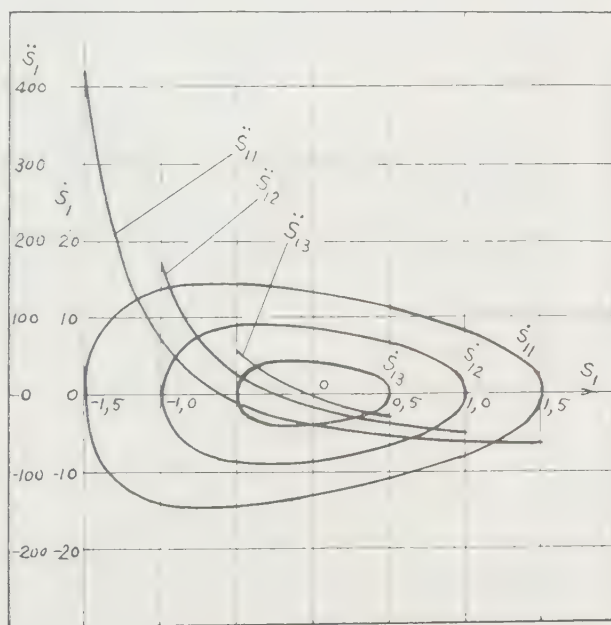


Fig. 3

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Abhängigkeit vom Wege für  $\eta_2 = 7$ .

hat die Geschwindigkeit ihren Maximalwert, wobei das positive Zeichen der Wurzel für  $\eta_2 > 1$  und das negative Zeichen für  $\eta_2 < 1$  zu setzen ist.

Man erhält noch

$$\left(\frac{ds_1}{dt}\right)_{\max}^2 = \frac{2}{\lambda^2} g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) (L_0 \mp \sqrt{L_0^2 - s_{10}^2}), \quad (1)$$

wobei das negative Zeichen für  $\eta_2 > 1$ , das positive Zeichen für  $\eta_2 < 1$  gilt. Ferner ist die Beschleunigung

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) \frac{\lambda s_{10}^2 + 2 L_0 s_1 + \lambda s_1^2}{2 (L_0 \mp \lambda s_1)^2} \quad (2)$$

bezüglich der Gleichgewichtslage unsymmetrisch (Figuren 4 und 5). Bei der Gleichgewichtslage hat sie den Wert

$$\left(\frac{d^2 s_1}{dt^2}\right)_{s_1=0} = g (\sin \alpha_1 - \eta_2 \sin \alpha_2) \frac{\lambda}{2} \left(\frac{s_{10}}{L_0}\right)^2. \quad (3)$$

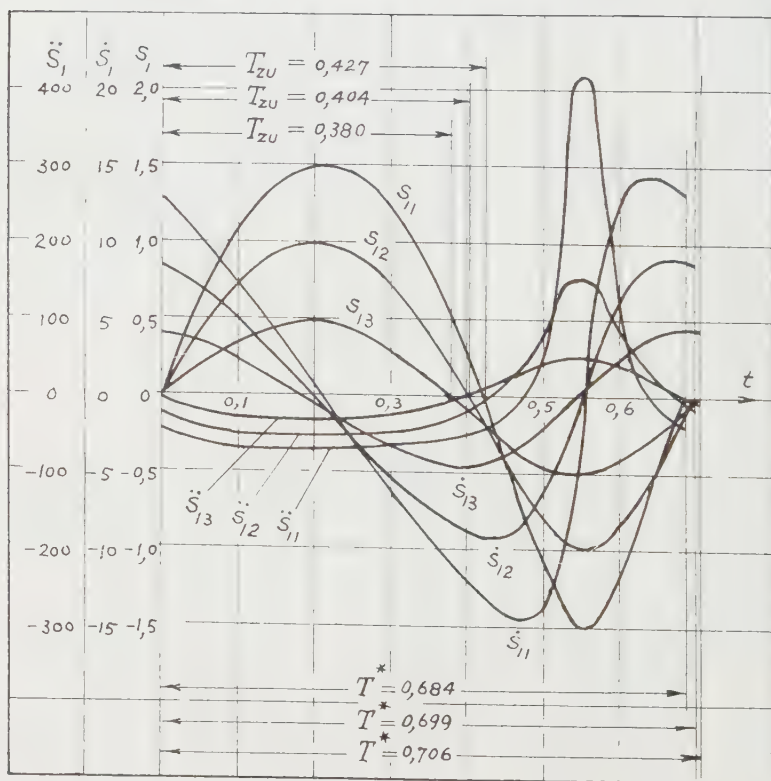


Fig. 4

Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Abhängigkeit von der Zeit für  $\eta_2 = 7$ .

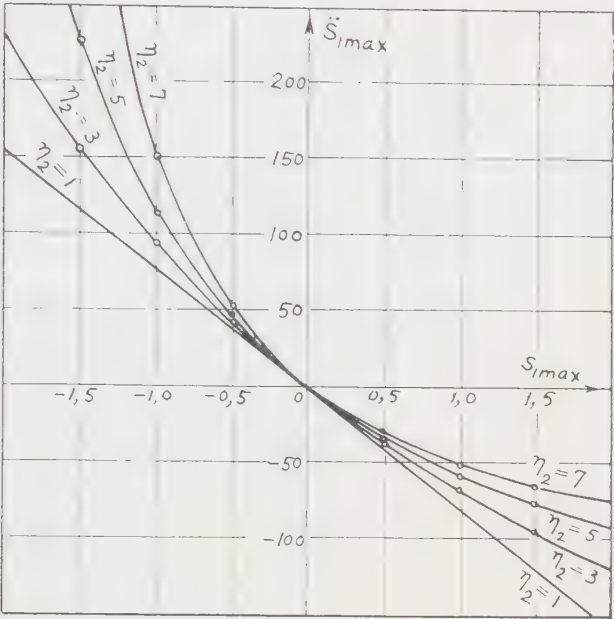


Fig. 5

Die maximale Beschleunigung in Abhängigkeit von den grössten Auslenkungen.

e maximale Beschleunigung hat den Ausdruck

$$\left(\frac{d^2s_1}{dt^2}\right)_{max} = - \frac{g(\sin\alpha_1 + \eta_2 \sin\alpha_2) s_{max}}{L_0 + (\eta_2^2 - 1) s_{max}}. \tag{17}$$

Nach Trennung der Veränderlichen und Ausführung der Integration nach Zeit in (12) ergibt sich

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{g(\sin\alpha_1 + \eta_2 \sin\alpha_2)}} \int_{s_{10}}^{s_1} \frac{L_0 + \lambda s_1}{s_{10}^2 + s_1^2} ds_1. \tag{18}$$

zt man  $s_1 = s_{10} \cos\varphi$  in Gleichung (18) ein, so erhält man

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\lambda s_{10}}{g(\sin\alpha_1 + \eta_2 \sin\alpha_2)}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\frac{L_0}{\lambda s_{10}} + \cos\varphi} d\varphi. \tag{19}$$

ch weiteren Umformungen lässt sich die Gleichung (19) in der Form schreiben

$$t - t_0 = 2 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(\sin\alpha_1 + \eta_2 \sin\alpha_2)}} \int_{\psi_2}^{\psi_1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} d\psi; \tag{20}$$

darin bedeuten

$$q = 2\psi, \quad 0 < k^2 = \frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}} < 1.$$

Die rechte Seite von (20) ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung. Ausschlag sei willkürlich als positiv festgelegt, wenn die reduzierte Länge wachsendem Ausschlag zunimmt, und umgekehrt. Die Schwingungszeit Null bis  $s_{10}$  und wieder nach Null zurück wird

$$T_{zu} = \frac{2}{\sqrt{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} \int_0^{s_{10}} \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_1}{s_{10}^2 - s_1^2}} ds_1,$$

mit  $s_1 = s_{10} \cos \varphi$ :

$$T_{zu} = 2 \sqrt{\frac{2\lambda s_{10}}{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{L_0}{\lambda s_{10}} + \cos \varphi} d\varphi$$

oder mit  $\varphi = 2\psi$ :

$$T_{zu} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

oder schliesslich mit der üblichen Darstellung für elliptische Integrale zweiter Gattung

$$T_{zu} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} E\left(\sqrt{\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}}}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Die Zeit für die Halbschwingung in der entgegengesetzten Richtung von  $s_{10}$  bis  $-s_{10}$  und wieder nach Null zurück ist

$$T_{ab} = \frac{2}{\sqrt{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} \int_{-s_{10}}^0 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_1}{s_{10}^2 - s_1^2}} ds_1,$$

mit  $s_1 = s_{10} \cos \varphi$ :

$$T_{ab} = 2 \sqrt{\frac{2\lambda s_{10}}{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\frac{L_0}{\lambda s_{10}} + \cos \varphi} d\varphi$$

oder mit  $\varphi = 2\psi$

$$T_{ab} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

oder schliesslich

$$T_{ab} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + \lambda s_{10}}{g(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}} \left[ E - E\left(\sqrt{\frac{2\lambda s_{10}}{L_0 + \lambda s_{10}}}, \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Zeit einer Vollschiwingung ist

$$T^* = T_{zu} + T_{ab} = 4 \sqrt{\frac{L_0 - \lambda s_{10}}{g (\sin \alpha_1 - \eta_2 \sin \alpha_2)}} E, \quad (23)$$

in  $E$  ein vollständiges, elliptisches Integral zweiter Gattung ist.  $T^*$  ist abhängig von  $E$ , um den Fall hervorzuheben, bei dem die reduzierte Länge  $L_0$  konstant bleibt. Durch Reihenentwicklung und gliedweiser Integration erhält man mit

$$M = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{L_0 - \lambda s_{10}}{g (\sin \alpha_1 - \eta_2 \sin \alpha_2)}} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} M^2 \left( \frac{2 \lambda s_{10}}{L_0 - \lambda s_{10}} \right)^n \right]. \quad (24)$$

lassen sich noch die folgenden Verhältnisse ableiten:

$$\frac{T^*}{T_{zu}} = \frac{E}{E(k, \pi/4)}, \quad \frac{T_{ab}}{T_{zu}} = \frac{E - E(k, \pi/4)}{E(k, \pi/4)}, \quad \frac{T^*}{T_{ab}} = \frac{E}{E(k, \pi/4)}. \quad (25)$$

Da nach der Eigenschaft der elliptischen Integrale stets

$$E\left(k, \frac{\pi}{4}\right) < E < 2 E\left(k, \frac{\pi}{4}\right)$$

, so kann man noch die nachstehende Tatsache folgern

$$T_{ab} < T_{zu} \quad (26)$$

gilt für  $\eta_2 = 1$ ). Für Schwingungen der Flüssigkeit in kommunizierenden Röhren, bei denen  $\eta_2 \neq 1$  ist, sind die zwei Schwingungszeiten  $T_{zu}$  und  $T_{ab}$  für beiden Schwingungsrichtungen verschieden (Figur 6), und zwar ist die Schwingungszeit in der Richtung, in der die reduzierte Länge mit Zunahme der Ablenkung wächst, grösser als die in der entgegengesetzten Richtung.

Unter Beibehaltung von  $L_0$  setzt man in (24)  $\eta_2 = 1$ , dann ergibt sich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)}}.$$

Das stimmt überein mit Gleichung (2), die von JOHANN BERNOULLI bereits abgeleitet worden ist. Wenn man weiter  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$  setzt, dann wird wie in Gleichung (1)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{2g}}.$$

Bei gleicher reduzierter Länge  $L_0$  erreicht  $T^*$  ein Minimum, wenn die beiden Enden des kommunizierenden Rohres lotrecht stehen. Für ein senkrechtes



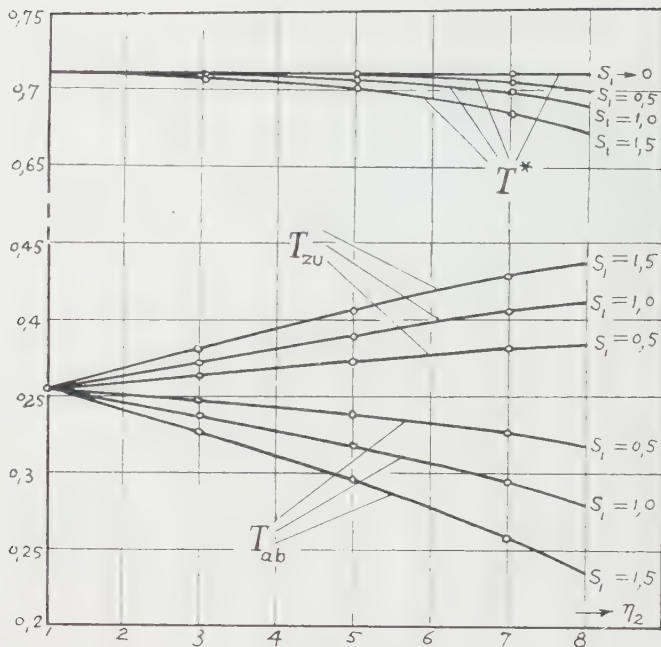


Fig. 6

$T^*$ ,  $T_{zu}$  und  $T_{ab}$  in Abhängigkeit von  $\eta_2$  mit der Anfangslenkung  $s_{10}$  als Parameter.

U-Rohr mit ungleichen Schenkelquerschnitten  $F_1 = \text{const}$  und  $F_2 = \text{const}$  die Schwingungsdauer als Funktion von  $F_1$ ,  $F_2$  und  $x_{10}$  (Figur 2)

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{L_0 + (\eta_2^2 - 1)x_{10}}{g(\eta_2 + 1)}} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{2n-1} \left( \frac{2(\eta_2^2 - 1)x_{10}}{L_0 + (\eta_2^2 - 1)x_{10}} \right)^n \right].$$

Entsprechend sind

$$T_{zu} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + (\eta_2^2 - 1)x_{10}}{g(\eta_2 + 1)}} E \left( \sqrt{\frac{2(\eta_2^2 - 1)x_{10}}{L_0 + (\eta_2^2 - 1)x_{10}}}, \frac{\pi}{4} \right),$$

$$T_{ab} = 4 \sqrt{\frac{L_0 + (\eta_2^2 - 1)x_{10}}{g(\eta_2 + 1)}} \left[ E - E \left( \sqrt{\frac{2(\eta_2^2 - 1)x_{10}}{L_0 + (\eta_2^2 - 1)x_{10}}}, \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Für sehr kleine Ausschläge kann man die folgende gute Annäherung erhalten

$$T^* \approx 2\pi \sqrt{\frac{F_2 L_0}{g(F_1 + F_2)}}$$

(gültig für sehr kleines  $x_{10}$ ). Setzt man

$$L_0 = \int_0^{s_{20}} \frac{F_1}{F} ds = \frac{F_1}{F} L,$$

erhält man

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{F_1 F_2 L}{F(F_1 + F_2)}}$$

es wiederum mit Gleichung (3), dem Resultat DANIEL BERNOULLIS, übereinstimmt.

### 5. Vergleich zwischen $T$ und $T^*$

Wir definieren  $T$  als die Schwingungsdauer einer Flüssigkeitssäule in einem kommunizierenden Rohr von konstantem Querschnitt. Die Länge dieser Flüssigkeitssäule sei  $L_0$ . Dieses System soll mit einem zweiten kommunizierenden Rohr verglichen werden, das jedoch ungleiche Schenkelquerschnitte aufweist. Die Länge der Wassersäule sei auch in diesem zweiten Fall – in der Gleichgewichtslage – gleich  $L_0$ . Die Neigungen der Schenkel seien für beide Fälle entsprechend gleich.  $T$  soll als ein Vergleichsmass für  $T^*$  dienen. Von den früheren Resultaten lässt sich bestätigen, dass

$$\left(\frac{T^*}{T}\right)_{s_{10} \rightarrow 0} = \lim_{s_{10} \rightarrow 0} \sqrt{\frac{L_0 - (\eta_2^2 - 1) s_{10}}{L_0}} \cdot \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2} \cdot \frac{2E}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2}}$$

Da  $\eta_2 > 1$  ist, gewinnt man offenbar die Beziehung

$$T^*_{s_{10} \rightarrow 0} < T. \quad (31)$$

Die Bedingung  $\partial T^* / \partial s_{10} = 0$  liefert  $s_{10} = 0$  als Lösung von

$$\frac{L_0}{\eta_2 s_{10}} \left[ 1 + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} M^2 \left( \frac{2 \eta_2 s_{10}}{L_0 - \eta_2 s_{10}} \right)^{n-1} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{2n-1} \left( \frac{2 \eta_2 s_{10}}{L_0 - \eta_2 s_{10}} \right)^n = 1.$$

Da  $s_{10} = 0$  kann man zeigen, dass

$$\left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial s_{10}^2} \right)_{s_{10}=0} = - \frac{\pi}{\sqrt{g} (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)} \cdot \frac{(\eta_2^2 - 1)^2}{4 L_0^{3/2}}.$$

Folglich dieser Untersuchung besitzt  $T^*$  bei  $s_{10} = 0$  ein Maximum, woraus man schliessen kann, dass stets gilt

$$T^* < T \quad (32)$$

(gilt für  $\eta_2 \neq 1$ ). Die  $(T^*, s_{10})$ -Kurve besitzt bei  $s_{10} = 0$  eine horizontale Tangente und fällt mit wachsendem  $s_{10}$  monoton gegen die  $s_{10}$ -Achse ab.

## 6. Eigenschaften von $T_{zu}$ und $T_{ab}$

Aus der Beziehung

$$\left( \frac{\partial T_{zu}}{\partial s_{10}} \right)_{s_{10}=0} = \frac{\eta_2^2 - 1}{\sqrt{g} (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) L_0}$$

ist ersichtlich, dass die  $(T_{zu}, s_{10})$ -Kurve bei  $s_{10} = 0$  nur horizontal verlaufen kann, wenn  $\eta_2 = 1$ , das heisst  $F_1 = F_2$  ist. Wenn  $\eta_2 > 1$  ist, steigt die Kurve mit wachsendem  $s_{10}$ , und wenn  $\eta_2 < 1$ , fällt sie monoton ab.

Die Eigenschaften von  $T_{ab}$  können aus der Differenz  $T^* - T_{zu}$  abgeleitet werden.

## 7. Vergleich zwischen $T/2$ und $T_{zu}$

Aus (21) erhielt man

$$(T_{zu})_{s_{10} \rightarrow 0} = \pi \sqrt{\frac{L_0}{g (\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2)}}$$

und

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{L_0}{g (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)}}$$

Man kann daraus schliessen, dass

$$(T_{zu})_{s_{10} \rightarrow 0} < \frac{T}{2}.$$

Bei zunehmendem  $s_{10}$  ist aber auch  $T_{zu} > T/2$  möglich.

## Summary

The oscillation of an ideal liquid in communication tubes of arbitrary shape leads to a non-linear differential equation of second order. The coefficient of the second derivative is a linear function of the displacement, and furthermore the differential equation is not linear, because a quadratic term in the first derivative appears.

The equation becomes linear if and only if the cross sections at the ends of the liquid column are constant but not equal, the periods of oscillation in the two directions are different and the difference increases monotonically with increasing amplitude of the displacement.

(Eingegangen: 27. November 1952.)

## Torsion of a Circular Shaft with Diameter Varying Periodically along its Length

By HAJIMU ŌKUBO, Sendai, Japan<sup>1)</sup>

In this paper, the torsion problem is treated for a shaft of circular section, diameter of which varies periodically along the length of the shaft. An approximate solution for the problem is derived on the assumption that the dimensions of a groove are small as compared with those of the shaft. In the assumption used here, however, the dimensions of a groove are meant to be comparatively small, and not meant to be infinitely small as is assumed in the work of NEUBER<sup>2)</sup>.

We may take the axis of the shaft as the  $z$ -axis, and use the polar coordinates  $(r, \theta)$  for defining the position of a point in the plane of a cross section. Then, the stresses, which do not vanish, are expressed by the equation<sup>3)</sup>

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{G}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (1)$$

where  $G$  is the modulus of rigidity, and the function  $\psi$  satisfies the differential equation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

On the outer surface of the shaft is free from traction, the function must satisfy the condition

$$\psi = \text{const} \quad (3)$$

on the boundary.

As the stresses for the present problem vary periodically with  $z$ , we take the function  $\psi$  the expression

$$\psi = \frac{\theta}{4} r^4 + r^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_2 \left( \frac{n \pi r}{a} \right) \cos \frac{n \pi z}{a}, \quad (4)$$

where  $\theta$  is a constant,  $I_2$  is a Bessel function, and  $2a$  is the period of the grooves along the length of the shaft. Let  $r$  denote the displacement normal to the axial

<sup>1)</sup> Tōhoku University.

<sup>2)</sup> H. NEUBER, *Kerbspannungslehre* (Springer, Berlin, 1937), p. 140.

<sup>3)</sup> S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill, New York, 1934), p. 276.

plane. Then we have

$$r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Substituting the foregoing expression for  $\psi$  into (5), we obtain

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \right) = \theta + \frac{\pi}{a r} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n I_1 \left( \frac{n \pi r}{a} \right) \cos \frac{n \pi z}{a}.$$

Integrating both sides of the equation with respect to  $z$  over a period of grooves it follows that

$$\left[ \frac{v}{r} \right]_{z=-a}^{z=a} - \left[ \frac{v}{r} \right]_{z=-a}^{z=a} = 2 a \theta.$$

The left hand side of equation (6) denotes the difference in the rotations between two cross sections  $z = \pm a$ . Consequently  $\theta$  is the mean twist in a period of grooves.

Let us now assume that the dimensions of the axial section of a groove are small in comparison with those of the shaft. At the points where  $r$  is 1 compared with  $a$ , the function  $\psi$  is given by the expression

$$\psi = \frac{\theta}{4} r^4 + \frac{a^{1/2} r^{3/2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \eta_n}{(2n)^{1/2}} e^{n\pi r/a} \cos \frac{n \pi z}{a},$$

by virtue of the approximate relation

$$I_2 \left( \frac{n \pi r}{a} \right) = \frac{a^{1/2} \eta_n e^{n\pi r/a}}{\pi (2n)^{1/2}}, \quad \text{where} \quad \eta_n = 1 - \frac{15 a}{8 n \pi r} - \dots$$

Let us consider another function  $\psi^*$ , given by the equation

$$\psi^* = \frac{\theta}{4} r^4 + r^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{R}[\varphi_n],$$

where  $\mathbf{R}$  denotes the real part of a complex variable,  $C_n$  is a real constant,

$$\varphi_1 = \log(1 + e^{\pi(\zeta-1)/a}), \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{a} \int \varphi_1 d\zeta, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{a} \int \varphi_2 d\zeta, \dots \quad (\zeta = r + iz)$$

If  $r \geq 1$ ,  $\varphi_1$  may be expanded in the series

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{a} (\zeta - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-n\pi(\zeta-1)/a},$$

except at the points  $r = 1$ ,  $z = (2n+1)a$ , in which  $n$  is an integer. We then

$\varphi_n$  the expression

$$\varphi_2 = \frac{\pi^2}{2! a^2} (\zeta - 1)^2 + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{-n\pi(\zeta-1)/a},$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi^3}{3! a^3} (\zeta - 1)^3 + \frac{\pi^3}{6 a} (\zeta - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-n\pi(\zeta-1)/a},$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi^4}{4! a^4} (\zeta - 1)^4 + \frac{\pi^4}{2! 6 a^2} (\zeta - 1)^2 + \frac{7 \pi^4}{360} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} e^{-n\pi(\zeta-1)/a},$$

To simplify the discussion, let us consider a portion of the shaft bounded two sections  $z = \pm a$ , and denote the value of  $z$  in this portion by  $z_0$ . Then, the foregoing expansions for  $\varphi_n$  hold for all values of  $z = z_0 + 2na$ , consequently  $\mathbf{R}[\varphi_n]$  is a many-valued function of  $z$ . In the calculations for  $\mathbf{R}[\varphi_n]$ , however, we must take  $z_0$  for  $z$ , since the shearing stress  $\tau_{r\theta}$  on the section  $z_0 = 0$  must vanish from the symmetrical condition of the shaft with respect to  $z_0$ .

If the equation

$$r = 1 + h(a - z), \quad (a \geq z \geq 0) \quad (9)$$

represents the outer surface of the shaft, Figure 1, and the function  $\psi^*$  satisfies the boundary condition (3), except at the point  $r = 1, z = a$ , it follows that

$$\{1 + h(a - z)\}^4 + \{1 + h(a - z)\}^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{R}[\varphi_n] = C_0, \quad (a > z \geq 0) \quad (10)$$

ere

$$\varphi_1] = \frac{\pi h}{a} (a - z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{e^{-n\pi h(1-z/a)}}{\cos \frac{n\pi z}{a}},$$

$$\varphi_2] = -\frac{\pi^2}{2! a^2} \{h^2 (a - z)^2 - z^2\} + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{e^{-n\pi h(1-z/a)}}{\cos \frac{n\pi z}{a}},$$

$$\varphi_3] = \frac{\pi^3}{3! a^3} \{h^3 (a - z)^3 - 3h(a - z)z^2\} - \frac{\pi^3 h}{6 a} (a - z)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \frac{e^{-n\pi h(1-z/a)}}{\cos \frac{n\pi z}{a}},$$



As  $a$  is a small quantity in comparison with unity, omitting the smaller quantities of the order  $a^3$ , we have

$$\begin{aligned}\{1+h(a-z)\}^{5/2} &= (1+ah)^{5/2} - \frac{5}{2} h (1+ah)^{3/2} z + \frac{15}{8} h^2 (1+ah)^{1/2} z^2 \\ \{1+h(a-z)\}^{-3/2} &= (1+ah)^{-3/2} + \frac{3}{2} h (1+ah)^{-5/2} z + \frac{15}{8} h^2 (1+ah)^{-7/2} z^2\end{aligned}$$

Using the foregoing approximations, we rewrite the equation (10) in the form

$$Q_0 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} P_n e^{-n\pi h(1-z/a)} \cos \frac{n\pi z}{a} = 0, \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned}Q_0 &= \frac{\theta}{4} (1-ah)^{5/2} - (1-ah)^{-3/2} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^n}{n!} C_n + \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^{n-1}}{(n-1)!} C_{n+1} \\ &\quad + \frac{7\pi^4}{360} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^{n-1}}{(n-1)!} C_{n+3} + \cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_1 &= -\frac{5}{8} \theta h (1+ah)^{3/2} - \frac{3}{2} h (1+ah)^{-5/2} C_0 + \frac{\pi \varepsilon_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^{n-1}}{(n-1)!} C_n \\ &\quad + \frac{\pi^3 \varepsilon_1}{6a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^{n-1}}{(n-1)!} C_{n+2} + \cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_2 &= \frac{15}{32} \theta h^2 (1+ah)^{1/2} - \frac{15}{8} h^2 (1+ah)^{-7/2} C_0 + \frac{\pi^2 \varepsilon_2}{2! a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^{n-1}}{(n-1)!} C_{n+1} \\ &\quad + \frac{\pi^4 \varepsilon_2}{2! 6 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^{n-1}}{(n-1)!} C_{n+3} + \cdots,\end{aligned}$$

$$Q_3 = \frac{\pi^3 \varepsilon_3}{3! a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi h)^{n-1}}{(n-1)!} C_{n+2} + \cdots,$$

.....

$$P_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{n} \right)^{m-1} C_m, \quad \varepsilon_n = \mathbf{R}[(i-h)^n].$$

We expand the left hand members of equation (11) in FOURIER's series,

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi z}{a}, \quad z^2 = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m \cos \frac{m\pi z}{a}, \quad \dots,$$

$$e^{-n\pi h(1-z/a)} \cos \frac{n\pi z}{a} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \cos \frac{m\pi z}{a}, \quad (12)$$

here

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a}{2}, \quad a'_0 = \frac{a^2}{3}, \quad \dots \\ a_m &= \frac{2a}{m^2 \pi^2} \{(-1)^m - 1\}, \quad a'_m = \frac{4a^2 (-1)^m}{m^2 \pi^2}, \quad \dots, \quad (m \geq 1) \\ b_{n0} &= \frac{h \{(-1)^n - e^{-n\pi h}\}}{n \pi (1 + h^2)} \\ b_{nm} &= \frac{n h}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^{n-m} - e^{-n\pi h}}{n^2 h^2 + (n-m)^2} + \frac{(-1)^{n+m} - e^{-n\pi h}}{n^2 h^2 + (n+m)^2} \right\}. \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

Substituting the series (12) into (11), it follows that

$$Q_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_m Q_1 + a'_m Q_2 + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nm} P_n \right) \cos \frac{m \pi z}{a} = 0, \quad (13)$$

from which we have a system of linear equations for the determination of the unknown coefficients  $C_n$  in the form

$$\left. \begin{aligned} Q_0 + a_0 Q_1 + a'_0 Q_2 + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n0} P_n &= 0, \\ a_1 Q_1 + a'_1 Q_2 + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n1} P_n &= 0, \\ a_2 Q_1 + a'_2 Q_2 + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n2} P_n &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

taking the finite terms in each series in (14), and solving the simultaneous equations, we can find approximate values of  $C_n$ . Thus, we can readily find the corresponding stresses for  $r \geq 1$ , from (8), as

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z} &= G \theta r + G \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{R} \left[ \frac{3}{2} r^{-3/2} \varphi_n + r^{-1/2} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} \right], \\ \tau_{rz} &= G r^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{R} \left[ i \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Let  $\tau_s$  be the shearing stress along the outer curve of the axial section of the shaft. Remembering that the shearing stress normal to the bounding curve vanishes, we have

$$\tau_s = - \frac{(1 + h^2)^{1/2}}{h} [\tau_{r\theta}]_s = \frac{G (1 + h^2)^{1/2}}{h \{1 + h(a-z)\}^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{R} \left[ i \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} \right], \quad (16)$$

where the subscript  $s$  denotes the value at the boundary.

If  $r \leq 1$ , the functions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  are expanded in the series of different forms, except at the points  $r = 1, z = (2n+1)a$ , as

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi(1-\zeta)/a},$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{-n\pi(1-\zeta)/a},$$

$$\varphi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-n\pi(1-\zeta)/a},$$

.....

Hence

$$\psi^* = \frac{\theta}{4} r^4 + r^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A'_n e^{n\pi r/a} \cos \frac{n\pi z}{a}, \quad (1)$$

where

$$A'_n = e^{-n\pi/a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{n^m}.$$

Comparing the equations (7) and (17), we find

$$A_n = \frac{\pi (2n)^{1/2} (-1)^{n+1} e^{-n\pi/a}}{a^{1/2} \eta_n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{n^m}, \quad (1)$$

where  $\eta_n$  is given approximately by

$$\eta_n = 1 - \frac{15a}{8n\pi}.$$

Having obtained the unknown coefficients  $A_n$ , substituting them into (4) we can find the stresses for  $r \leq 1$  as

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z} &= G \theta r + G \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* I_1 \left( \frac{n\pi r}{a} \right) \cos \frac{n\pi z}{a}, \\ \tau_{r\theta} &= G \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* I_2 \left( \frac{n\pi r}{a} \right) \sin \frac{n\pi z}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where

$$A_n^* = \frac{\pi^2 (-1)^{n+1} (2n)^{1/2} e^{-n\pi/a}}{a^{3/2} \eta_n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{n^{m-1}}. \quad (2)$$

If we denote the couples acting at the ends of the shaft by  $T$ , we have

$$T = 2\pi G \int_0^s \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 2\pi G [\psi]_s, \quad (21)$$

since  $\psi$  vanishes at  $r = 0$ .

The complicated nature of the foregoing analysis is due to the abrupt change of the diameter along the length. If the diameter of the shaft varies gradually, using the expression (7), the coefficients  $A_n$  may be determined directly so as to satisfy the boundary condition (3) by a usual approach, and consequently the analysis can be far more simplified. But if the change in diameter is abrupt, the solution, referred to the coordinates  $(r, z)$ , often has singular points within the domain bounded by the cylindrical surface circumscribing the shaft and the outer surface of the shaft. On the other hand, the series (7) must be convergent at every point within the shaft, viz. even for the largest value of  $r$ . Accordingly, by means of a usual procedure, mathematical difficulties are encountered for the determination of  $A_n$ , satisfying these counter requirements simultaneously.

To avoid these difficulties, the use of curvilinear coordinates is sometimes desirable, and the inverse method, viz. assuming first a suitable solution and subsequently determining the corresponding shape of a shaft, is often even more useful. The latter method, as is well known, considerably simplifies the analysis. These two methods, however, are not suitable for the cases treated in this paper, where the contour of the axial section of a shaft can not be represented by a single curve.

As an illustration of the numerical evaluation, let us consider a shaft with grooves, the pitch and depth of which are the same as those of a Whitworth screw, e. g., we take

$$a = 0.137, \quad h = 1.27.$$

Assuming that  $C_5 = C_6 = \dots = 0$ , we shall find the constants  $C_0, C_1, C_2, C_3$ , and  $C_4$  from the first five equations in (14). We thus obtain for unit  $\theta$

$$\begin{aligned} C_0 &= 0.2952, & C_1 &= -0.00671, & C_2 &= -0.01693, \\ C_3 &= 0.00301, & C_4 &= -0.00015. \end{aligned}$$

Substituting the numerical values for  $C_n$  into (20), we have for unit  $\theta$

$$\begin{aligned} A_1^* &= -6.848 \times 10^{-10}, & A_2^* &= 7.087 \times 10^{-20}, & A_3^* &= -7.833 \times 10^{-30}, \\ A_4^* &= 8.823 \times 10^{-40}, & A_5^* &= -10.03 \times 10^{-50}. \end{aligned}$$

From equations (15) and (19), we have the shearing stress on the section  $z = C$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z} &= G \theta r + G \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* I_1 \left( \frac{n \pi r}{a} \right), & (r \leq 1) \\ &= G \left\{ \theta r + \frac{3}{2} r^{-3/2} \mathbf{R} [C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + C_4 \varphi_4] \right. \\ &\quad \left. + r^{-1/2} \mathbf{R} \left[ C_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} + C_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} + C_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} + C_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \zeta} \right] \right\}, & (r \geq 1) \\ \tau_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} \right] &= \frac{\pi}{a (1 + e^{-\pi r'/a})}, \\ \mathbf{R} [\varphi_1] &= \frac{a}{\pi} \mathbf{R} \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} \right] = \log (1 + e^{\pi r'/a}), \\ \mathbf{R} [\varphi_2] &= \frac{a}{\pi} \mathbf{R} \left[ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} \right] = \frac{\pi^2 r'^2}{2 a^2} + \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{-n \pi r'/a}, \\ \mathbf{R} [\varphi_3] &= \frac{a}{\pi} \mathbf{R} \left[ \frac{\partial \varphi_4}{\partial \zeta} \right] = \frac{\pi^3 r'^3}{6 a^3} + \frac{\pi^3 r'}{6 a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-n \pi r'/a}, \\ \mathbf{R} [\varphi_4] &= \frac{\pi^4 r'^4}{24 a^4} + \frac{\pi^4 r'^2}{12 a^2} + \frac{7 \pi^4}{360} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} e^{-n \pi r'/a}. \quad (r' = r - 1) \end{aligned}$$

The shearing stress on the section  $z = a$  is found from equation (19), as

$$\tau_{\theta z} = G \theta r + G \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* (-1)^n I_1 \left( \frac{n \pi r}{a} \right), \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (22)$$

The distributions of the shearing stress  $\tau_{\theta z}$  on the sections,  $z = 0$  and  $a$ , calculated from equations (22) and (23), are shown in Figure 2. It may be seen

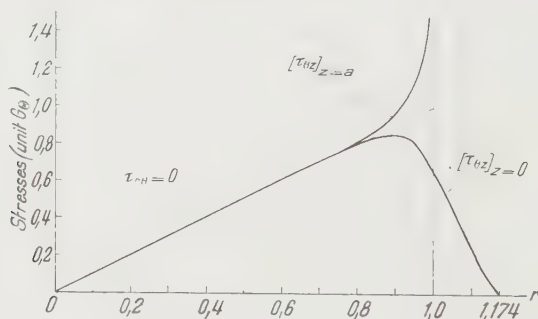


Fig. 2

Stresses on the sections,  $z = 0$  and  $a$ , when  $a = 0.137$ ,  $h = 1.27$ .

in the figure that in the expression for stresses [19], all terms become very small quantities as compared with the first term of  $\tau_{\theta z}$ , when  $r < 0.8$ . Consequently, the solution for a solid shaft obtained here can be immediately applied to a hollow shaft, except for the case of a very thin tube whose minimum thickness is smaller than the depth of notches. The shearing stress along the boundary curve of the shaft can be calculated from equation (16). In our evaluations, however, the boundary condition (10) is not accurately satisfied, since only a few terms are taken in the series for  $\psi^*$ . To estimate the error for the evaluations described, we shall obtain the shearing stresses, normal and tangential to the boundary curve of the shaft, from the equations

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{(1+h^2)^{1/2}} \{h[\tau_{\theta z}]_s + [\tau_{r\theta}]_s\}, \quad \tau_s = \frac{1}{(1+h^2)^{1/2}} \{[\tau_{\theta z}]_s - h[\tau_{r\theta}]_s\}, \quad (24)$$

respectively, in which

$$[\tau_{\theta z}]_s = G \left\{ \theta (1 + h a z') + \frac{3}{2} (1 + h a z')^{-3/2} \mathbf{R} [C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + C_4 \varphi_4]_s \right. \\ \left. + (1 + h a z')^{-1/2} \mathbf{R} \left[ C_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} + C_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} + C_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} + C_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \zeta} \right]_s \right\},$$

$$[\tau_{r\theta}]_s = -G (1 + h a z')^{-1/2} \mathbf{R} \left[ i C_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} + i C_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} + i C_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} + i C_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \zeta} \right]_s,$$

$$\left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} \right]_s = \frac{\frac{\pi}{a} (1 - e^{-\pi h z'} \cos \frac{\pi z}{a})}{1 - e^{-2\pi h z'} - 2 e^{-\pi h z'} \cos \frac{\pi z}{a}},$$

$$[\varphi_1]_s = \frac{a}{\pi} \mathbf{R} \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} \right]_s = \pi h z' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} e^{-n\pi h z'}}{n} \cos \frac{n\pi z}{a},$$

$$[\varphi_2]_s = \frac{a}{\pi} \mathbf{R} \left[ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} \right]_s = \frac{\pi^2}{2} \left( h^2 z'^2 - \frac{z^2}{a^2} \right) + \frac{\pi^2}{6} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\pi h z'}}{n^2} \cos \frac{n\pi z}{a},$$

$$[\varphi_3]_s = \frac{a}{\pi} \mathbf{R} \left[ \frac{\partial \varphi_4}{\partial \zeta} \right]_s = \frac{\pi^4}{6} \left( h^3 z'^3 - \frac{3 h z' z^2}{a^2} \right) + \frac{\pi^4 h z'}{6} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\pi h z'}}{n^3} \cos \frac{n\pi z}{a},$$

$$[\varphi_4]_s = \frac{\pi^4}{24} \left( h^4 z'^4 - \frac{6 h^2 z'^2 z^2}{a^2} + \frac{z^4}{a^4} \right) + \frac{\pi^4}{12} \left( h^2 z'^2 - \frac{z^2}{a^2} \right) + \frac{7\pi^4}{360} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\pi h z'}}{n^4} \cos \frac{n\pi z}{a},$$



$$\begin{aligned}
 R\left[i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}\right]_s &= -\frac{\frac{\pi}{a} e^{-\pi h z'} \sin \frac{\pi z}{a}}{1 + e^{-2\pi h z'} + 2 e^{-\pi h z'} \cos \frac{\pi z}{a}}, \\
 R\left[i \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta}\right]_s &= -\frac{\pi^2 z}{a^2} + \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\pi h z'}}{n} \sin \frac{n\pi z}{a}, \\
 R\left[i \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta}\right]_s &= -\frac{\pi^3 h z z'}{a^2} - \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\pi h z'}}{n^2} \sin \frac{n\pi z}{a}, \\
 R\left[i \frac{\partial \varphi_4}{\partial \zeta}\right]_s &= -\frac{\pi^4 z}{6 a^4} (3 a^2 h^2 z'^2 - z^2) - \frac{\pi^4 z}{6 a^2} \\
 &\quad + \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-n\pi h z'}}{n^3} \sin \frac{n\pi z}{a}. \quad (z' = 1 - z)
 \end{aligned}$$

The shearing stresses at the boundary, calculated from equation (24), are shown in Figure 3, in which  $s$  is the distance from the apex along the bounding curve. As is shown in the figure,  $\tau_n$  does not entirely vanish along the curve but it becomes a negligibly small quantity as compared with  $\tau_s$ . Hence, the approximate solution obtained here is sufficiently accurate for practical use.

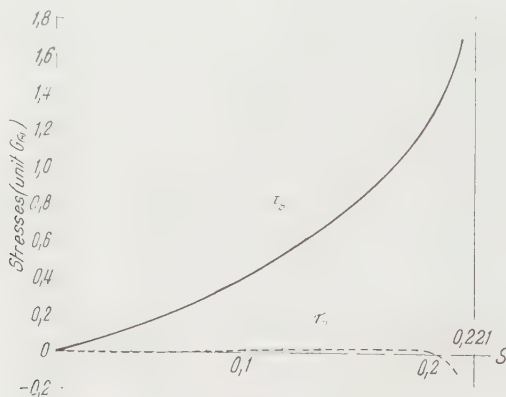


Fig. 3

Stresses on the bounding curve, when  $a = 0.137$ ,  $h = 1.27$ .

From (21), the couples acting on the ends of the shaft are

$$T = 2 \pi G C_0 = 1.855 G \theta.$$

This shows that the stiffness of a threaded shaft is slightly larger than that of a shaft without grooves, the diameter of which is the same as the minimum diameter of the threaded shaft.

*Acknowledgment*

A grant for science research was given for this study by the Education Ministry Japan.

*Zusammenfassung*

Diese Arbeit enthält eine Methode zur approximativen Ermittlung der Spannungen in einer auf Torsion beanspruchten Welle mit einem Kreisquerschnitt, dessen Durchmesser periodische, gegenüber den Dimensionen der Welle kleine Schwankungen aufweist. Ausführlich behandelt ist der Fall, wo der Durchmesser periodisch linear zu- und abnimmt. Für eine Welle, die als Modell einer Whitworth-Schraube aufgefasst werden kann, sind die Spannungen numerisch ausgewertet.

Received: December 3, 1952.)

## Zur Berechnung der Druckpunktverteilung über die Spannweite für Flügel mit kleinem Seitenverhältnis

Von ERNST SCHULTZE, Altenrhein<sup>1)</sup>

Bei der Berechnung der Luftkräfte an Flügeln mit kleinem Seitenverhältnis geben sich Schwierigkeiten, die bei Flügeln mit grossem Seitenverhältnis nicht auftreten. Flügel mit grossem Seitenverhältnis lassen sich mit sehr guter Näherung durch eine tragende Wirbellinie ersetzen, deren Stärke von der Mitte des Flügels nach aussen stetig abnimmt. Zur Bestimmung der Wirbelstärke dieses gebundenen Wirbels, welche ja proportional zum Auftrieb ist, hat man die Bedingung, dass die von den abgehenden freien Wirbeln erzeugte Abwärtsgeschwindigkeit gerade längs des gebundenen Wirbels mit der Abwärtsgeschwindigkeit am Flügel selbst übereinstimmt. Dies führt auf die bekannte Prandtl'sche Integrodifferentialgleichung für die Auftriebsverteilung längs der Flügelspannweite. Es ist aber einleuchtend, dass dabei die Bedingung der tangentiaalen Strömung über die ganze Tragfläche um so weniger erfüllt sein kann, je kleiner das Seitenverhältnis wird (Figur 1), so dass die Auftriebsverteilung und der Gesamtauftrieb bei kleinem Seitenverhältnis nicht mehr richtig herauskommen. Über die Momentenverteilung längs der Spannweite sagt die Prandtl'sche Theorie nichts aus. Man muss vielmehr annehmen, dass sich der Druckpunkt in jedem Schnitt des Flügels wie in ebener Strömung in  $1/4$  der Flügeltiefe befindet. Bei grossem Seitenverhältnis wird diese Annahme eine gute Näherung geben, bei kleinem Seitenverhältnis wird aber der Druckpunkt nicht mehr in  $1/4$  der Flügeltiefe sein, sondern er wird sich noch längs der Spannweite ändern.

<sup>1)</sup> Flug- und Fahrzeugwerke AG.

Im Laufe der Zeit sind einige Rechenmethoden zur genaueren Berechnung von Auftriebsverteilung und Druckpunktverteilung aufgestellt worden. Die bekannteste Methode ist diejenige von V. M. FALKNER<sup>1)</sup>. Er ersetzt den Flügel durch ein Gitter von Wirbellinien, das 84 bzw. 126 Gitterfenster enthält. Dadurch bekommt dann die Auftriebsverteilung über die Spannweite einen treppenförmigen Verlauf. Obwohl diese Methode einen gewissen Fortschritt gegenüber PRANDTL brachte – sie lässt sich auf beliebig kleine Seitenverhältnisse an-

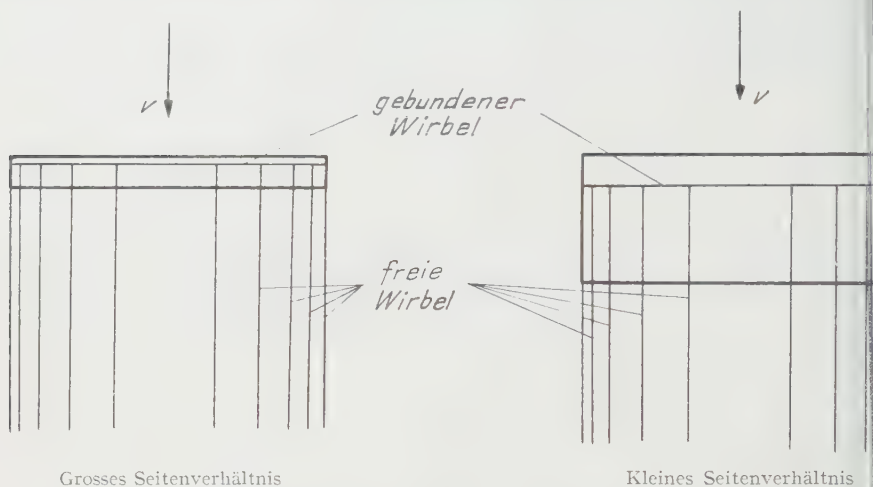


Fig. 1

Zur Erklärung des mit abnehmendem Seitenverhältnis wachsenden Einflusses der durch die freien Wirbel induzierten Krümmung der Stromlinien.

beliebig grosse Pfeilung anwenden –, so bedeutet der Übergang von der stetigen Auftriebsverteilung der Prandtlschen Theorie zu einer unstetigen Auftriebsverteilung einen Rückschritt. Deshalb sind andere Methoden entwickelt worden, die als direkte Verallgemeinerungen der Prandtlschen Traglinientheorie bezeichnet werden können.

Einen ersten Schritt in dieser Richtung macht die Theorie von WEISSINGER. Er legt die tragende Linie in  $1/4$  der Flügeltiefe und erfüllt die Bedingung der tangentialen Strömung in  $3/4$  der Flügeltiefe. Die dadurch entstehende Integrationsdifferentialgleichung für die Zirkulationsverteilung ist nur wenig komplizierter als die Prandtlsche und kann ebenfalls nach MÜLTHOPP gelöst werden. Die sich daraus ergebenden Auftriebsverteilungen stimmen auch bei kleinen Seitenverhältnissen und grosser Pfeilung in den meisten Fällen sehr gut mit dem Experiment überein (nach NACA Report Nr. 921, 1948). Auch die Differenz

<sup>1)</sup> V. M. FALKNER, British Reports and Memoranda, Nr. 2591.

<sup>2)</sup> J. WEISSINGER, Nat. Advis. Comm. Aeron. TM. 1120 (1947).

genüber der nach FALKNER berechneten Auftriebsverteilung ist gering, so dass es sich nicht lohnt, zur Berechnung der Auftriebsverteilung die mühsamere Falknersche Methode zu benützen. Hingegen sagt auch die Weissingersche Theorie über die Druckpunktlage nicht mehr aus, als dass der Druckpunkt eben dort liegt, wo sich der tragende Wirbel befindet, nämlich in  $1/4$  der Flügeltiefe. Um eine Momentenverteilung zu bekommen, ist es deshalb nötig, mehr als einen tragenden Wirbel anzunehmen. So hat N. SCHOLZ<sup>1)</sup> vier solche Wirbel angenommen. Er teilt den Flügel der Länge nach in vier gleich breite Streifen ein. Die Wirbellinien befinden sich in  $1/4$  der Tiefe jedes Streifens und die Wirbellinien, längs denen die Abwindbedingung erfüllt wird, in  $3/4$  der Tiefe jedes Streifens. SCHOLZ berechnet damit die Auftriebs- und Druckpunktverteilungen von rechteckigen Tragflügeln mit den Seitenverhältnissen 10, 6, 3 und 1. Es ist natürlich klar, dass man um so genauere Resultate bekommt, je mehr Wirbellinien man annimmt. Andererseits wird man im Interesse des kleinsten Arbeitsaufwandes ein Minimum an Wirbellinien anstreben.

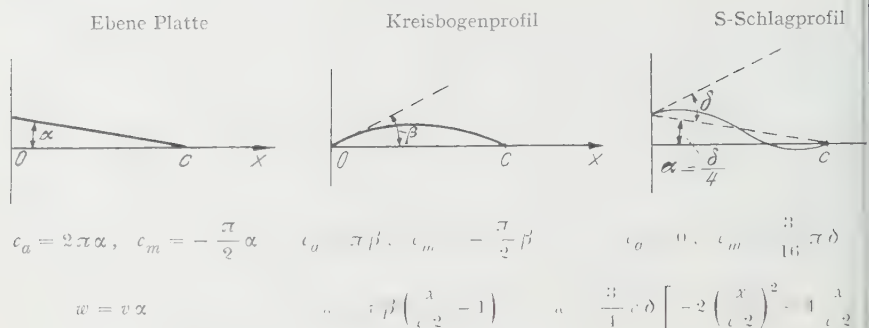
Im folgenden wird nahegelegt, wie man mit zwei Wirbellinien und zwei Linien der tangentialen Strömung, die sich je in geeigneter Flügeltiefe befinden, ebenso gute Ergebnisse erhalten kann wie mit der obigen Anordnung für vier Wirbellinien.

Der Grund, warum die Weissingersche Theorie so gute Auftriebsverteilungen liefert, kann an Hand der ebenen Strömung um dünne Profile erklärt werden. Es liegt die Vorstellung zugrunde, dass bei einer dünnen ebenen Platte mit endlichem Seitenverhältnis die abgehenden Wirbel eine Krümmung der Strömung erzeugen, so dass sich kein Flügelschnitt mehr in ebener Strömung befindet, dass dies aber auf dasselbe herauskommt, wie wenn jeder Flügelschnitt, nachdem er entsprechend verwölbt worden ist, sich als in ebener Strömung befindlich betrachtet werden kann. Da man die ebene Strömung um gewölbte Profile gut beherrscht, bleibt also nur noch das Problem der Bestimmung dieser fiktiven Verwölbung, die durch die abgehenden Wirbel induziert wird. Wir gehen von der Birnbaumschen Theorie der ebenen Strömung aus, in welcher drei Normalfälle betrachtet werden (Figur 2). Diese entsprechen den ersten drei Gliedern der Entwicklung der Wirbelbelegung in eine Fourier-Reihe. Die übrigen Glieder dieser Reihe ergeben keinen Beitrag zum Auftrieb und zum Moment. Ersetzt man die stetige Wirbelbelegung eines Profils in ebener Strömung durch einen einzigen Wirbel von der Stärke  $\Gamma$ , so muss, damit er den richtigen Auftrieb liefert, die Bedingung

$$\Gamma = \frac{v \cdot c}{2} c_a \quad (1)$$

erfüllt sein. Der Abstand dieses Einzelwirbels von der Vorderkante sei  $x_1$ , und der Abstand der Stelle, wo die tangentiale Strömungsbedingung erfüllt werden

<sup>1)</sup> N. SCHOLZ, Ing.-Arch. 18, 2 (1950).



Die Momente sind auf die Vorderkante ( $x=0$ ) bezogen und positiv, wenn sie schwanzwärts wirken. Der Abwind  $w$  ist nach unten positiv.  $v$  = Fluggeschwindigkeit,  $c$  = Flügeltiefe.

Fig. 2

Die drei Birnbaum'schen Normalfälle eines dünnen Profils in ebener Strömung.

soll, von der Vorderkante sei  $x_0$ . Die beiden Unbekannten  $x_1$  und  $x_0$  sind so zu bestimmen, dass sowohl die ebene Platte für sich als auch das Kreisbogenprofil für sich in Hinsicht auf den Auftrieb durch den Einzelwirbel ersetzt werden können.

Ebene Platte:

Auftriebsbedingung:

$$\Gamma = \pi v c \alpha,$$

Abwindbedingung:

$$\frac{\Gamma}{x_0 - x_1} = 2\pi w(x_0) = 2\pi v \alpha;$$

daraus durch Division

$$x_0 - x_1 = \frac{c}{2}.$$

Kreisbogenprofil:

Auftriebsbedingung:

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} v c \beta,$$

Abwindbedingung:

$$\frac{\Gamma}{x_0 - x_1} = 2\pi w(x_0) = 2\pi v \beta \left( \frac{x_0}{c/2} - 1 \right);$$

daraus durch Division

$$(x_0 - x_1) \left( \frac{x_0}{c/2} - 1 \right) = \frac{c}{4}.$$

Die Auflösung der beiden Gleichungen (2) und (3) ergibt

$$x_0 = \frac{3}{4}c, \quad x_1 = \frac{1}{4}c.$$

aus folgt

**Satz 1.** Ein dünnes Profil, das aus einem Kreisbogen beliebiger Wölbung beliebigem Anstellwinkel besteht, kann hinsichtlich des Auftriebes durch einen in  $1/4$  der Flügeltiefe liegenden Einzelwirbel ersetzt werden, wenn die potentielle Strömungsbedingung in  $3/4$  der Flügeltiefe erfüllt wird.

Der grosse Erfolg der Weissingerschen Theorie der Auftriebsberechnung ist also in der Berücksichtigung der durch die abgehenden Wirbel induzierten Krümmung der Stromlinien, währenddem die Prandtlsche Theorie nur den durch die abgehenden Wirbel induzierten Anstellwinkel berücksichtigt. Hinzu versagt die Weissingersche Theorie bei der Berechnung des Momentes, da der Druckpunkt einer einzelnen Wirbellinie immer an der Wirbellinie selbst liegt, in diesem Fall in  $1/4$  der Flügeltiefe. Für das Moment wird also nicht die induzierte Krümmung der Stromlinien, sondern nur der induzierte Anstellwinkel berücksichtigt.

Der Weg zur Berechnung der Momentenverteilung ist nun aber vorgezeichnet: Wir müssen zwei Wirbellinien nehmen. Ihre Wirbelstärken seien mit  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  bezeichnet und ihre Abstände von der Vorderkante mit  $x_1$  und  $x_2$ . Die Auftriebsbedingung liefert

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \int_0^c \gamma(x) dx = \frac{v c^2}{2} c_a \quad (5)$$

und die Momentenbedingung, welche nun auch erfüllt werden soll,

$$x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2 = \int_0^c \gamma(x) x dx = - \frac{v c^2}{2} c_m \quad (6)$$

Die Abwindbedingung soll wiederum im Abstand  $x_0$  hinter der Vorderkante erfüllt werden:

$$\frac{\Gamma_1}{x_0 - x_1} + \frac{\Gamma_2}{x_0 - x_2} = 2 \pi w(x_0) \quad (7)$$

Im Falle der ebenen Platte liefern diese drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 + \Gamma_2 &= \pi v c \alpha, \\ x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2 &= \frac{\pi}{4} v c^2 \alpha, \\ \frac{\Gamma_1}{x_0 - x_1} + \frac{\Gamma_2}{x_0 - x_2} &= 2 \pi v \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Durch Elimination von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  gelangt man zu der folgenden Gleichung, welcher zur Abkürzung die Grössen  $\xi_0 = x_0/c$ ,  $\xi_1 = x_1/c$ ,  $\xi_2 = x_2/c$  eingeführt werden:

$$\frac{1}{4} + \xi_0 - \xi_1 - \xi_2 = 2 (\xi_1 - \xi_0) (\xi_2 - \xi_0) \quad (9)$$



Dies ist eine Gleichung für die drei Unbekannten  $\xi_0$ ,  $\xi_1$  und  $\xi_2$ . Eine weitere Gleichung erhält man aus dem Fall des Kreisbogenprofils, welcher zunächst aus (5), (6) und (7) liefert

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_2 = \frac{\pi}{2} v c \beta, \\ x_1 I_1 &= x_2 I_2 = \frac{\pi}{4} v c^2 \beta, \\ \frac{I_1}{x_0 - x_1} &= \frac{I_2}{x_0 - x_2} = 2 \pi v \beta \left( \frac{x_0}{c/2} - 1 \right). \end{aligned} \right\}$$

Nach Elimination von  $I_1$  und  $I_2$ :

$$\frac{1}{2} = \xi_0 - \xi_1 - \xi_2 + (2\xi_0 - 1)(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2).$$

Eine dritte Gleichung zwischen den drei Unbekannten  $\xi_0$ ,  $\xi_1$  und  $\xi_2$  ergibt sich aus dem Fall des S-Schlagprofils

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 &= 0, \\ x_1 I_1 + x_2 I_2 &= -\frac{3\pi}{32} v c^2 \delta, \\ \frac{I_1}{x_0 - x_1} + \frac{I_2}{x_0 - x_2} &= \frac{3}{2} \pi v \delta \left[ -2 \left( \frac{x_0}{c/2} \right)^2 + 4 \frac{x_0}{c/2} - 1 \right], \end{aligned} \right\}$$

durch Elimination von  $I_1$  und  $I_2$

$$1 = 16 (1 - 8\xi_0 + 8\xi_0^2) (\xi_0 - \xi_1) (\xi_0 - \xi_2). \quad (9)$$

Die Auflösung der drei Gleichungen (9), (11) und (13) nach den drei Unbekannten geschieht folgendermassen: Zunächst gilt:

$$(\xi_0 - \xi_1) (\xi_0 - \xi_2) = \xi_0^2 - n \xi_0 - m,$$

wobei

$$n = \xi_1 - \xi_2 \quad \text{und} \quad m = \xi_1 \xi_2 \quad (10)$$

gesetzt wurde. Sodann dividiert man (9) durch (11). Dies gibt

$$8\xi_0^2 + 4\xi_0(1 - 2n) + 2 - 6n = 0. \quad (11)$$

Subtrahiert man hievon das Vierfache der Gleichung (9), so bleibt:

$$8m - 2n + 1 = 0. \quad (12)$$

Die Division (9) : (13) ergibt

$$64\xi_0^3 - 16\xi_0^2(3 + 4n) - 8\xi_0(1 - 8n) + 1 - 8n = 0.$$

abtrahiert man hievon das  $(8\xi_0 - 2)$ -fache der Gleichung (15), so folgt

$$4n = 3.$$

zusammen mit (16)

$$n = \frac{3}{4}, \quad m = \frac{1}{16}.$$

Gen (14) sind  $\xi_1$  und  $\xi_2$  die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\xi^2 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{16} = 0,$$

$$\xi_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} = 0,0955, \quad \xi_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} = 0,6545. \quad (17)$$

Die Gleichung (15) ergibt sich durch Einsetzen von  $n$  auch eine quadratische Gleichung für  $\xi_0$ :

$$4\xi_0^2 - 5\xi_0 - \frac{5}{4} = 0$$

den beiden Lösungen:

$$\xi_0 = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{8} = \begin{cases} 0,3455, \\ 0,9045. \end{cases} \quad (18)$$

Daraus folgt

**Satz 2.** Ein dünnes Profil in zweidimensionaler Strömung, das aus den Arten: ebene Platte, Kreisbogenprofil, S-Schlagprofil besteht, kann hinsichtlich Auftriebes und des Momentes in exakter Weise durch zwei gebundene Einzelwirbel ersetzt werden, deren Abstände  $x_1 = c\xi_1$  und  $x_2 = c\xi_2$  von der Vorderkante durch die Formeln (17) gegeben sind, wenn die tangentialer Strömungsbedingung in den zwei durch die Formel (18) gegebenen Linien im Abstand  $x_0 = c\xi_0$  von der Vorderkante erfüllt wird.

Wie sich auf dem Satz 1 die Weissingersche Theorie der Auftriebsberechnung baut, so liefert der Satz 2 eine Methode zur Berechnung der Momentenverteilung. In dieser Methode werden also zwei gebundene Einzelwirbel angenommen, die in den durch die Formeln (17) gegebenen Flügeltiefen liegen. Die von diesen gebundenen Wirbeln und den abgehenden freien Wirbeln induzierte Abwärtsgeschwindigkeit wird dann längs zwei Linien, die in den durch die Formel (18) gegebenen Flügeltiefen verlaufen, gleich der durch den Flügel gegebenen Abwärtsgeschwindigkeit gesetzt. Dies ergibt ein System von zwei integrodifferentialgleichungen für die beiden unbekannten Zirkulationsverteilungen, welches sich auf dieselbe Weise durch ein lineares algebraisches Gleichungssystem ersetzen lässt wie die Weissingersche Integrodifferentialgleichung, nur mit dem Unterschied, dass die Anzahl der Unbekannten jetzt doppelt so gross ist. Auf diese Weise wird dann also nicht nur der durch die

räumliche Strömung induzierte Anstellwinkel, sondern auch die induzierte Kreisbogen- und S-Schlagkrümmung der Stromlinien berücksichtigt. Als Tragflächen, die selbst Kreisbogen- und S-Schlagkrümmung aufweisen, lassen sich behandeln, wenn man nur an den Stellen, wo die tangentielle Strömungsbedingung erfüllt wird, die entsprechende Profilneigung einsetzt.

### Summary

After having shown that the PRANDTL and WEISSINGER theories for the calculation of the lift distribution of wings of finite span fail to give the spanwise distribution of the center of pressure, a new model replacing the wing, consisting of two bound vortices, is proposed for the calculation of the lift- and moment distribution. The positions of the two bound vortices and of the two lines satisfying the downwash condition are determined—in a straight-forward manner as an extension of the WEISSINGER model—so that the first three terms of the FOURIER development of the chordwise vorticity distribution give exact values of lift and moment at every spanwise station.

(Eingegangen: 20. Dezember 1952.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

### Rechnen mit komplexen Zahlen auf einer mechanischen Multipliziermaschine

Von WALTER BÖSCH, Zürich<sup>1)</sup>

Die numerische Berechnung des resultierenden komplexen Widerstandes von zwei parallelgeschalteten komplexen Widerständen auf einer gewöhnlichen mechanischen Multipliziermaschine kann dann erfolgen, wenn der Ausdruck:

$$\mathfrak{Z}_P = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2}}$$

(wobei  $\mathfrak{Z}_1 = R_1 - jX_1$  und  $\mathfrak{Z}_2 = R_2 - jX_2$  ist) übergeführt wird in die Gleichung:

$$\mathfrak{Z}_P = \frac{\mathfrak{Z}_1 (R_2^2 + X_2^2) + \mathfrak{Z}_2 (R_1^2 + X_1^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

Gegenüber der bis heute allgemein üblichen Berechnungsmethode mit Logarithmen und trigonometrischen Funktionen ergibt sich in der Praxis eine höhere Genauigkeit und eine grosse Arbeitszeitreduktion, speziell bei Netzberechnungen.

(Eingegangen: 14. Februar 1953.)

<sup>1)</sup> Postfach Zürich 23.

## Kleine Schwingungen dynamischer Systeme

Von PAUL ERDÖS, Zürich<sup>1)</sup>

### Einleitung

Die Bewegung eines holonomen konservativen dynamischen Systems mit  $n$  Freiheitsgraden um seine Gleichgewichtslage oder um seine gleichförmige Bewegung wird durch die den Anfangsbedingungen genügenden Lösungen der Hamiltonschen Differentialgleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{n+k}}, \quad \dot{q}_{n+k} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

bestimmt, wobei  $q_k$  bzw.  $q_{n+k}$  die verallgemeinerten Lage- bzw. Impulskoordinaten und  $\mathcal{H}$  die Hamiltonsche Funktion des Systems bezeichnen.

Beschränkt man sich auf kleine Bewegungen des Systems, so kann die Hamiltonsche Funktion als quadratische Form der Variablen  $q_1, \dots, q_{2n}$  angegeben werden. Dabei können gyroskopische Terme der Form  $q_k q_{n+l}$  ( $k, l < n$ ) auftreten, die es verunmöglichen, die Stabilität durch eine simultane Hauptachsentransformation der kinetischen und potentiellen Energie zu untersuchen. Es gelang WEIERSTRASS [1]<sup>2)</sup>, unter der Annahme, dass  $\mathcal{H}$  positiv definit ist, die Stabilität der Gleichgewichtslage bzw. gleichförmiger Bewegung aufzuzeigen, indem er die explizite Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichungen in Form einer Linearkombination harmonischer Schwingungen anzugeben.

Die Weierstraßsche Methode wurde auch von WHITTAKER [2] übernommen. In seiner neuere Arbeit von FRAZER, DUNCAN und COLLAR [8] verweist auf WHITTAKER. Anders die Überwindung der beim Auftreten mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung von  $\mathcal{H}$  entstehenden Schwierigkeiten (die LAGRANGE [6], PLACE [7] et al. zu Fehlschlüssen verführten) gibt zu einer langwierigen mathematischen Behandlung Anlass.

Im ersten Abschnitt soll gezeigt werden, wie sich durch Anwendung von Methoden der linearen Algebra eine kurze Behandlungsweise ergibt, die sich von der Weierstraßschen unterscheidet.

Im zweiten Abschnitt werden diese Methoden der linearen Algebra auf den Weierstraßschen Lösungsgang übertragen, und der Zusammenhang mit dem im ersten Abschnitt beschriebenen Vorgehen hergestellt.

Im dritten Abschnitt wird ein Hilfssatz der Matrizentheorie bewiesen, der im ersten Abschnitt Verwendung fand.

### Bezeichnungen

Falls nichts anderes vermerkt wird, bezeichnen kleine fette Buchstaben  $n$ -dimensionale Vektoren (Kolonnenmatrizen). So sei zum Beispiel  $\mathbf{q}$  der Vektor der Komponenten  $q_1(t), \dots, q_{2n}(t)$ . Grosse fette Buchstaben bezeichnen quadratische Matrizen vom Grade  $2n$ , zum Beispiel

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 219.

wobei  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{O}$  die Einheits- bzw. Nullmatrix vom Grade  $n$  bedeuten. Es  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^{-1} = -\mathbf{Q}$ . Der \* bezeichnet die transponierte Grösse. Die Gesamtheit des Systems schreibt sich

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^* \mathbf{H} \mathbf{q} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{H}.$$

Ferner soll eine charakteristische Matrix  $\mathbf{z} \mathbf{E} - \mathbf{A}$  als eine solche mit lauter linearen Elementarteilern bezeichnet werden, wenn  $z_k$  eine  $\alpha_k$ -fache Wurzel der charakteristischen Gleichung  $f(z) = |\mathbf{z} \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$  ist, und  $\prod_{k=1}^r (z - z_k)^{\alpha_k - 1}$  als grösster gemeinsamer Teiler aller  $(2n - 1)$ -reihigen Unterdeterminanten derselben auftritt. Das Produkt erstreckt sich dabei nur über die  $r$  voneinander verschiedenen Wurzeln.

# 1.

Fasst man die  $2n$  Hamiltonschen Gleichungen zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{q}$$

zusammen, so kann  $\mathbf{q}$  mittels der zeitabhängigen Matrix  $\mathbf{B}(t)$  als

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}(t) \dot{\mathbf{q}} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}_m \frac{(t - t_0)^m}{m!} \dot{\mathbf{q}}$$

angesetzt werden, mit  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}(t_0)$  den Anfangsbedingungen Rechnung tragend. Um die Beiwerte  $\mathbf{B}_m$  der nach der Zeit in Potenzreihe entwickelten  $\mathbf{B}(t)$  zu bestimmen, wird  $\mathbf{q}$  und

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{B}}(t) \dot{\mathbf{q}} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}_{m+1} \frac{(t - t_0)^m}{m!} \dot{\mathbf{q}}$$

in (1.1) eingesetzt:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}_{m+1} \frac{(t - t_0)^m}{m!} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \mathbf{H} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}_m \frac{(t - t_0)^m}{m!} \dot{\mathbf{q}}.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\mathbf{B}_m = (\mathbf{Q} \mathbf{H})^m$$

und damit

$$\mathbf{q} = \sum_{m=0}^{\infty} (\mathbf{Q} \mathbf{H})^m \frac{(t - t_0)^m}{m!} \dot{\mathbf{q}} = e^{\mathbf{Q} \mathbf{H} (t - t_0)} \dot{\mathbf{q}}.$$

Um diese Lösung in der üblichen Form darzustellen, verwendet man die Eigenschaft von  $\mathbf{Q} \mathbf{H}$ , dass ihre charakteristische Matrix  $\mathbf{z} \mathbf{E} - \mathbf{Q} \mathbf{H}$  lauter lineare Elementarteiler und paarweise konjugiert imaginäre charakteristische Wurzeln  $z_j = \pm i \kappa_j$  ( $\kappa_j$  reell, positiv) besitzt, da der grösste gemeinsame Teiler aller ihrer  $(2n - 1)$ -reihigen Minoren mit dem der äquivalenten Matrix

$$\mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{H} (\mathbf{z} \mathbf{E} - \mathbf{Q} \mathbf{H}) \mathbf{H}^{-1/2} = \mathbf{z} \mathbf{E} - \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{Q} \mathbf{H}^{1/2} \quad (1)$$

übereinstimmt<sup>1)</sup>. Dabei ist  $\mathbf{H}^{-1/2}$  irgendeine der Matrizen, für welche  $(\mathbf{H}^{-1/2})^2 = \mathbf{F}$  gilt. Da  $\mathbf{H}$  positiv definit ist, wird mit  $\mathbf{H}$  auch  $\mathbf{H}^{1/2}$  symmetrisch, also

<sup>1)</sup> Dies ist eine unmittelbare Folge davon, dass die Determinante eines Produktes von Matrizen das Produkt der Determinanten der Faktoren ist. Siehe zum Beispiel [4].

$H^{1,2} Q H^{1,2} = -H^{1,2} Q H^{1,2}$  somit  $H^{1,2} Q H^{1,2}$  schiefssymmetrisch.  $H^{1,2} Q H^{1,2}$  die oben erwähnte Eigenschaft [3], folglich auch  $Q H$ .

**Hilfssatz.** Hat die charakteristische Matrix einer Matrix  $P$  lauter lineamentarteiler und ist  $g(z)$  eine reguläre eindeutige analytische Funktion, so gilt

$$g(P) = \sum_{j=1}^r g(z_j) \left( \frac{z - z_j}{z E - P} \right)_{z=z_j}, \quad (1.7)$$

bei  $z_1, \dots, z_r$  die voneinander verschiedenen Wurzeln von  $f(z) = |z E - P| = 0$ .

Wendet man dies auf  $Q H$  an, so wird

$$\left[ \sum_{j=1}^r \left( \frac{z - i \kappa_j}{z E - Q H} \right)_{z=i \kappa_j} \right] \dot{q} = 0. \quad (1.8)$$

zeichnet man

$$\left( \frac{z - i \kappa_j}{z E - Q H} \right)_{z=i \kappa_j} = \left( \frac{(z - i \kappa_j) (z E - Q H)^{adj}}{f(z)} \right) = F_j + i F_j \quad (1.9)$$

$F_j'$  reell), so ist

$$q = 2 \left[ \sum_{j=1}^{r/2} F_j \cos \kappa_j (t - t_0) - F_j' \sin \kappa_j (t - t_0) \right] \dot{q}. \quad (1.10)$$

## 2.

$$\dot{q} = Q H q \quad (1.1)$$

und auch durch den Ansatz

$$q = \oint_C b(z) e^{z(t-t_0)} dz \quad (2.1)$$

öst, sofern als Integrationsweg  $C$  ein Kreis gewählt wird, der sämtliche Wurzeln von  $f(z) = |z E - Q H| = 0$  enthält. Setzt man diesen Ansatz für  $q$  und seinen Ableitung nach der Zeit für  $\dot{q}$  in (1.1) ein, so kommt man auf die Bedingung

$$\oint_C (z E - Q H) b(z) e^{z(t-t_0)} dz = 0, \quad (2.2)$$

die nur erfüllt sein kann, wenn  $(z E - Q H) b(z)$  eine in  $C$  regulär-analytische Vektorfunktion

$$(z E - Q H) b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k y_k = y(z)^{-1} \quad (2.3)$$

In einer ringförmigen Umgebung des Integrationsweges lässt sich (2.3) nach  $y(z)$  auflösen und liefert

$$b(z) = (z E - Q H)^{-1} y(z). \quad (2.4)$$

mit ist die Lösung:

$$q = \oint_C \frac{y(z)}{z E - Q H} e^{z(t-t_0)} dz. \quad (2.5)$$

<sup>1)</sup> Die Annahme [1], [2], dass mit Ausnahme von  $y_0$  alle Entwicklungskoeffizienten Null sind, ist nicht erforderlich.



Beachtet man die im ersten Abschnitt hergeleitete Tatsache, dass  $(z\mathbf{E} - \mathbf{Q}\mathbf{H})$  nur einfache, konjugiert imaginäre Pole hat, so ergibt die Anwendung des Residuensatzes auf dieses Integral den Ausdruck (1.10). Die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen führt auf

$$2\pi i \mathbf{y}(z) = \mathbf{q}.$$

Stellt man sich die Frage, welcher logische Weg zum Ansatz (2.1) bzw. (2.5) führt, so ergibt sich die Antwort aus dem Vergleich von (1.5) und (2.5):

$$e^{\mathbf{Q}\mathbf{H}(\ell - \ell_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{z(\ell - \ell_0)}}{z\mathbf{E} - \mathbf{Q}\mathbf{H}} dz.$$

In der Tat kann eine eindeutige analytische Funktion einer Matrix  $\mathbf{A}$  in allgemeiner Weise durch das Cauchysche Integral

$$g(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z) dz}{z\mathbf{E} - \mathbf{A}}$$

dargestellt werden [5]. Es liegt daher nahe, den Lösungsvektor als ein solches Cauchy-Integral anzusetzen, wobei die Zeit als Parameter auftritt.

Die obigen Betrachtungen liefern auch ein Beispiel dafür, dass die spektrale Zerlegung einer Matrix vollkommen gleichbedeutend ist mit der Anwendung des Residuensatzes auf ihr Cauchysches Integral.

### 3.

*Beweis des Hilfssatzes.* Ist  $\mathbf{P}$  eine Matrix vom Grade  $n$ , deren charakteristische Matrix lauter lineare Elementarteiler besitzt, und

$$\mathbf{P} = \sum_i z_i \mathbf{P}_i \quad (1)$$

ihre spektrale Darstellung, mit

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{P}_i, \quad (2)$$

$$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \delta_{ij} \mathbf{P}_i, \quad (3)$$

wobei die  $\mathbf{P}_i$  Operatoren darstellen, die jeden Vektor auf den zum Eigenwert  $z_i$  gehörenden Eigenraum längs des komplementären Raumes projizieren, da  $(z\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}$  die spektrale Darstellung

$$\frac{1}{z\mathbf{E} - \mathbf{P}} = \frac{(z\mathbf{E} - \mathbf{P})^{adj}}{f(z)} = \sum_i \frac{1}{z - z_i} \mathbf{P}_i, \quad (4)$$

und es ist

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{z\mathbf{E} - \mathbf{P}} = \mathbf{P}_k. \quad (5)$$

Ist  $z_k$  eine  $\alpha_k$ -fache Nullstelle von  $f(z)$ , so ist sie – gemäss Voraussetzung – eine  $(\alpha_k - 1)$ -fache jedes Elementes von  $(z\mathbf{E} - \mathbf{P})^{adj}$ , da die letzteren gerade  $(n - 1)$ -reihigen Minoren von  $z\mathbf{E} - \mathbf{P}$  sind. Folglich existiert obiger Limes und ist von Null verschieden. (Für Matrizen mit nichtlinearen Elementarteilern existiert dieser Limes nicht und somit auch keine spektrale Darstellung im obigen Sinne.)

Ist  $g(z)$  eine reguläre eindeutige analytische Funktion, so lässt sie sich in eine Laurent-Reihe entwickeln, und es gilt wegen (3.13):

$$g(\mathbf{P}) = \sum g(z_i) \mathbf{P}_i. \quad (3.6)$$

Zum Schlusse danke ich den Herren Prof. Dr. E. STIEFEL und PD. Dr. RUTISHAUSER herzlich für ihr förderndes Interesse an der Arbeit.  
Mein Freund HANS WIDMER hat mir in verdankenswerter Weise bei der Text-  
rektur beigestanden.

### LITERATURVERZEICHNIS

- K. WEIERSTRASS, Ber. kgl.-preuss. Akad. Wiss. Berlin (1879) = *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 233.  
E. T. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4. Aufl. (Cambridge University Press, London 1937), S. 197–203.  
J. H. M. WEDDERBURN, *Lectures on Matrices* (American Mathematical Society Colloquium Publications 17, New York 1934), S. 88, 90, 91.  
C. C. MACDUFFEE, *The Theory of Matrices* (Chelsea, New York 1946) S. 41, Corr. 26. 1.  
G. GIORGI, Atti Accad. Lincei, Rend. 6, 8 (1928).  
J.-L. LAGRANGE, *Mécanique analytique* (Paris 1811), Bd. II, S. 347.  
P.-S. LAPLACE, *Mécanique céleste* (Paris 1798).  
R. A. FRAZER, W. J. DUNCAN und A. R. COLLAR, *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations* (Verlag? Cambridge und New York 1947), S. 222.

### Summary

The Hamiltonian differential equations for small displacements of a dynamical system with a finite number of degrees of freedom are solved by use of the methods of linear algebra. In this way the stability of the equilibrium configuration or uniform motion in the case of positive definite total energy is demonstrated. Especially gyroscopic terms may appear in the hamiltonian, making impossible the usual proof of stability by means of transformation to normal coordinates. This method is then applied to the Weierstrass procedure of solution.  
For use in the above integration, the spectral representation of a matrix with linear elementary divisors is given through the adjoint of its characteristic matrix.  
(eingegangen: 16. Oktober 1952.)

## Über eine Gefahr, die durch Ruderausschläge bei schallnahen Geschwindigkeiten entstehen kann

Von EUGEN GRUSCHWITZ, Altenrhein<sup>1)</sup>

Es ist bekannt, dass die Ruderwirkung bei Flugzeugen mit zunehmender Machscher Zahl  $M$  zunächst ansteigt, so wie es die Prandtlsche Regel verlangt. Ab einem gewissen Wert von  $M$  an, der natürlich von verschiedenen Einflüssen

<sup>1)</sup> Flug- und Fahrzeugwerke AG.

abhängt, kann sie indessen mit weiter zunehmendem  $M$  sehr rasch absinken Werte erreichen, die nur noch einen Bruchteil derjenigen bei kleinen Werten  $M$  darstellen. Zum Beispiel hat sich aus einer Messung von O. KNAPPE<sup>1)</sup> an einem Flügel mit 30% tiefem Ruder in ebener Strömung der in Figur 1 dargestellte Verlauf der Ruderwirkung, ausgedrückt durch den Wert  $\partial c_a / \partial \beta$ , über  $M$  ergeben. Dieser Zusammenbruch der Ruderwirkung ist auf Strömungsablösung am Ruder, die durch Verdichtungsstöße verursacht wird, zurückzuführen.

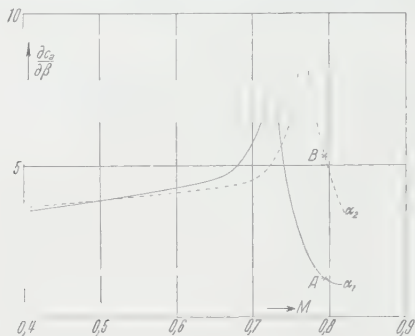


Fig. 1

$\partial c_a / \partial \beta$  als Funktion der Machschen Zahl.  $t_R/t = 0,3$ .  
(Nach KNAPPE.)

Um bei Machschen Zahlen nahe 1 eine beträchtliche Ruderwirkung zu erreichen, benötigt man also grosse Ruderausschläge. Mit den bei den meisten Hochgeschwindigkeitsflugzeugen vorhandenen Kraftsteuerungen sind solche Ausschläge trotz der grossen Rudermomente auch erreichbar. Erfolgt nun eine ziemlich rasche Verminderung der Fluggeschwindigkeit, wie sie etwa beim Abfangen aus dem Sturzflug, insbesondere beim Gebrauch von Sturzflugbremsen oder auch beim Übergang aus dem Horizontalflug in einen steilen Steigflug zu erwarten ist, und wird während dieses Überganges der grosse Ruderausschlag vernünftigerweise der Kraftsteuerung beibehalten, so kann die Ruderwirkung infolge der Abnahme von  $M$  sehr rasch auf ein Mehrfaches ihres anfänglichen Wertes steigen. Die dabei beim Abfangen nötige Höhenleitwerkslast liegt im allgemeinen nicht sehr weit über der sicheren Last, für die die Festigkeit des Leitwerkes dimensioniert ist. Durch den eben beschriebenen Effekt kann die Höhenleitwerkslast auf ein Mehrfaches der Abfanglast steigen. Es besteht also die Gefahr eines Leitwerksbruches oder infolge zu heftigen Abfangens, die Gefahr einer Überschreitung des zulässigen Lastvielfachen und damit die eines Flügelbruches. Möglicherweise lassen sich einige bisher ungeklärte Unfälle so verstehen.

Es ist denkbar, dass ein ähnlicher Effekt auch ohne Änderung der Geschwindigkeit entstehen kann. Die Lage des Abfalles der Ruderwirkung über  $M$  hängt vom Anstellwinkel des Leitwerkes ab. Eine Änderung dieses Winkels kann daher die gleiche Wirkung haben wie eine Änderung von  $M$ . Wenn zum Beispiel ein Ruderausschlag beim Anstellwinkel  $\alpha_1$  am Punkte A der Figur 1 erfolgt und der Anstellwinkel sich von  $\alpha_1$  auf  $\alpha_2$  ändert, so springt die Ruderwirkung auf den Wert beim Punkte B.

<sup>1)</sup> O. KNAPPE, Schnellkanalversuche an einem symmetrischen Klappenflügel, Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. 1, 96 (1941).

Auf alle Fälle stellen grosse Ruderausschläge bei hohen Machschen Zahlen, mindest am Höhenleitwerk, eine Gefahr dar. Strömungen mit Verdichtungs- und Grenzschichtablösung sind der Berechnung nicht zugänglich und durch sehr kleine Ursachen beeinflussbar. Das Absinken der Ruderwirkung in bald mehr und bald weniger stark und auch mehr oder weniger steil sein, man kann sich im Einzelfall auf Messungen nicht verlassen. Man vermeidet diese Gefahr am einfachsten, indem man oberhalb einer gewissen Fluggeschwindigkeit an Stelle grosser Ruderausschläge entsprechende Flossentrimmungen verändert.

### Summary

It is called attention to the danger for airplanes resulting from the behaviour of the rudder efficiency at overcritical Mach numbers. Windtunnel tests show that in many cases at transsonic Mach numbers a sharp decrease of the rudder efficiency is possible. Author shows that as a consequence of this behaviour under certain conditions forces may be produced which are ample to destroy the craft.

(Eingegangen: 16. Februar 1953.)

## Growth of Boundary Layer on a Rotating Sphere

By SWAMI DAYAL NIGAM

and KUMANDUR SRINIVASA IYENGAR RANGASAMI, Kharagpur<sup>1)</sup>

### 1. Introduction

HOWARTH<sup>2)</sup> has investigated the problem of the flow engendered by a sphere rotating uniformly about a diameter in otherwise undisturbed fluid. From the physical considerations we should expect an inflow at the poles and an outflow at the equatorial plane. The flow should be symmetrical about the equatorial plane, and the sphere may be considered to be made up of two hemispheres joined smoothly at the equator. HOWARTH finds that the boundary layers originate at the poles on the two hemispheres and develop towards the equator where they impinge on each other. HOWARTH's solutions are not valid near the equator. They do not give any information about the flow in the equatorial plane. He concludes on the basis of his solutions that inflow will occur over a large part of the surface, the outflow necessary to maintain continuity will be confined to the vicinity of the equatorial plane. His solutions give an inflow at the poles, but they do not give any outflow in the equatorial plane because they cease to be valid near the equator.

In the present note we have discussed the growth of motion, in the earlier stages of its development, caused by a sphere which at the time  $t = 0$  is suddenly made to rotate with a constant angular spin  $\Omega$  about a diameter in fluid otherwise undisturbed. The solutions have a serious limitation in that they give initial motion only. They give no information regarding the time after which the steady state is established.

<sup>1)</sup> Indian Institute of Technology, Kharagpur, India.

<sup>2)</sup> L. HOWARTH, Phil. Mag. 42, 1308–1315 (1951).

## 2. Equations of motion

We shall use spherical polar coordinates  $r, \theta, \varphi$  with  $r$  measured radially inwards from the centre of the sphere,  $\theta$  measured from the axis of rotation, and  $\varphi$  the azimuth. If  $u, v, w$  represent the components of velocity in the directions  $r, \theta, \varphi$  increasing the boundary layer equations can be deduced from HOWARTH<sup>1</sup> by placing  $K_1 = 0, K_2 (1/a) \cot \theta$ , where  $a$  is the radius of the sphere. They

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{a} \cot \theta = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{a} \cot \theta = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{a} \cot \theta = 0.$$

We now set

$$u = \Omega^2 a \sin \theta \cos \theta t f(\eta),$$

$$v = \Omega a \sin \theta g(\eta),$$

$$w = \Omega^2 a r^{1/2} t^{3/2} (3 \cos^2 \theta - 1) h(\eta),$$

where

$$\eta = \frac{r - a}{2 (\nu t)^{1/2}}.$$

During the early stages of motion when  $t$  is small (or in boundary layer theory terminology: when the thickness of the boundary layer is small), we may neglect the terms in the equations of motion containing higher powers of  $t$ . Therefore, omitting terms of order  $t^2$  in the equations of motion, we get to a first order approximation the following equations:

$$f'' + 2 \eta f' - 4 f = -4 g^2,$$

$$g'' + 2 \eta g' = 0,$$

$$f = h',$$

where a dash denotes differentiation with respect to  $\eta$ .

These equations are the same as the equations in the problem of boundary layer growth over an infinite rotating disk (NIGAM<sup>2</sup>).

## 3. Solutions of the equations

The solutions of these equations satisfying the boundary conditions  $u = v = w = 0$  on the sphere  $r = a$ ; and  $u = v = 0$  at  $r = \infty$ , are

$$g = [1 - \operatorname{erf} \eta] = \operatorname{erfc} \eta,$$

$$f = \frac{2}{\pi} [(1 + 2 \eta^2) \operatorname{erfc} \eta - 2 \pi^{-1/2} \eta e^{-\eta^2}] - 2 (\pi^{-1/2} e^{-\eta^2} - \eta \operatorname{erfc} \eta)^2,$$

$$h = \frac{2}{3 \pi} [(3 \eta + 2 \eta^3) \operatorname{erfc} \eta - 2 \pi^{-1/2} (1 + \eta^2) e^{-\eta^2}] - \frac{2}{3} \eta (\pi^{-1/2} e^{-\eta^2} - \eta \operatorname{erfc} \eta)^2 \\ - \frac{2}{3 \pi^{1/2}} e^{-\eta^2} \operatorname{erfc} \eta + \frac{2 \sqrt{2}}{3 \pi^{1/2}} \operatorname{erfc} (\sqrt{2} \eta) + \frac{2}{3 \pi^{1/2}} \left( \frac{2}{\pi} - 2^{1/2} + 1 \right).$$

<sup>1</sup>) L. HOWARTH, Phil. Mag. 42, 239-243 (1951).

<sup>2</sup>) S. D. NIGAM, Quart. Amer. Math. 9, 89-91 (1951).

vanishes both on the axis of rotation and in the equatorial plane;  $v$  vanishes on the axis of rotation;  $w$  is negative so long as  $3 \cos^2 \theta - 1 > 0$ , it vanishes for  $\cos^2 \theta = 1$ , i. e.  $\theta = 54^\circ 45'$  in the upper hemisphere and  $\theta = 125^\circ 15'$  in the lower hemisphere, and is positive when  $3 \cos^2 \theta - 1 < 0$ . This shows that there is a radial inflow towards the sphere for  $0 \leq \theta < 54^\circ 45'$ ; this radial flow disappears on the cone  $\theta = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$  and changes into a radial outflow for  $54^\circ 45' < \theta \leq \pi/2$ . Hence there is an inflow at the poles and an outflow near the equator.

It is highly probable that the cone  $\theta = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$  may widen towards the equator but these solutions do not give any such information.

A stream function may be defined by the equations

$$\frac{u}{a} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad w = -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

Hence the stream function may be expressed

$$\psi = 2 \Omega^2 l^{3/2} r^{1/2} \cos \theta \sin^2 \theta h(\eta).$$

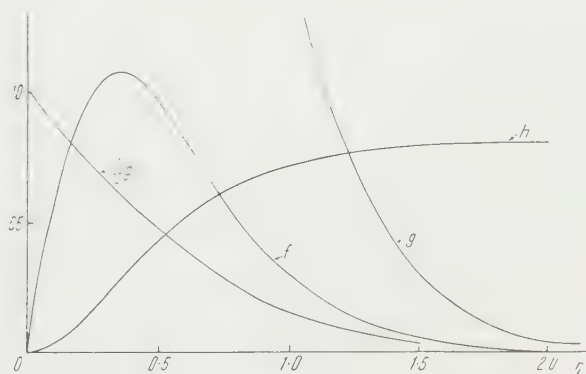


Fig. 1

The flow functions.

### Zusammenfassung

Die Gleichungen der Grenzschichttheorie wurden angewendet, um das An-  
 wachsen der Grenzschicht an einer in ruhendem Wasser rotierenden Kugel zu  
 studieren. Die Lösungen sind nur für kleine Zeitintervalle gültig. Die Grenzschicht  
 entsteht an den Polen und verstärkt sich nach dem Äquator zu. Im Gegensatz  
 der Lösung von HOWARTH fanden wir eine Einstromung an den Polen und  
 einen Abfluss am Äquator.



### International Congress of Mathematicians 1954

The International Congress of Mathematicians 1954 will be held in Amsterdam from September 2nd to September 9th under the auspices of "Het Wiskunde Genootschap" (The Mathematical Society of the Netherlands). The Organizing Committee has invited a number of outstanding mathematicians to deliver one-hour addresses, hoping that in this way a survey of the recent developments in the whole field of mathematics may be furnished. There will be seven sections viz:—

- (1) Algebra and Theory of Numbers;
- (2) Analysis;
- (3) Geometry and Topology;
- (4) Probability and Statistics;
- (5) Mathematical Physics and Applied Mathematics;
- (6) Logic and Foundations;
- (7) Philosophy, History, and Education.

In each of these sections half-hour addresses will be delivered by experts on the invitation of the Organizing Committee. Moreover short lectures will be given by members of the Congress who have applied beforehand to the Organizing Committee. The time allotted for each short lecture will be 15 minutes. It will depend on the number of these short lectures whether and how the sections will be divided into subsections.

The Organizing Committee is planning several entertainments and also a number of interesting excursions.

Those who wish to attend the Congress are requested to communicate their name (with degrees, qualifications, etc.) and full address to the secretary (2d Boerhaavestraat 49, Amsterdam, Netherlands) as soon as possible. They will receive a more detailed communication which will be sent out in the course of 1953.

J. F. KOKSMA

Secretary of the Organizing Committee

### Heineman Foundation for Research, Educational, Charitable, and Scientific Purposes, Inc.

The Board of Directors of the Heineman Foundation for Research, Educational, Charitable, and Scientific Purposes, Inc., announce the establishment of a prize to be known as the "Dannie Heineman Prize", in the sum of \$5,000 to be awarded every three years to the author of an outstanding book or manuscript in the mathematical or physical sciences. The object of the prize is to encourage the writing of books on a high scientific level which have merits of exposition and which are likely to facilitate access to important fields of research.

Any author desiring to submit a book or manuscript for consideration should deliver two copies to the Secretary of the Foundation. Submissions for the prize award shall be made not later than the 31st December 1955. Detailed rules governing the awards may be obtained from the Secretary of the Foundation, 50 Broadway, New York 4, N. Y., U.S.A.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Servomechanisms and Regulating System Design**, Volume I. By CHESTNUT and R. W. MAYER (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951), 17 pp., 350 figs.; \$7.75.

Der vorliegende Band ist vor allem ein Lehrbuch, das sich zum Ziele gesetzt hat, auch dem theoretisch weniger begabten Physiker und Ingenieur die Einbeziehung und rechnerische Erfassung seiner Regulierprobleme zu ermöglichen. Dieses Ziel dürften die Verfasser erreicht haben, was hauptsächlich der durchsichtigen Gliederung und der subtilen Darstellung des Stoffes zu verdanken ist.

Nach einer Einführung in die Problemstellung (1. Kapitel), einer kurzen Darstellung der komplexen Rechnungsweise (2. Kapitel), der Lösung von linearen Differentialgleichungen mit erzwungenen Vorgängen (3. Kapitel), ihrer Behandlung mit der Laplace-Transformation (4. Kapitel) und dem stationären Verhalten einer sinusförmigen Antriebsfunktion (5. Kapitel) beginnt die eigentliche Behandlung des Stoffes auf Seite 124 mit der Diskussion der Methoden für die Feststellung der Stabilität von geschlossenen Regelkreisen (Kapitel 6). ROUTHs Kriterium zur Abzählung von Wurzeln mit positiven Realteilen einer charakteristischen Gleichung höhern Grades wird ohne Beweis angeführt. Das Nyquist-Stabilitätskriterium findet eine eingehende Würdigung und wird an Hand von Beispielen erläutert. Das Kapitel 7 behandelt oft verwendete Regler Teile und ihre Darstellung durch komplexe Übertragungsfunktionen (Transfer Functions). Drei verschiedene Arten Reglersysteme werden im 8. Kapitel postuliert, nämlich

- Typ 0. Ein konstanter Wert der geregelten Grösse verlangt ein konstantes Fehlersignal.

- Typ 1. Ein konstantes Änderungsverhältnis (Geschwindigkeit) der geregelten Grösse verlangt ein konstantes Fehlersignal.

- Typ 2. Eine konstante Beschleunigung der geregelten Grösse verlangt ein konstantes Fehlersignal.

Nur diese drei Typen werden in der Folge betrachtet, da andere praktisch nicht in Frage kommen. Starkes Gewicht wird auf die allgemeine Bezeichnungsweise und die Buchstabensymbole gelegt. Beides ist gemäss den bereits vorhandenen Empfehlungen des A.I.E.E. (American Institute of Electrical Engineering) konsequent im Buche durchgeführt worden. Die Symbole sind entsprechend der Funktion im Regelkreis festgelegt und können je nach Aufbau ganz verschiedene physikalische Grössen repräsentieren. Diese Darstellungsweise hat den Vorteil, dass sie in allen Gebieten der Wissenschaft Gültigkeit hat. Im Kapitel 9 und 10 wird das Verhalten einfacher geschlossener Regelkreise mit Hilfe der Ortskurve der Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene (Nyquist-Diagramm) beschrieben und verschiedene Stabilisierungsmassnahmen diskutiert. Wesentlich wichtiger für die praktische Berechnung und deshalb in den Kapiteln 11 und 12 eingehender behandelt ist das Dämpfungsverfahren, welches das Nyquist-Kriterium mit dem Dämpfungs- und Phasenverlauf der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz verknüpft. BODEs Theoreme über den Zusammenhang von Real- und Imaginärteil von Übertragungsfunktionen werden übernommen und zweckentsprechend angewandt. Komplizierte Übertragungsfunktionen lassen sich dabei sehr einfach darstellen (Dämpfung als gebrochener Streckenzug mit verschiedenen Neigungen von 0, 20, 40, 60, ... db/Dekade). Besondere Netzkarten («Nichols» Charts) ermöglichen das Bestimmen des Fre-

quenzverhaltens des geschlossenen Regelkreises. Besonders einfach gestaltet die Diskussion stabilisierender Massnahmen mit Zusatzvierpolen. Regelkreise mit mehrfachen Rückführungen und mehreren Eingängen ist das Kapitel gewidmet, wobei sich das Dämpfungsverfahren zur Behandlung besonders währte. Endlich wird im Kapitel 14 der Zusammenhang von Frequenzgang und Einschwingvorgang bei Anlegung des Einheitssprunges untersucht. Wertvolle errechnetes Material in zahlreichen Charakteristiken zusammengestellt, gestatten annäherungsweise den Übergang von entsprechenden charakteristischen Grössen wie Überspringen, Zeitdauer bis innerhalb 5 % des Endwertes usw., auf die notwendige Übertragungsdämpfungsfunktion oder umgekehrt.

Ein Literaturverzeichnis mit 114 Arbeiten, auf welche im Text Bezug genommen wurde, ein Anhang von 50 Seiten mit Problemstellungen den Kapiteln geordnet und ein Schlagwortverzeichnis vervollständigen das Buch.

Abgesehen von einigen unwesentlichen Druckfehlern bleibt kaum ein Wunsch offen, es sei denn, dass Probleme, wie Störeinflüsse, Nichtlinearität, Sättigungerscheinungen, unstetige Regelkreise usw., im folgenden Band mit der gleich liebevollen Darstellung ihre Behandlung finden werden.

Das vorliegende Buch kann jedem, der sich mit Regelproblemen und ihrer Berechnungsweise vertraut machen will, warm empfohlen werden. Aber auch der Fachmann wird gern zu dieser geschlossenen Darstellung greifen und ihr manchen wertvollen Anregung entnehmen können.

H. W.

**Übungen zur projektiven Geometrie.** Von H. HERRMANN (Verlag Birkhäuser, Basel 1952), 168 S., 94 Abb. und 4 Raumbilder (Anaglyphen); sFr. 1.50.

Die Vertrautheit mit den Begriffsbildungen der projektiven Geometrie ist die unerlässliche Voraussetzung für das Studium irgendeines Zweiges der Geometrie, die grosse Zahl von Lehrbüchern über projektive Geometrie wird dadurch verständlich. Die *Übungen zur projektiven Geometrie* von HERRMANN ergänzen in erster Linie die in derselben Sammlung (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften) erschienene *Projektive Geometrie* von W. BLASCHKE. Daneben sind sie aber auch zum Gebrauch neben Vorlesungen und parallel zum Studium anderer Lehrbücher über projektive Geometrie gedacht.

Die Aufgaben schliessen an eine analytische Behandlung der projektiven Geometrie an. Die Sammlung enthält dementsprechend keine Konstruktionsaufgaben. Zu den 297 Aufgaben sind entweder vollständige Lösungen angegeben oder aber die Lösungen sind wenigstens so weit skizziert, dass sie der Leser ohne grosse Mühe selbst vervollständigen kann.

Durch die Auswahl der Beispiele sowie durch die vorgeschlagenen Lösungswege stellt der Verfasser den Begriff der Matrix in den Vordergrund, und zwar weit mehr, als dies in der projektiven Geometrie bis jetzt üblich war. Es sei bemerkt, dass dadurch neue Gesichtspunkte zutage treten. Uns will aber scheinen, dass überall dort, wo die Matrix nicht Abkürzung der Schreibweise, sondern selbst Objekt der Geometrie ist, der Geometrie etwas Zwang angetan wird. Jedoch falls werden die Akzente von der projektiven Geometrie auf die lineare Algebra verlegt.

Die Sammlung ist getrennt in Aufgaben aus der ebenen und Aufgaben aus der dreidimensionalen projektiven Geometrie.

In der Lösung der Aufgabe 86, Abschnitt a, ist eine Unkorrektheit enthalten: zwei ebene projektive Felder lassen sich nicht immer so in den Raum legen, dass sie durch eine Zentralprojektion auseinander hervorgehen. Die Formulierung der Aufgabe 113 «Das Erzeugnis zweier projektiver Geradenbüschel ist eine  $C_2$  o

Die Gerade» gefällt nicht ganz und dürfte dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten.

Das Schlusskapitel bringt in Form von Aufgaben eine nette Einführung in die Geometrie der Konfigurationen. Vier äusserst anschauliche Raumbilder oder Anaglyphen (eine Anaglyphenbrille liegt bei) von wichtigen Figuren der projektiven Geometrie beschliessen das Werk.

Die vorliegende Aufgabensammlung bildet eine willkommene Ergänzung zur *Projektiven Geometrie* von BLASCHKE; wer das Bedürfnis hat, seine Kenntnisse durch Aufgaben zu erhärten, wird sie dankbar aufnehmen. Die Auswahl der Aufgaben ist sehr geeignet, zu weitergehender Beschäftigung mit den berührten Gegenständen anzuregen.

Die Ausstattung ist wie üblich bei dieser Birkhäuser-Reihe vorzüglich.

M. Jeger

**The Classical Theory of Fields.** BY L. LANDAU and E. LIFSHITZ (Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1951). 354 pp., 12 figs; \$7.50.

Das vorliegende Werk ist im wesentlichen ein Kompromiss zwischen zwei Richtlinien: Es soll einerseits ein einführendes Lehrbuch in die Theorie des Elektromagnetismus und der Gravitation sein, andererseits die allgemeinen Prinzipien der klassischen Feldtheorien überhaupt darlegen, wie sie auch anderswo (Plastizitätslehre, Hydrodynamik, Übergang zur Quantentheorie der Felder) gebraucht werden. Das Resultat des Kompromisses ist zwiespältig: Einerseits sind die allgemeinen Prinzipien nicht in zusammenhängender Form, sondern nur am Beispiel der beiden speziellen Felder dargelegt; andererseits ist der ihnen entechende deduktive Weg für eine einführende Darstellung nicht ganz überzeugend.

Der Aufbau des Werkes ist im wesentlichen folgender: Vorangestellt (Kapitel I) steht das Relativitätsprinzip, das als Grundlage für die ganze Behandlung dient. Im nächsten (Kapitel II) wird die relativistische Mechanik von Massenpunkten deduktiv aus dem durch Invarianzforderungen bestimmten Wirkungsintegral abgeleitet. Die Nichtexistenz starrer Körper in der Relativitätstheorie führt zum Schlusse, dass Elementarteilchen seien Massenpunkte; infolgedessen wird im ganzen Buch nur mit Punktladungen gearbeitet, die Elektrodynamik kontinuierlicher Ladungen und Medien also nicht behandelt.

Kapitel III bis IX entwickeln in dem so gezeichneten Rahmen die Theorie des elektromagnetischen Feldes in Wechselwirkung mit Ladungen (inklusive Optik), wieder deduktiv von einem postulierten Variationsprinzip ausgehend. Bemerkenswert sind hier insbesondere die Kapitel über Feld und Ausstrahlung bewegter Ladungen, in welchen viele Probleme in eleganter Weise besprochen werden, welche sonst kaum in Lehrbüchern angetroffen werden; so etwa die Wechselwirkung bewegter Teilchen bis zur zweiten Ordnung in den Geschwindigkeiten (nach DARWIN), die Ausstrahlung des Zweikörpersystems mit Coulombwechselwirkung, Lichtemission durch Teilchen im homogenen Magnetfeld (Betastrahlung) usw.

Kapitel X und XI behandeln die allgemeine Relativitätstheorie samt dem zugehörigen mathematischen Werkzeug, der Tensoranalysis. Als Anwendungen werden neben der Schwarzschildschen Lösung für das zentralsymmetrische, zeitlich instantane Gravitationsfeld die Friedmannschen Lösungen gegeben, welche einer räumlich isotropen und homogenen, zeitlich expandierenden Welt entsprechen. Das übersichtlich und mit grosser Eleganz geschriebene Werk wird, trotz der ausgesprochenen Vorbehalte, dank seinem nicht dem Üblichen entsprechenden Ge-



sichtspunkt, der Fülle behandelter Probleme und insbesondere der grossen, schöner, mit Lösungen versehener Übungsaufgaben jedem von grossem Nutzen, der sich in die Theorie der beiden klassischen Felder zu vertiefen wünscht.

M. R. Scha

**Crystal Growth.** By H. E. BUCKLEY (John Wiley & Sons, Inc., New York 1951). 571 pp., 169 figs.; \$9.00.

H. E. BUCKLEY hat sich in vielen schönen Arbeiten mit dem Problem Kristallwachstums, insbesondere der Habitus- und Trachtbeeinflussung, beschäftigt. Heute beschäftigen sich manche Laboratorien mit *Kristallzüchtung*, einer Experimentalwissenschaft, die von den Mineralogen, denen die mannigfachen morphologischen Aspekte der Mineralien eine Fülle von Problemstellungen darbietet, inauguriert wurde. Die moderne Kristallphysik und technische Kristallkunde aber benötigt Kristalle bestimmter Eigenschaften; sie muss diese in geforderter Grösse und Reinheit synthetisieren. Bei diesen Versuchen stellen sich oft manche Überraschungen ein. Wohl geben Theorien über den Wachstumsvorgang den Einfluss der Konstitution der Lösungen auf den Wachstumsprozess wertvolle Anhaltspunkte, allein es liegt in der Natur der Vorgänge, dass eine Beherrschung der Gesamtheit der Aufbauprozesse noch unmöglich ist. Man muss oft die Wachstumsbedingungen variieren und ist dann froh, Erfahrungen anderer Forscher benützen zu können, selbst wenn es sich nur um empirische Kenntnisse handelt, die der theoretischen Deutung noch Schwierigkeiten bereiten. Daher ist ein Buch wie das von BUCKLEY ein unbedingtes Erfordernis geworden, da es über solche Beobachtungen ausgezeichnet orientiert. Es wird bei der Anzeige dieses Werkes am besten sein, nicht auf Spezialfragen einzugehen, sondern eine Übersicht über den Inhalt zu geben.

Nach einer kurzen Einführung über Lösungen, Löslichkeit, Übersättigung und die Methoden der Kristallzüchtung folgen vier Abschnitte über die Theorie des Kristallwachstums, die den Zweck verfolgen, über verschiedene Ansätze zu orientieren, dieses Problem generell zu behandeln. Ideal- und Realkristall, Typen von Kristallisationsvorgängen, Lösungs- und Ätzzvorgänge werden in drei weiteren Abschnitten erörtert. Für den von der physikalischen Seite an das Problem herantretenden Forscher sind die Erfahrungen besonders wichtig, die über Habitus- und Trachtbeeinflussungen, den Einfluss von Verunreinigungen, spezielle Wachstumserscheinungen und über den Einfluss der Bedingungen während der Kristallisation gesammelt wurden.

Jeder Abschnitt enthält ausgewählte Literaturverzeichnisse, die dem Leser ermöglichen, die wichtigsten Originalarbeiten aufzusuchen. Die Fülle des zu wältigenden Stoffes war so gross, dass manche dem Mineralogen besonders am Herzen liegende Fragen, wie zum Beispiel die morphologische Charakterisierung einer Kristallart, zurückgestellt werden mussten, da sich ja das Buch in einer Linie an den Kristallzüchter wenden will. Ihm aber wird es so mannigfache Anregungen und Hinweise über beim Kristallwachstum auftretende, manchmal gewünschte, oft aber unerwünschte Erscheinungen darbieten, dass es für ihn unentbehrlich ist.

P. N

**Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker.** E. LOHR (W. de Gruyter & Co., Berlin 1950). 488 S., 34 Abb.; DM 24.—.

Ein Hauptcharakteristikum dieses Buches besteht fraglos in seiner aussergewöhnlich reichhaltigen Dotierung mit instruktiven und interessanten Anwendungen. Sie beziehen sich auf fast alle Disziplinen der Physik: Mechanik

iktsysteme und der starren Körper, Elastizitätstheorie, Hydrodynamik, Optik, elektro-magnetische Theorie, Quantentheorie usw. Besondere Abschnitte sind mathematischen Gegenständen gewidmet (Geometrie, Funktionentheorie). Diesen Anwendungen scheint mir der hervorragende Vorzug des Werkes zu liegen. Sie nehmen nahezu die Hälfte seines Volumens ein. Der angehende Physiker wird aus ihrem Studium ohne Zweifel vielgestaltigen Nutzen ziehen. Unendlich dafür ist allerdings eine intime Vertrautheit mit der in den beiden ersten Teilen entwickelten mathematischen Begriffswelt (Vektoren, Dyaden usw.), insbesondere auch mit dem verwendeten symbolischen Formalismus. Im ersten Teil (ca 100 Seiten) wird die Algebra dieser Grössen dargestellt, worauf in einem als umfangreicheren zweiten Teil die Analysis (Theorie der Felder) folgt. Die knappe Darstellung, besonders bei vielen Anwendungen – die reiche Fülle wäre ers kaum unterzubringen –, heischt vom Studierenden intensive Mitarbeit. Der Verfasser benutzt konsequent die Symbolik von GIBBS und JAUMANN, welche nach seiner Erfahrung «die klarste und verallgemeinerungsfähigste» ist. Der Referent bedauert lebhaft, dass es ihm nicht gelingen will, sich dieser Ansicht anzuschliessen, dies in erster Linie angesichts des höchst zweckmässigen Formalismus, welcher in Algebra und Analysis für mathematische Gegenstände derselben Natur in umfassender Weise entwickelt worden und heute allgemein üblich ist.

F. Baebler

**The Design and Analysis of Experiments.** By O. KEMPTHORNE (John Wiley & Sons, New York, 1952). 631 pp., 27 figs.; \$8.50.

Das Entwerfen von Versuchsplänen ist durch R. A. FISHER in den Rang einer wissenschaftlichen Methode erhoben worden. Diese Verfahren sind einer der wichtigsten Beiträge, welche die neuere mathematische Statistik zum Ausbau der Erfahrungswissenschaften beigesteuert hat.

KEMPTHORNE setzt sich in diesem Werke zum Ziel, das Planen von Versuchen von einem möglichst allgemeinen Standpunkt aus zu behandeln und es in den Rahmen der grundlegenden mathematisch-statistischen Theorie zu stellen.

Nach einleitenden Bemerkungen über die Bedeutung der statistischen Methoden im Bereiche der Erfahrungswissenschaften gibt KEMPTHORNE eine geschlossene Darstellung der Theorie der Mehrfachregression mit Anwendung auf die Planungszerlegung, wie sie in dieser Vollständigkeit und Strenge meines Wissens nirgends zu finden ist. Nachdem er die Wichtigkeit der zufälligen Zuteilung der Versuchseinheiten auf die verschiedenen Verfahren gebührend hervorgehoben hat, wendet er sich den einfachen Versuchsplänen zu – der zufälligen Anordnung der Blöcke und dem lateinischen Quadrat. Hierauf werden die Versuche mit mehreren Faktoren sehr eingehend besprochen, und zwar in allen ihren Abwandlungen. Auch die von F. YATES zuerst vorgeschlagenen Versuchsanordnungen in «vollständigen Blöcken» werden einlässlich erörtert.

Während COX und COCHRAN in ihrem Werk *Experimental Designs*<sup>1)</sup> sich eher auf die Versuchsansteller wandten, geht KEMPTHORNE mehr auf die theoretischen Grundlagen ein. Dementsprechend erläutern COX und COCHRAN die Verfahren an zahlreichen Beispielen, während sich KEMPTHORNE mit der Angabe der den Plänen zugrunde liegenden Formeln begnügt.

Das ausgezeichnete Werk von KEMPTHORNE ist vor allem für den beratenden Statistiker wertvoll; es ist aber auch allen jenen zu empfehlen, die sich der Bedeutung einer zweckmässigen Anlage von Versuchen in der reinen und angewandten Forschung bewusst sind.

A. Linder

<sup>1)</sup> Siehe die Besprechung in ZAMP 2, 53 (1951).



**Hochfrequenztechnik und Weltraumfahrt.** Herausgegeben im Auftrage der Gesellschaft für Weltraumforschung e. V. von Dr. Ing. R. MERTEN (V. S. Hirzel, Zürich 1951). 116 S., 65 Abb.; sFr. 7.—

Das von R. MERTEN im Auftrage der Gesellschaft für Weltraumforschung herausgegebene Heft *Hochfrequenztechnik und Weltraumfahrt* enthält acht Beiträge, die im Januar 1951 im Rahmen der 4. Jahreshauptversammlung der genannten Gesellschaft herausgegeben wurden. Nach Autoren und Themen aufgeführt, handelt es sich um: W. MINGER, *Weltraumfahrt und Ionosphäre*; H. DÖRING, *Stand der Zentimeterwellentechnik*; W. STEPP, *Die Reichweite von Funkmessgeräten*; G. ULBRICHT, *Funknavigation mit Zentimeterwellen*; F. W. GUNDLACH, *Grundsätzliches über Antennen an Raumfahrzeugen*; KIRSCHSTEIN, *Die Steuerung von Raumschiffen und ihre Stabilisierung*; R. MERTEN, *Funkverbindungen mit der Aussenstation*; R. MOSCH, *Geschwindigkeitsmessungen nach dem Dopplerprinzip und ihre Anwendung für Flugweitenmessungen und Bahnvermessungen*. In ihrer Gesamtheit ergeben diese Beiträge eine wertvolle Übersicht über die elektrischen Probleme der Fernsteuerung von Raketen bzw. von Raumschiffen, allerdings indem oft auf Einzelheiten der theoretischen Behandlung oder nähere Angaben von Schaltungen verzichtet wird. Die Betrachtung vor allem auf die grundsätzlichen Fragen gerichtet ist. Viel wertvolles entstammt früheren Forschungsarbeiten über die V-2-Technik. Die weitgehenden Spezialisierung der heutigen technischen Wissenschaft ist zweifellos ein verdienstliches Unternehmen, wenn – wie in der vorliegenden Veröffentlichung – die Möglichkeit geboten wird, die Gesamtheit der Teilaufgaben in ihrer ausserordentlichen Vielgestaltigkeit kennenzulernen, welche mit modernen technischen Problemen – hier mit der Fernsteuerung von Raumfahrzeugen auf grösste Distanzen – verknüpft sind. Solche Probleme können überhaupt nur auf der Grundlage der Spezialisierung und bestorganisierter Zusammenarbeit gelöst werden. Das kleine, gut ausgestattete Werk sei Ingenieuren und Physikern, welche sich für die hochfrequenztechnischen Fragen der Weltraumfahrt interessieren, bestens empfohlen.

F. T.

**Advances in Electronics.** Vol. III, Edited by L. MARTON (Academic Press, New York, 1951). 357 pp., 118 figs.; \$7.50.

Der dritte Band der von L. MARTON herausgegebenen Bücherreihe *Advances in Electronics* enthält wiederum eine Reihe von zusammenfassenden Berichten, welche sich einerseits mit den Fortschritten auf dem Gebiet der Elektronenröhren, andererseits mit einzelnen Fragen prinzipieller Art aus dem Gebiete der Nachrichtenwesens befassen.

Im ersten Beitrag, *Field Emission Microscopy*, beschreibt F. ASHWORTH das Feldelektronenmikroskop und die damit gewonnenen Aufschlüsse über Adsorptionsverhältnisse von Fremdatomen auf Einzelkristallen von Wolfram und Molybdän. Das theoretisch erwartete Auflösungsvermögen ist mit etwa 20 Å erreicht worden, und es ist bereits möglich gewesen, den ungefähren Aufbau einzelner adsorbierter Moleküle abzubilden. Der weitere Beitrag *Velocity Modulated Tubes* von R. R. WARNECKE, M. CHODOROW, P. R. GUENARD und L. GINTON gibt eine ausgezeichnete Übersicht über die verschiedenen Formen geschwindigkeitsmodulierten Röhren, über ihre Verwendungsmöglichkeiten, über die Schwierigkeiten, welche bei der Weiterentwicklung nach höheren Frequenzen und höheren Leistungen zu überwinden sein werden. Während die röhrenartige Behandlung von geschwindigkeitsmodulierten Röhren noch relativ einfach ist, hat die theoretische Erfassung der im Magnetron herrschenden

nisse auf grosse Schwierigkeiten geführt. In den beiden Beiträgen von L. BRILLOUIN (*Electronic Theory of the Plane Magnetron*) und von L. BRILLOUIN und BLOCH (*Electronic Theory of the Cylindrical Magnetron*) wird die Theorie des Magnetrons um ein gutes Stück weitergeführt. J. E. WHITE berichtet im Beitrag *The Miniaturization* über die Entwicklung, welche zur Herabsetzung der Röhrendimensionen (Kolbendurchmesser weniger als 1 cm) geführt haben. Die durch Grössenbeschränkung neu auftauchenden Anforderungen an Material und Konstruktion werden besprochen. Die fabrikmässige Herstellung solcher Röhren hat es ermöglicht, bei Verwendung passender Einzelteile und neuer Drahtungsmethoden auch die entsprechenden Geräte selber in ihrer Grösse stark herabzusetzen. Dies wird im Beitrag von G. SHAPIRO, *Subminiaturization Techniques*, an Hand von zahlreichen Beispielen gezeigt. In *Principles of Pulse Modulation* bespricht H. F. MAYER die neueste Form der heute bekannten Modulationsarten, welche – allerdings auf Kosten einer grösseren Bandbreite – eine erstaunliche Störfreiheit ermöglicht. Der Beitrag von E. A. GUILLEMIN, *Summary of Modern Methods of Network Synthesis*, beschäftigt sich mit der Berechnung von Netzwerken mit vorgegebenen Eigenschaften, während M. LEIBMAN und W. F. SCHREIBER im Beitrag *Communication Theory* allgemeine Fragen technischer Art besprechen, deren Behandlung in den letzten Jahren zu einer neuen Betrachtungsweise über das Wesen und die Möglichkeiten der Nachrichtenübermittlung geführt haben.

Auch in dem vorliegenden Band hat es der Herausgeber verstanden, durch eine glückliche Wahl seiner Mitarbeiter und durch Koordinierung der einzelnen Beiträge ein Werk zu schaffen, welches jeder, der sich über die Fortschritte der Elektronik orientieren will, mit Gewinn zur Hand nehmen wird.

Einzig zur Aufnahme der beiden Arbeiten über die Theorie des Magnetrons hätte der Referent einen Vorbehalt machen. So wertvoll diese beiden Publikationen an sich auch sind, so stellen sie doch zwei ins einzelne gehende Originalarbeiten dar, welche in eine Fachzeitschrift gehören. Die Aufnahme derartiger Beiträge bringt aber die Gefahr mit sich, dass die «Advances» ihrer eigentlichen Zweckbestimmung entfremdet werden. Und das müssten die zahlreichen Freunde, welche die «Advances» in der kurzen Zeit seit Beginn ihres Erscheinens erworben haben, sehr bedauern.

A. A. Rusterholz

**Helicopter Analysis.** By A. NIKOLSKY (John Wiley & Sons, New York, 1951). 340 pp.; \$7.50.

Das vorliegende Buch ist aus einer zweisemestrigen, für «graduate students» der Princeton University gehaltenen Vorlesung hervorgegangen und ist auch in seinem ganzen Aufbau nach vor allem als Lehrbuch gedacht. Dieser Bestimmung entsprechen auch die zahlreichen ausgerechneten Beispiele, die Aufgaben und die reiche Literaturhinweise.

Zum leichteren Verständnis sind die behandelten Probleme in einen ersten, physikalischen, und einen zweiten, mathematisch schwierigeren Teil aufgeteilt.

Nach einer kurzen Zusammenfassung der Luftschraubentheorie behandelt der erste Teil den stationären vertikalen und Vorwärtsflug des Helikopters mit einer kurzen Untersuchung der Bewegung der Rotorblätter.

Der zweite Teil ist eingeleitet durch das Kapitel: «Mathematical Analysis of Problems in Dynamic Stability», welches eine umfassende Darstellung des zur Lösung dynamischer Stabilitätsprobleme notwendigen mathematischen Apparats bringt. Es handelt sich hierbei um die Auflösung von Systemen linearer Differentialgleichungen, welche der Autor sowohl durch die übliche Methode als

auch mit Hilfe der Laplace-Transformation durchführt. Dieses Kapitel stellt eine willkommene Ergänzung der vorhandenen Literatur über die dynamische Stabilität von Flugzeugen dar.

Im weiteren werden im zweiten Teil die gewonnenen Resultate auf die Untersuchung der dynamischen Stabilität des Helikopters in der Nähe des Schwebfluges und im Vorwärtsflug sowie auf die Berechnung der Reaktion des Helikopters auf die Steuerkräfte angewendet.

Der Anhang enthält Resultate einer vertieften Untersuchung der gleichen Probleme mit Berücksichtigung der zweiten Harmonischen, Verwindung des Rotorblattes und dreieckförmiger Verteilung der induzierten Geschwindigkeit.

Eine Zusammenstellung von verallgemeinerten Gleichungen zur Lösung verschiedener Arten von transformierten Funktionen der Steuerreaktionen, genaue Beschreibungen von Rechengängen und die Aufstellung von Rechenschablonen, die auch ungelernte Arbeitskräfte auswerten können, machen die *Helicopter Analysis* auch für die Praxis äusserst wertvoll.

K. Remen

**Mathematische Maschinen und Instrumente.** Von F. A. WILL (Akademie-Verlag, Berlin 1951). 318 S., 258 Abb.; DM 34.—

Das Buch gibt eine Einführung in das Gebiet der heute verwendeten Rechenhilfsmittel, wobei neben den klassischen Geräten auch moderne elektrische und elektronische Vorrichtungen berücksichtigt sind. Nach einem kurzen Abschnitt über Rechenschieber folgt ein Kapitel über Handrechenmaschinen, in welchem die verschiedenen Systeme sowie zahlreiche Ausführungsformen beschrieben sind. Das folgende Kapitel über programmgesteuerte Rechengерäte gibt eine Übersicht über mehrere im Betrieb befindliche Rechenautomaten, eine Beschreibung der heute üblichen Speicherverfahren sowie Hinweise auf die Rechenpufferfertigung. Ein Kapitel ist den Vorrichtungen zum Zeichnen und Messen von Kurven gewidmet, ein weiteres den Planimetern, deren viele verschiedene Ausführungsformen erläutert sind. Das nächste Kapitel beschreibt harmonische Analysatoren, das folgende Integratoren und Integratoren; schliesslich folgt eine Erläuterung der Differentialgleichungsmaschinen (Integrieranlagen), wobei Einzelteile beschrieben und Schaltungsbeispiele gegeben sind.

Durchweg stellt man eine überaus sorgfältige Ausarbeitung des Stoffes fest, die vielen Photographien und Zeichnungen tragen zur Anschaulichkeit bei. Das Werk wird vervollständigt durch ein Literaturverzeichnis mit gegen 900 Titeln und durch ein alphabetisches Sachregister. Es kann als Lehrbuch in Studium und Praxis wie auch als Nachschlagewerk bestens empfohlen werden. A. P. Spe

**Review of Electronic Digital Computers** (American Institute of Electrical Engineers, New York 1952). 114 pp., 103 Figs.; \$3.50.

Diese Schrift gibt die 19 Vorträge wieder, welche an der «Joint AIEE-IREE Conference» in Philadelphia im Dezember 1951 gehalten wurden und welche sich mit den konstruktiven und betrieblichen Gesichtspunkten programmgesteuerter Rechenmaschinen befassen. Insgesamt sind 11 Rechenmaschinen beschrieben und zwar ausschliesslich solche, die sich in praktischem Betrieb bereits bewährt haben. Die Beschreibungen selbst sind summarisch gehalten. Dafür sind ausführliche Daten in bezug auf Betriebssicherheit, Fehlerquellen und deren Behebung gegeben; dadurch unterscheidet sich die Schrift wohltuend von den meisten anderen Publikationen ihrer Art und stellt für den Praktiker eine der nützlichsten und schlagigen Neuerscheinungen dieses Jahres dar.

A. P. Spe

# Methodik der Berechnung von Regulierungen

Servotechnik

VON HEINRICH E. WEBER, ETH., Zürich

## INHALT

Einleitung . . . . .	233
Begriffe . . . . .	234
Stabilitätsbetrachtung . . . . .	237
Massnahmen zur Verbesserung der Übertragungsfunktion . . . . .	244
Frequenzgang des geschlossenen Systems . . . . .	247
Einschwingvorgang des geschlossenen Kreises . . . . .	249
Berücksichtigung der Störungen . . . . .	250
Zusammengesetzte Reguliersysteme . . . . .	251
Bestimmung der Übertragungsfunktion eines Elementes . . . . .	254
Einfluss einer endlichen Laufzeit im offenen Kreis . . . . .	256

## 1. Einleitung

Die Regulierung ist ein Produkt des technischen Zeitalters. Sie wurde aber erst entwickelt, als es notwendig wurde, den Menschen für die Überwachung eines maschinellen Vorganges zu ersetzen. So entstand zuerst die Tourenzahlregulierung der Kolbendampfmaschine mittels des Fliehkraftpendels in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts. Die Starkstromtechnik bedurfte weiterer selbsttätiger Überwachungseinrichtungen, wie Spannungsregler, Leistungsregler und andere mehr. In der Folge wurden immer mehr Vorgänge vollautomatisiert, zum Beispiel Glühbehandlung nach einem vorgegebenen Programm im Fabrikationsprozess, selbsttätige Kurshaltung eines Schiffes oder Flugzeuges (Autopilot), automatische Dämpfungsregulierung eines Übertragungssystems. Das sind nur drei von vielen Beispielen. In jedem Gebiet waren Spezialisten mit der Berechnung und Entwicklung der besondern Regulierungsprobleme beschäftigt. Stabilitätsfragen mussten im Zusammenhang mit der Differentialgleichung des vollständigen Systems diskutiert werden. Dies erforderte die Kenntnis der Lösungen der charakteristischen Gleichung. Von STODOLA, der das Regulierungsproblem bei der in Entwicklung begriffenen Dampfturbine bearbeitete, angeregt, gelang es HURWITZ Kriterien aufzustellen, mit denen entschieden werden konnte, ob eine charakteristische Gleichung nur Lösungen mit negativen Realteilen enthalte oder nicht. Im ersten Fall ist das System stabil. Die Berechnung der Lösungen ist aber schon bei einfachen Systemen



langwierig und undurchsichtig. Erst mit der Abstraktion, dass jeder zeitliche Vorgang durch eine Superposition unendlich vieler und unendlich kleiner exponentiell zu- oder abnehmender Sinusschwingungen dargestellt werden kann, gelang eine Algebraisierung der Berechnung von solchen Problemen. Die Fernmeldetechnik war schon von Anfang an genötigt, mit Frequenzspektren rechnen. Es ist deshalb gut zu verstehen, warum die bedeutendsten Beiträge gerade von dieser Seite kamen (HEAVISIDE, CARSON, K. W. WAGNER, C. BELL, NYQUIST, BODE, KÜPFMÜLLER). Dank der heute vorhandenen allgemeinen Methodik sollte es jedem Ingenieur möglich sein, seine speziellen Regelprobleme lösen zu können.

## 2. Begriffe

Unter einer Regulierung (in Deutschland Regelung) versteht man eine Einrichtung, welche selbsttätig dafür sorgt, dass eine gewünschte Grösse (Spannung, Temperatur, Druck, Drehzahl, Winkel, Drehmoment, Menge usw.) fortlaufend mit einem Sollwert verglichen wird und bei einer Störung einen solchen Vorgang auslöst, dass die Abweichung in vorgeschriebene Grenzen zurückgeführt wird. Aus dieser Definition ergibt sich das allgemeine Prinzipschema einer Regulierung (Figur 1).

Meist handelt es sich darum, dass die Regulierung in einem bestimmten Bereich der regulierten Grösse wirksam sein soll. Der Zusammenhang zwischen dem Istwert und dem Fehler ist in sehr vielen Fällen nichtlinear. Um trotzdem

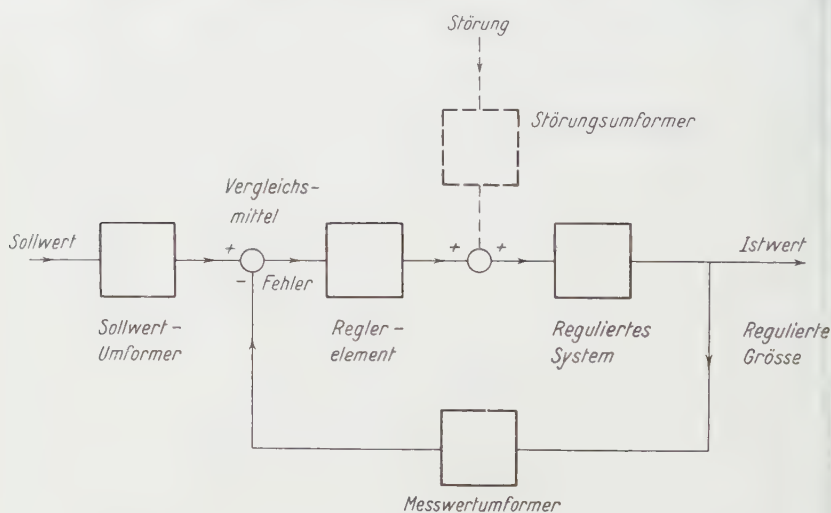


Fig. 1

Allgemeines Schema einer Regulierung.

Die Regulierung mathematisch behandeln zu können, werden nur kleine Störungen betrachtet. Selbstverständlich ist die Betrachtung über den ganzen Regulierungsbereich auszudehnen. Der Regulierungsvorgang selbst ist ein zeitlicher Ablauf, der bei linearen Systemen aus der Frequenzcharakteristik und der gegebenen Störfunktion berechnet werden kann. Sind verschiedene Störfunktionen (Eingänge) vorhanden, so addieren sich die Wirkungen auf den Istwert. Für den Eingang (Sollwert, Störung) lässt sich das Schema der Figur 1 auf dasjenige der Figur 2 reduzieren, wobei die komplexen Übertragungsfunktionen

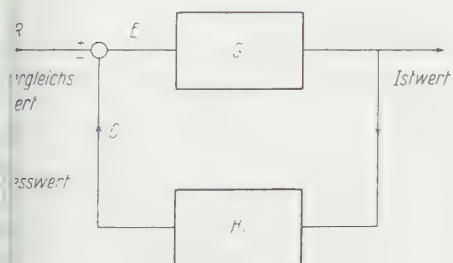


Fig. 2

Vereinfachtes Schema einer Regulierung.

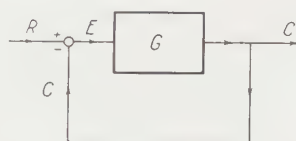


Fig. 3

Einfachste Form einer Regulierung.

$R$  Vergleichswert (Reference Input);  $E$  Fehler (Error);  $C$  Messwert (Controlled Variable).

$G_1$  und  $G_1$  verschieden ausfallen, je nachdem der eine oder andere Eingang betrachtet wird. Das Produkt  $H_1 G_1$  wird aber in allen Fällen die gleiche Funktion ergeben. Betrachtet man den Messwert  $C$  als Ausgangsgrösse, so entsteht schliesslich das Schema der Figur 3, wobei  $G = H_1 G_1$ . Damit aber die regulierte Grösse den gewünschten Verlauf nimmt, muss der Messwertumformer genau proportional sein, wobei das Auftreten bestimmter Zeitkonstanten im allgemeinen nicht vermieden werden kann.

Die drei Grössen  $R$ ,  $E$  und  $C$  sind die Zeiger von sinusoidalen Zeitfunktionen mit der Frequenz  $\omega$ .  $G$  ist die komplexe Übertragungsscharakteristik des aufgeschnittenen Kreises:

$$C(p) = E(p) G(p), \quad (\text{für } p = j\omega) \quad (1)$$

$$E(p) = R(p) - C(p), \quad (2)$$

$$C(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} R(p) = M(p) R(p), \quad (3)$$

$$M(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}. \quad (4)$$

$M$  ist die komplexe Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises. Sie kann



aber auch als Frequenzspektrum einer zeitlichen Funktion  $m(t)$  aufgefasst werden, die sich dann ergäbe, wenn als Zeitfunktion des Sollwertes die Impulsfunktion  $\delta(t)$  gewählt würde. Bei einer beliebigen, vorgegebenen Zeitfunktion  $r(t)$  des Sollwertes  $r(t)$  kann der zeitliche Ablauf des Messwertes  $c(t)$  und damit verknüpft der Istwert der regulierten Grösse berechnet werden aus dem Faltungsintegral

$$c(t) = m(t) * r(t) = \int_0^t m(\tau) r(t - \tau) d\tau,$$

$$m(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} M(p) e^{pt} dp.$$

$m(t)$  darf nur abklingende exponentielle Glieder aufweisen (Stabilitätsbedingung).

Beim Entwurf einer Regulierung sind folgende Punkte zu beachten [1]<sup>1)</sup>

- a) Vollständige Darstellung der gewünschten Bedingungen, wie Regulierungsbereich, maximal zulässige Abweichung des Istwertes vom Sollwert bei allen möglichen Störwerten, zeitlicher Ablauf des Regulierungsvorganges bei plötzlicher Änderung des Sollwertes und von Störwerten.
- b) Die Bedingungen unter a) müssen in einer Frequenzcharakteristik  $M$  des geschlossenen Kreises ausgedrückt werden.
- c) Aus b) soll eine approximative Frequenzcharakteristik  $G$  des aufgeschnittenen Kreises abgeleitet werden können.
- d) Bestimmung der statischen und komplexen Übertragungscharakteristiken der einzelnen im Regulierkreis vorkommenden Organe, wie Motoren, Verstärker, Ventile, Messfühler usw., die bereits vorhanden sind.
- e) Auswahl der geeigneten, zusätzlich notwendigen Elemente, wie Verstärker, stabilisierende Netzwerke, Einführung weiterer Gegenkopplungen usw., damit die unter c) berechnete Frequenzcharakteristik  $G$  zustande kommt.
- f) Vereinfachen mit dem Ziel einer ökonomischen Lösung des Problems.
- g) Experimentelle Prüfung, insbesondere des zeitlichen Ablaufs der Regulierung bei plötzlichen Änderungen der verschiedenen Einflussgrößen.

Aus der modernen Anwendung der Regulierung hat sich eine gewisse Typisierung herausgeschält.

Typ 0: Eine konstante Abweichung  $E$  hat einen konstanten Istwert der regulierten Grösse zur Folge.

Typ 1: Eine konstante Abweichung  $E$  hat einen konstanten Wert der ersten zeitlichen Ableitung des Istwertes der regulierten Grösse zur Folge.

Typ 2: Eine konstante Abweichung  $E$  hat einen konstanten Wert der zweiten zeitlichen Ableitung des Istwertes der regulierten Grösse zur Folge.

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 259.

Da der Messwert proportional zum Istwert sein muss, kann diese Typisierung auch formelmässig zum Ausdruck gebracht werden:

$$p \rightarrow 0 \text{ in } G = \frac{C(p)}{E(p)}.$$

$$\text{Typ 0: } G(0) = K \quad (K = \text{Konstante}),$$

$$\text{Typ 1: } G(p) = \frac{K}{p},$$

$$\text{Typ 2: } G(p) = \frac{K}{p^2}.$$

Das statische Verhalten ( $p \rightarrow 0$ ) der Regulierung

$$M = \frac{G}{1+G} = \frac{1}{1+1/G}$$

ist infolgedessen bei Typ 0 charakterisiert durch eine dauernde Abweichung des Istwertes vom Sollwert, die um so kleiner wird, je grösser die Verstärkung  $K$  ist. Dagegen wird bei den übrigen Typen  $M \rightarrow 1$ , da  $1/G$  gegen Null strebt. Die Abweichung wird dann ebenfalls Null. Für Positionsservosysteme werden deshalb nur die Typen 1 und 2 verwendet.

Ferner wird zwischen kontinuierlicher und diskontinuierlicher Regulierung unterschieden. Die letztere kann in vielen Fällen durch Mittelwertbildung auf die erste zurückgeführt werden (zum Beispiel Tourenzahlregulierung an Kleinmotoren durch Fliehkraftunterbrecher). Besondere Vorsicht ist bei der experimentellen Ausmessung geboten. Um mit der Theorie vergleichbare Resultate zu erhalten, dürfen im allgemeinen nur kleine plötzliche Änderungen des Sollwertes vorgenommen werden. Ähnlich verhält es sich mit plötzlichen Änderungen der Störwerte, da im geschlossenen Kreis an einzelnen Organen Sättigungserscheinungen infolge von Übersteuerungen eintreten können. In der folgenden methodischen Betrachtung werden solche Sättigungserscheinungen nicht berücksichtigt.

### 3. Stabilitätsbetrachtung

Ausgehend von der Frequenzcharakteristik  $M(p)$  des geschlossenen Regelkreises bei genügend kleinen Änderungen der verschiedenen Grössen ist das Kriterium für Stabilität leicht anzugeben. Für jeden Pol von  $M$  muss  $\operatorname{Re}(p) < 0$  sein. NYQUIST[2] hat daraus ein allgemeines Kriterium für die Frequenzcharakteristik  $G(p)$  des aufgeschnittenen Kreises abgeleitet, damit der geschlossene Kreis stabil sei. Es lautet folgendermassen:

Hat die Funktion  $G(p)$   $n$  Pole in der rechten Halbebene von  $p$ , so muss die Abbildung der  $(j\omega)$ -Achse in der  $G$ -Ebene den Punkt  $-1 \pm j0$   $n$ -mal im

Gegenurzeigersinn umschlingen, wenn alle Frequenzen von  $-\omega$  bis  $+\omega$  durchlaufen werden, damit das System, charakterisiert durch  $M = G/(1+G)$ , stabil ist. Da für alle physikalisch realisierbaren Übertragungsfunktionen gilt:

$$\operatorname{Re} G(-j\omega) = \operatorname{Re} G(+j\omega) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} G(-j\omega) = -\operatorname{Im} G(+j\omega),$$

so liegen die Polstellen symmetrisch zur reellen  $p$ -Achse. Es genügt die Abbildung der positiven  $(j\omega)$ -Achse in der  $G$ -Ebene. Der Polstrahl vom Punkt  $-1 \pm j0$  zu dieser Ortskurve muss von  $\omega = 0$  bis  $\omega = +\infty$  den Winkel  $+(n/2) 2\pi = +n\pi$  überstreichen, damit das geschlossene System  $M$  stabil ist.

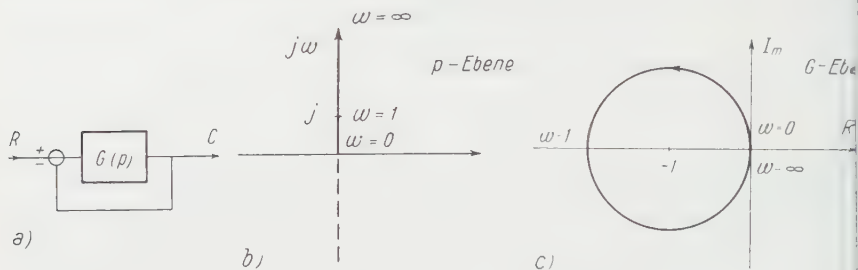


Fig. 4

Beispiel einer stabilen Regulierung, deren offener Kreis instabil ist.

$$G(p) = \frac{pK}{p^2 - 2\xi p + 1}, \quad M(p) = \frac{pK}{p^2 + (K - 2\xi)p + 1} = \frac{G}{1+G}$$

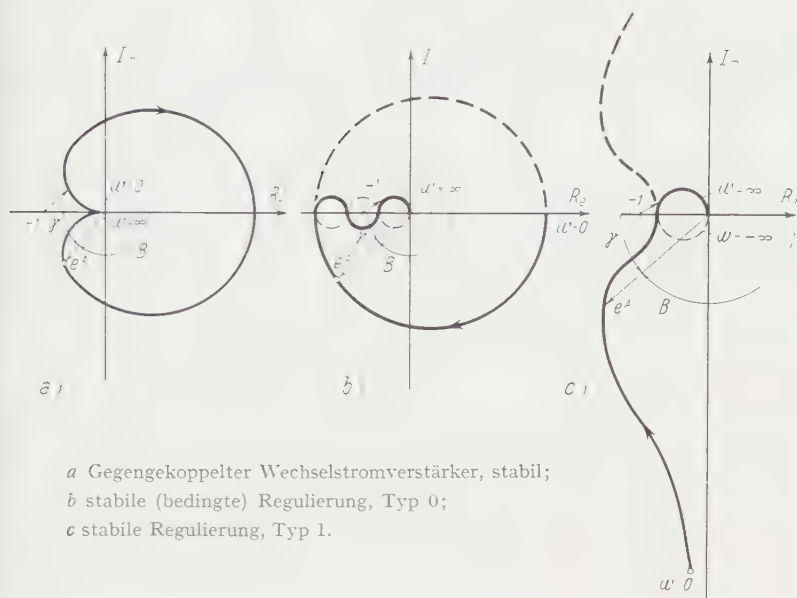
für  $\xi > 0$  offener Kreis instabil, für  $K - 2\xi > 0$  geschlossener Kreis stabil

Es kann also vorkommen, dass der aufgeschnittene Kreis instabil, der geschlossene Kreis dagegen stabil ist. Ein Beispiel dafür ist eine Anordnung nach Figur 4. Für Regulierungen kommen praktisch nur stabile offene Kreise in Frage, so dass das Stabilitätskriterium wesentlich einfacher gefasst werden kann. Weist  $G(p)$  keine Pole mit positivem Realteil von  $p$  auf, so genügt die Forderung, dass die Abbildung der  $(j\omega)$ -Achse auf die  $G$ -Ebene den Punkt  $-1 \pm j0$  nicht umschlingen darf, damit der geschlossene Kreis stabil sei, oder noch präziser, dass der Polstrahl vom Punkt  $-1 \pm j0$  nach der Ortskurve beim Durchlaufen von  $-\infty < \omega < +\infty$  eine totale Drehung von  $0^\circ$  erfährt (siehe Figur 5).

Die Abbildung der  $(j\omega)$ -Achse in die  $G$ -Ebene wird Nyquist-Diagramm genannt. Figur 5b zeigt einen Fall, der bei Verringerung der Verstärkung  $u$  stabil wird. Auch dies ist bei Regulierungen möglichst zu vermeiden.

Das Stabilitätskriterium vereinfacht sich dadurch auf folgende Forderung:

Der geschlossene Kreis ist stabil, wenn die Frequenzcharakteristik  $G(j\omega)$  des aufgeschnittenen Kreises bei allen Absolutwerten von  $G > 1$  eine kleine Phasendrehung als  $\pm 180^\circ$  aufweist.



- a Gegengekoppelter Wechselstromverstärker, stabil;  
 b stabile (bedingte) Regulierung, Typ 0;  
 c stabile Regulierung, Typ 1.

Fig. 5  
 Verschiedene Formen des Nyquist-Diagramms.

Der Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Absolutwertes und der Phase von  $G(j\omega)$  für realisierbare Frequenzgänge lieferte neuartige Berechnungsmethoden, welche das Stabilitätsproblem auf einfache Weise zu überblicken gestattet. BODES grundlegende Arbeiten [3], [4] zeigten dazu den Weg.

Die komplexe Übertragungsfunktion  $G$  kann durch ein komplexes Übertragungsmass dargestellt werden, das ebenfalls von der Frequenz abhängig ist. Das vereinfachte Stabilitätskriterium im komplexen Übertragungsmass ausgedrückt, lautet dann

$$\left. \begin{aligned} A = \ln |G| \geq 0, \quad -180^\circ < B < +180^\circ \\ A < 0, \quad B \text{ keine Beschränkung.} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Es hat sich als zweckmässig erwiesen, die Winkeldifferenz von  $B$  gegen  $-180^\circ$  als Phasenspielraum  $\gamma$  einzuführen.

Stabilität ist dann vorhanden, wenn gilt:

$$A \geq 0, \quad \gamma > 0, \quad A < 0, \quad \gamma \text{ beliebig;} \quad (9)$$

in Figur 5a und 5c erfüllt, in Figur 5b nicht erfüllt.

BODE untersuchte die Bedingungen, unter welchen sich eine eindeutige Zuordnung zwischen den reellen Funktionen  $A(\omega)$  und  $B(\omega)$  ergibt.  $A$  heisst Verstärkungsfunktion und  $B$  die Phasenfunktion. Bei gegebener Verstärkungsfunktion  $A$  kann die Phase  $B$  unter folgenden Voraussetzungen berechnet werden:

- $F(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ .  $F(p)$  darf in der rechten  $p$ -Halbebene keine Pole enthalten.
- Auf der  $(j\omega)$ -Achse dürfen nur solche Singularitäten vorkommen, die  $\lim_{p \rightarrow p_0} (p - p_0) F(p)$  zu Null wird.
- $F(p)$  soll im Unendlichen analytisch sein, das heisst

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0.$$

- Die Funktion  $F(p)$  soll im Nullpunkt und im Unendlichen durch folgende asymptotische Reihen darstellbar sein:

$$p \rightarrow 0 \quad F = A_0 + j\omega B_0 + A_1 \omega^2 + jB_1 \omega^3 - \dots,$$

$$p \rightarrow \infty \quad F = A_\infty + j \frac{B_\infty}{\omega} + \frac{A'_1}{\omega^2} + \frac{jB'_1}{\omega^3} + \dots$$

Diesen Bedingungen entspricht beinahe jede Übertragungsfunktion, insbesondere auch der Logarithmus davon, welche physikalisch realisierbaren Elementen zugeordnet sind. Gleichbedeutend mit den obigen Bedingungen ist die Forderung, dass sich das dynamische Verhalten des offenen Kreises in einer linearen Differentialgleichung endlichen Grades mit konstanten Koeffizienten ausdrücken lässt. Elemente, deren Verhalten mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden können, entsprechen nicht den genannten Voraussetzungen. Man kann ihr Verhalten näherungsweise berücksichtigen, wenn möglich ist, die partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche zu verwandeln. Physikalisch heisst das, Konzentrieren von homogen verteilten Eigenschaften.

Es gilt, wenn obige Voraussetzungen erfüllt sind,

$$B(\omega_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[A(\omega) - A_\infty] \omega_0 d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (1)$$

Bei Einführung einer logarithmischen Frequenzskala  $u = \ln(\omega/\omega_0)$  kann die Beziehung umgeformt werden auf

$$B(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dA}{du} \ln \left( \operatorname{ctgh} \frac{|u|}{2} \right) du \quad (2)$$

der

$$B(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{dA}{du} \right)_{u=0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{dA}{du} - \left( \frac{dA}{du} \right)_{u=0} \right] \ln \left( \operatorname{ctgh} \frac{|u|}{2} \right) du. \quad (12)$$

Da die Funktion  $\ln(\operatorname{ctgh}|u|/2)$  symmetrisch zu  $u=0$  mit wachsendem  $u$  rasch klein wird, liefert das erste Glied den Hauptbeitrag zur Grösse der Phase  $B$  bei der Frequenz  $\omega_0$ . Genügt die Übertragungsfunktion  $G(p)$  den vorstehenden Bedingungen, so ist sie eine rationale Funktion von der Form wie zum Beispiel

$$G(p) = \frac{K (1 + p T_1) (1 + p T_2)}{p (1 + p T_3 (1 + p T_4) (1 + p^2 T^2 + 2 \zeta T p))}. \quad (0 < \zeta < 1) \quad (13)$$

Die Verstärkungsfunktion

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) = \ln K + \ln |1 + j \omega T_1| + \ln |1 + j \omega T_2| - \ln |j \omega| \\ - \ln |1 + j \omega T_3| - \ln |1 + j \omega T_4| - \ln |1 - \omega^2 T^2 + 2 j T \zeta|. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Phase

$$\left. \begin{aligned} B(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T_1 + \operatorname{arctg} \omega T_2 - \frac{\pi}{2} \\ - \operatorname{arctg} \omega T_3 - \operatorname{arctg} \omega T_4 - \operatorname{arctg} \frac{2 \zeta T}{1 - \omega^2 T^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Wird der Frequenzmaßstab logarithmisch gewählt und sowohl  $A(\omega)$  wie  $B(\omega)$  aufgezeichnet, so erkennt man sogleich die Bedeutung des ersten Gliedes von Formel (12). Die Glieder  $A_v = \ln |1 + j \omega T_v|$  sehen alle gleich aus (Figur 6):

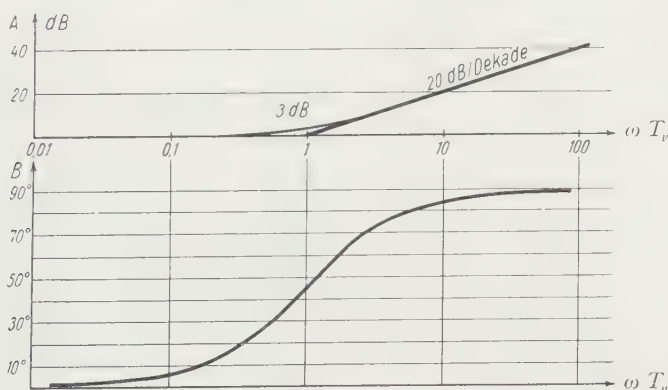


Fig. 6

Verstärkungs- und Phasenmass der Übertragungsfunktion  $1 + j \omega T_v$ .

$$F(j \omega) = A(\omega) + j B(\omega) = \ln (1 + j \omega T_v)$$



	$\omega T_v \ll 1$	$\omega T_v = 1$	$\omega T_v \gg 1$
$A_v$	0	$\ln \sqrt{2}$	$\ln \omega T_v$
$\frac{dA_v}{du}$	0	$\frac{1}{2}$	1

$A$  und  $u$  müssen im gleichen logarithmischen Mass ausgedrückt sein, zu Beispiel

$$A = \frac{1}{2} \ln (1 + \omega^2 T_v^2) \text{ in Neper (N)}$$

oder

$$A = 10 \log (1 + \omega^2 T_v^2) \text{ in Dezibel (db) ,}$$

dann

$$n = \ln \frac{\omega}{\omega_0}$$

oder

$$n = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 10 \text{ (1 Dekade)}, \quad u = 20.$$

Die Asymptote von  $A$  hat demnach die Steilheit von 20 db pro Frequenzdekade, und die dazugehörige Phase ist  $90^\circ$  für die Faktoren der einfachen Form  $(1 + p T_v)$ .

In erster Annäherung kann mit den Streckenzügen die Verstärkungsfunktion aufgezeichnet werden.

Die Beiträge

$$\ln |1 - \omega^2 T^2 + j 2 \zeta T \omega| \quad \text{und} \quad \arctg \frac{2 \zeta T \omega}{1 - \omega^2 T^2}$$

können der Figur 7 entnommen werden.

In Figur 8 wird eine Übertragungsfunktion  $G(p)$  durch die Verstärkungsfunktion  $A$  und die Phasenfunktion  $B$  vollständig dargestellt.

Bei der kritischen Frequenz wird  $A = 0$  oder  $B = \pm 180^\circ$ . Bei  $A = 0$  muss  $B$  weniger als  $180^\circ$  betragen oder bei  $B = \pm 180^\circ$  muss  $A$  negativ sein. Damit im Beispiel (Figur 8) der geschlossene Kreis stabil bleibt, darf die Erhöhung der Verstärkung nur wenige Dezibel betragen. Der Einfluss der Verstärkungsänderung ist aus dem Diagramm  $A(\omega)$  durch Verschieben der Nulllinie ersichtlich.

Aus der Bodeschen Beziehung [Formel (12)] lässt sich die Stabilitätsbedingung grob auch so ausdrücken, dass im Bereich  $A \geq 0$   $dA/du < 2$ , das heisst die Steilheit der Verstärkung kleiner als 40 db pro Frequenzdekade sein soll.

Die beschriebene Darstellungsart bietet gegenüber der herkömmlichen Art des Nyquist-Diagramms wesentliche Vorteile, besonders wenn es sich nur darum handelt, die Stabilität oder das dynamische Verhalten einer Regulierung mit zusätzlichen Mitteln zu verbessern.

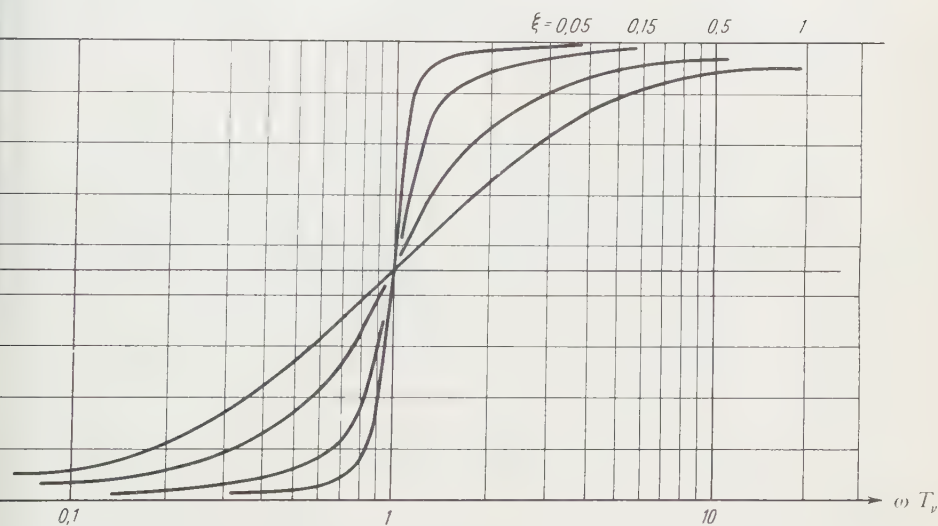
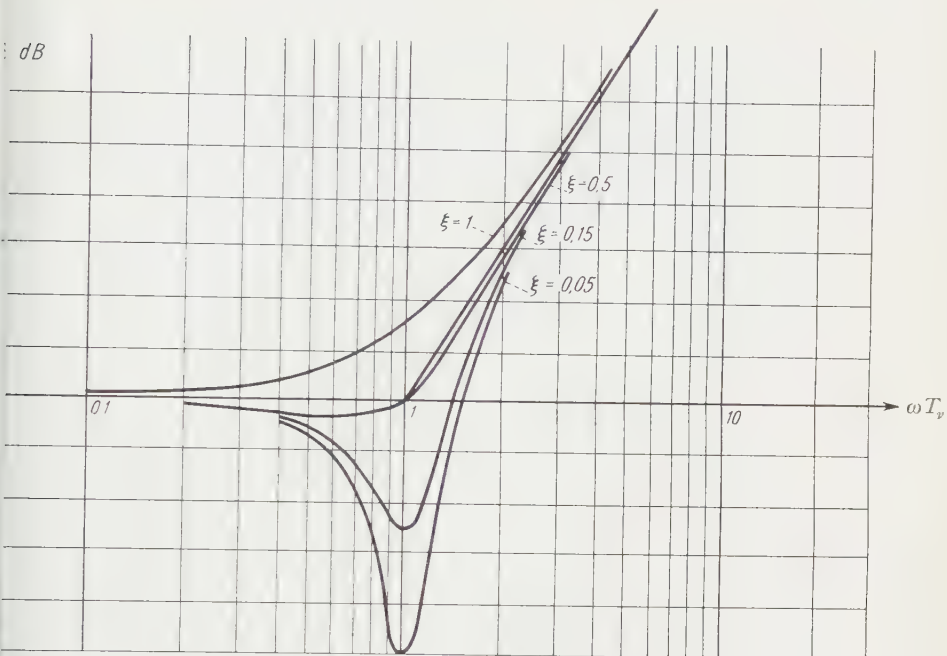


Fig. 7

Verstärkungs- und Phasenmass der Übertragungsfunktion  $1 - (\omega T)^2 + j 2 \omega T \xi$ .

$$F(j \omega) = \ln [1 - (\omega T_v)^2 + j \cdot 2 \omega T_v \xi]$$

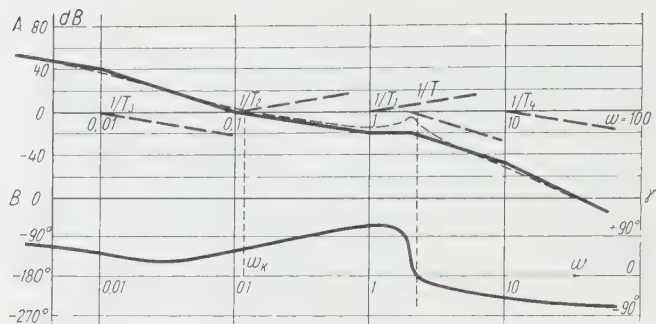


Fig. 8

Verstärkungs- und Phasenmass der Übertragungsfunktion  $G$ .

$$G(p) = \frac{(1 - p T_1)(1 - p T_2)}{p(1 - p T_3)(1 - p T_4)1 + 2\xi p T - (p T)^2}$$

mit  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 10$ ,  $T_3 = 100$ ;  $T = 0,5$ ,  $T_4 = 0,1$ ,  $\xi = 0,1$

#### 4. Massnahmen zur Verbesserung der Übertragungsfunktion

Durch vorhandene, in der Regulierung zu verwendende Organe ist die Übertragungsfunktion des offenen Kreises schon weitgehend bestimmt. In vielen Fällen könnte ohne zusätzliche Massnahmen die Stabilität nicht gewährleistet oder manchen Bedingungen des Pflichtenheftes nicht entsprochen werden. In folgenden Methoden, einzeln oder in Kombination angewandt, erlauben einschneidende Verbesserungen.

##### a) Korrektur durch Zuschaltung von Gliedern $H$ zur Kette $G_1$ (Figur 9)

Die gesamte Übertragungsfunktion  $G$  des offenen Kreises ist das Produkt  $G_1 H$ . In den Figuren 10 bis 12 sind verschiedene Möglichkeiten zusammengestellt, wie eine gegebene Funktion  $G_1$ , welche allein eine unstabile Regulierung ergäbe, so verbessert werden kann, dass der geschlossene Kreis stabil wird.

Am günstigsten wirken Glieder mit kombinierter Vor- und Nacheilung, die auch keine weiteren Verstärker nötig machen.

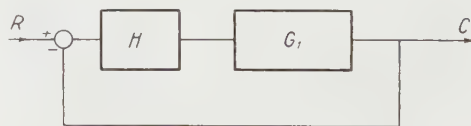


Fig. 9

Stabilitätsverbesserung durch Kettenschaltung von Korrekturgliedern zum  $G$ -Kreis.

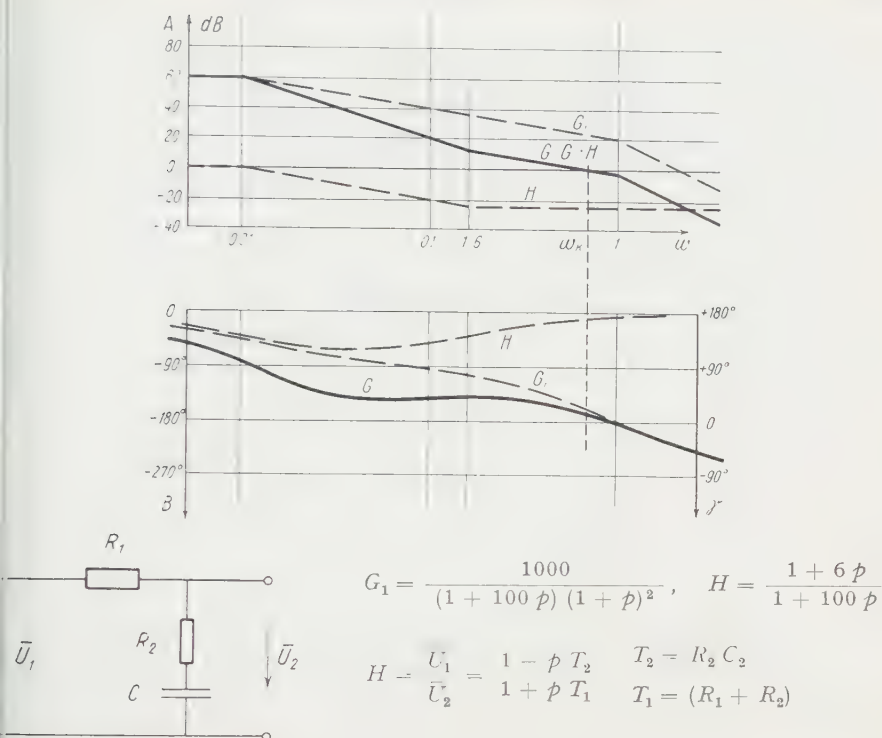


Fig. 10  
Wirkung eines Korrekturgliedes mit Phasennacheilung.

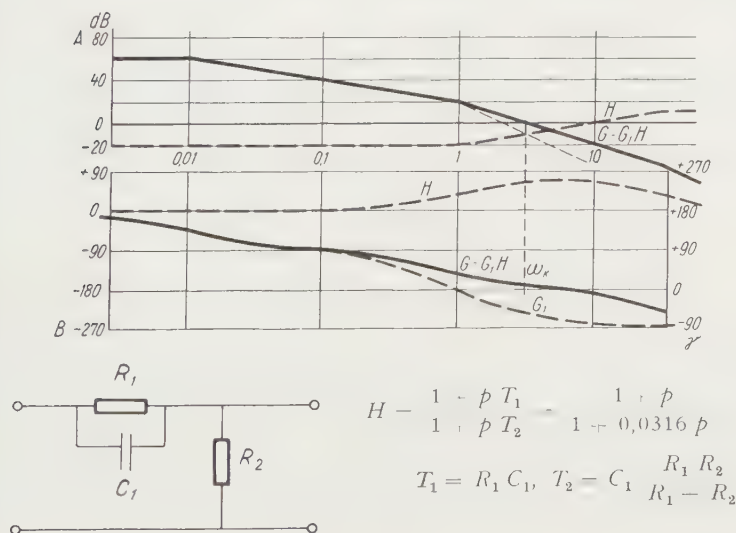


Fig. 11  
Wirkung eines Korrekturgliedes mit Phasenvoreilung.

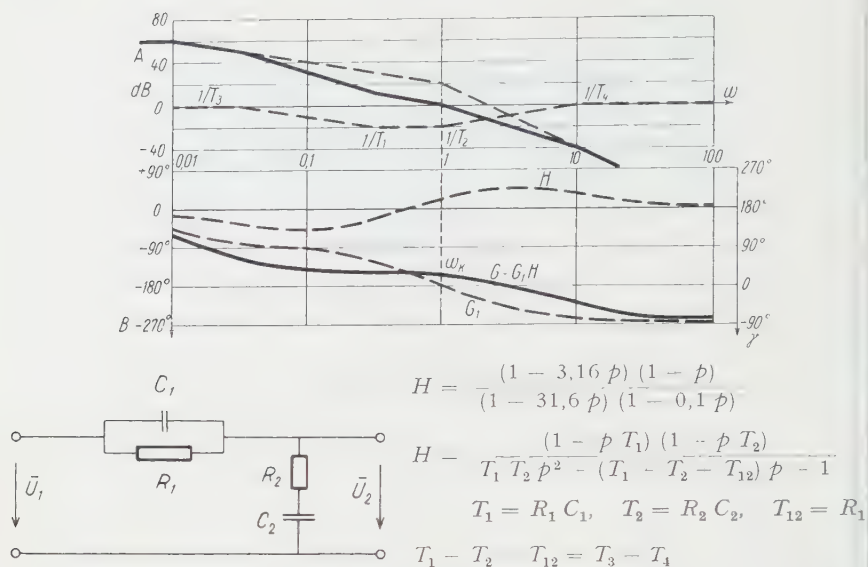


Fig. 12

Wirkung eines Korrekturgliedes mit kombinierter Phasennach- und -voreilung.

b) *Beeinflussung der Zeitkonstanten bei vorhandenen Elementen durch Einföhrung von Teilgegenkopplungen*

Ein Element habe die Übertragungsfunktion

$$G_1 = \frac{K_1}{1 + p T_1}.$$

Diesem Element wird eine Gegenkopplung mit dem konstanten Faktor  $H_1$  zugefügt.

Die neue Übertragungsfunktion  $G'_1$  des Elementes lautet dann

$$\left. \begin{aligned} G'_1 &= \frac{K'_1}{1 + p T'_1} = \frac{G_1}{1 + H_1 G_1} = \frac{K_1}{1 + p T_1 + H_1 K_1} \\ &= \frac{K_1}{1 + H_1 K_1} \cdot \frac{1}{1 + p \left( \frac{T_1}{1 + H_1 K_1} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$T'_1 = \frac{T_1}{1 + H_1 K_1} \quad \text{und} \quad K'_1 = \frac{K_1}{1 + H_1 K_1}.$$

Ist  $H_1 K_1 > 0$ , so wird  $T'_1 < T_1$  und  $K'_1 < K_1$ .

Die Verkleinerung des Faktors  $K_1$  muss unter Umständen in einem anderen Element kompensiert werden können, damit die Regulierung dem Pflichtenheft

entspricht. Die Verkleinerung einer der grossen Zeitkonstanten im Nenner der gesamten Übertragungsfunktion des offenen Kreises erlaubt das Verschieben des Gefällsbruches des Streckenzuges nach höhern Frequenzen und damit die Verkleinerung der Phase  $B$  bei der kritischen Frequenz. Diese selbst nimmt ebenfalls zu. Unter Umständen wird mit dieser Massnahme bereits eine stabile Regulierung erreicht.

### c) Korrektur durch eine zusätzliche Gegenkopplung über das ganze System

In Figur 3 bedeute die Übertragungsfunktion  $G$  selbst ein geschlossenes System entsprechend der Figur 2 (siehe Figur 13). Sie ist dann zugleich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises des vollständigen Systems. Dann ist

$$G = \frac{G_1}{1 + H_1 G_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{1}{1 + 1/(H_1 G_1)}, \quad (17)$$

$$|H_1 G_1| \gg 1, \text{ das heisst } |G_1| \gg \frac{1}{|H_1|} \text{ und } G \approx \frac{1}{H_1},$$

$$|H_1 G_1| \ll 1, \text{ das heisst } |G_1| \ll \frac{1}{|H_1|} \text{ und } G \approx G_1.$$

Die Übertragungsfunktion  $H_1 G_1$  soll ihrerseits die Stabilitätsbedingungen für den geschlossenen Kreis  $G$  erfüllen. In Figur 14 ist ein Beispiel einer solchen Stabilisierung dargestellt. In der Praxis wird von dieser Art viel Gebrauch gemacht.

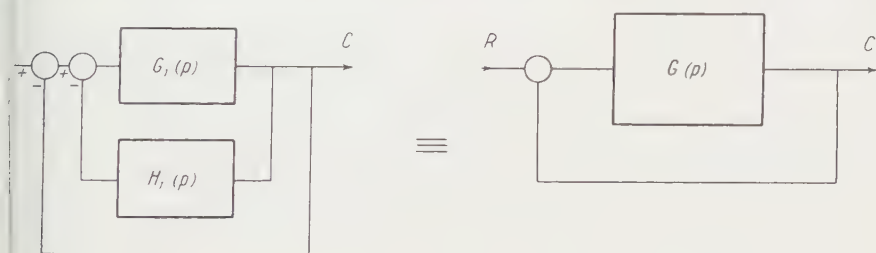


Fig. 13

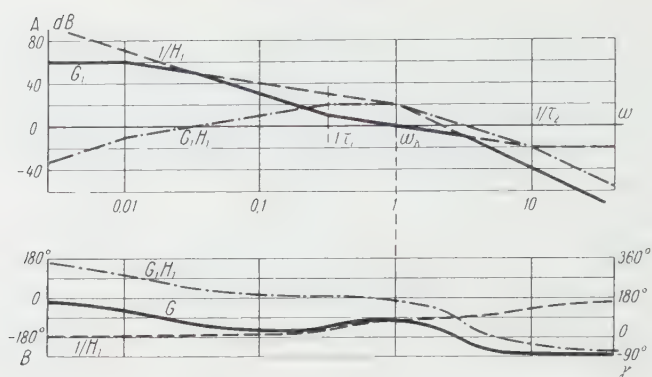
Stabilitätsverbesserung durch zusätzliche Gegenkopplung.

## 5. Frequenzgang des geschlossenen Systems

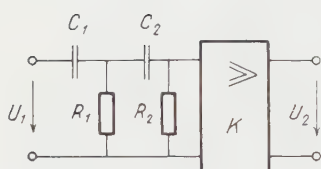
Nach Bestimmung einer Funktion  $G(p)$ , welche unsern Stabilitätsbedingungen für den geschlossenen Kreis entspricht, lässt sich nach Ausdruck (4)  $M(p)$  berechnen.  $G(p)$  ist eine rationale Funktion

$$G(p) = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)}, \quad (18)$$





$$H_1 = \frac{3,16 p^2}{(1 + 3,16 p) (1 + 0,1 p)}, \quad G_1 \text{ siehe Figur 9.}$$



$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{K T_1 T_2 p^2}{1 + p (T_1 + T_2 + T_{12}) + p^2 T_1 T_2} \\ &= \frac{K \tau_1 \tau_2 p^2}{(1 + \tau_1 p) (1 + \tau_2 p)} \\ T_1 &= R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad T_{12} = R_1 C_2 \end{aligned}$$

Fig. 14

Wirkung der zusätzlichen Gegenkopplung.

wobei  $P_n(p)$  und  $Q_m(p)$  Polynome vom Grade  $n$  und  $m$  in  $p$  bedeuten.  $n < m$

$$M(p) = \frac{P_n(p)}{P_n(p) + Q_m(p)}.$$

$P_n(p)$  und  $Q_m(p)$  liegen meist als Produktsummen vor in der Form

$$P_n(p) = K(p T_1 + 1) (p T_2 + 1) \cdots (p T_n + 1)$$

und

$$Q_m(p) = (p \tau_1 + 1) (p \tau_2 + 1) \cdots (p \tau_m + 1),$$

wobei Paare von konjugiert komplexen Zeitkonstanten vor allem im Polynom des Nenners auftreten können. Will man den Frequenzgang des geschlossenen Systems genau berechnen, so muss man die Lösungen des neuen Polynoms vom  $m$ -ten Grad  $P_n(p) + Q_m(p) = 0$  bestimmen, was unter Umständen eine große Rechenarbeit erfordert. Sofern  $|G(j\omega)| \gg 1$ , dann ist  $M(j\omega) = 1$ , das heißt die Gefällsbrüche des Streckenzuges  $A = \ln |G(j\omega)|$ , welche in diesem Gefällsbruch liegen, haben auf den geschlossenen Kreis einen sehr kleinen Einfluss, der

gemeinen vernachlässigt werden kann. Zeitkonstanten  $T$  des Polynoms  $P$ , die in diesem Gebiete liegen, müssen Zeitkonstanten  $\tau'$  des Polynoms  $P - Q = 0$  entsprechen ( $\tau' \approx T$ ). Im Gebiet, wo  $|G(j\omega)| \ll 1$ , ist  $M(j\omega) \approx G(j\omega)$ , das ist, diejenigen Faktoren von  $G$ , deren Zeitkonstanten in diesem Gebiete liegen, treten auch in der Funktion  $M$  des geschlossenen Systems auf. Damit können in beiden Fällen einige der Lösungen des Polynoms  $P - Q = 0$  angegeben werden, worauf mit bekannten Verfahren die genauen Lösungen eruiert und dann das Polynom im Grade stark reduziert werden kann. Die restlichen und wichtigsten Lösungen lassen sich nun leicht gewinnen. Wichtig sind sie deshalb, weil sie den Frequenzgang des geschlossenen Systems in der Umgebung der kritischen Frequenz bestimmen ( $A \approx 0$  und  $\gamma \approx 0$ ). Auf graphischem Wege bedient man sich der Nichols Charts [5], aus welcher sich bei gegebener Verstärkungsfunktion  $A(\omega) = \ln |G(j\omega)|$  und des zugehörigen Phasenspielraumes  $\gamma$  die Werte für  $\ln |M(j\omega)|$  und der Winkel von  $M(j\omega)$  bestimmen lassen.

## 6. Einschwingvorgang des geschlossenen Kreises

Aus dem Frequenzgang  $M(p)$  lässt sich der Einschwingvorgang bei einer plötzlichen Änderung des Sollwertes  $R$  durch Anwendung der inversen Laplace-Transformation berechnen.

$$r(t) = R_0 \cdot 1(t), \quad R(p) = \frac{R_0}{p}, \quad (20)$$

$$C(p) = R(p) M(p); \quad c(t) = L^{-1}[R(p) M(p)], \quad (21)$$

$$C(p) = \frac{R_0 M(p)}{p} = \frac{R_0 P_n(p)}{p [Q_m(p) + P_n(p)]}. \quad (22)$$

Aus  $Q + P = S$  und der Lösungen  $p_v = -1/\tau'_v$  für  $S(p) = 0$  findet man mit der Partialbruchzerlegung und Rücktransformation

$$c(t) = \frac{R_0 P(0)}{S(0)} + \sum_1^m \frac{R_0 P(p_v)}{\left(\frac{dS}{dp}\right)_{p_v}} e^{-t/\tau'_v}, \quad (23)$$

Vorausgesetzt, dass das System zur Zeit  $t = 0$  in Ruhe ist. Die wichtigsten Beiträge zum Einschwingvorgang liefern die Lösungen  $p_v$  nahe an der kritischen Frequenz. Es sind dies aperiodische und unter Umständen periodisch exponentiell abklingende Funktionen. Sofern der Frequenzgang  $M(j\omega)$  eine Überhöhung in der Nähe der kritischen Frequenz aufweist, so hat der Einschwingvorgang sicher periodischen Charakter, und die regulierte Grösse zeigt deshalb ein Überschwingen. Sehr oft werden in dieser Hinsicht Anforderungen gestellt in

Verbindung mit kurzer Einstellzeit und Genauigkeit, welche sich mit den gegebenen Elementen nicht erfüllen lassen. Da sich der Frequenzgang eines offenen Kreises relativ leicht überblicken lässt, sollten die Forderungen an den Einschwingvorgang eines geschlossenen Systems direkt in Forderungen an den Frequenzgang des offenen Kreises übersetzt werden können. CHESTNUT und MAYER haben dies im letzten Kapitel ihres Buches [1] mit Erfolg durchgeführt. Allerdings ist das Verfahren nicht sehr genau, da es sich nur einer graphischen Darstellung vieler berechneter Zuordnungen bedient. Für den Berechner eines Regulatorsystems ist es aber schon sehr wertvoll, einen angenäherten Frequenzgang des offenen Kreises als vorläufiges Ziel angeben zu können, wozu die genannten Kurvenkarten eine wertvolle Hilfe bedeuten.

## 7. Berücksichtigung der Störungen

Der Einfluss der Störungen auf die regulierte Grösse (Istwert) soll möglichst klein sein. Die Rechnung folgt dem bisher gezeigten Gang, wobei jedoch diejenigen Teile, die im Gegenkopplungsweg  $H_1$  des geschlossenen Kreises liegen, meist das Messwerk, den Verstärker und einen Teil des regulierten Systems umfassen ( $S$  = Störungsgrösse,  $C$  = regulierte Grösse)

$$C(p) = S(p) \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) H_1(p)}. \quad (23)$$

Ist keine Regulierung, also auch kein geschlossener Kreis vorhanden, so wird

$$C(p) = S(p) G_1(p). \quad (24)$$

Bei geschlossenem Kreis und unterhalb der kritischen Frequenz ist  $|G_1 H_1| \gg 1$ . Insbesondere bei  $p \rightarrow 0$ , das heisst bei einer plötzlichen Änderung der Störgrösse nach Abklingen des Einschwingvorganges, wird der Faktor

$$\left| \frac{1}{1 + G_1(0) H_1(0)} \right| < 1.$$

Beim Typ 0 bleibt eine Verschiebung der regulierten Grösse bestehen, den Typen 1 und 2 gibt es keine dauernde Veränderung von  $C$ , weil  $G_1 H_1$  bei  $p \rightarrow 0$  gegen Unendlich strebt.

(24) kann auch geschrieben werden:

$$C = \frac{S}{H_1} \cdot \frac{H_1 G_1}{1 + H_1 G_1} = S \frac{M}{H_1}. \quad (24')$$

Da sowohl  $M$  (siehe Abschnitt 4) als auch  $H_1$  rationale Funktionen von  $p$  sind, ist es ohne weiteres möglich, den Frequenzgang anzugeben und den Einschwingvorgang bei vorgegebener zeitlicher Störungsfunktion  $s(t)$  entweder

nach das analoge Faltungsintegral zu (5) oder via inverse Laplace-Transformation, wenn  $S(p)$  bekannt ist, zu berechnen.

Als Störungen treten insbesondere auf:

Lastschwankungen; zum Beispiel Veränderung des Lastdrehmomentes bei regulierter Tourenzahl.

Schwankungen von Grössen des Energiereservoirs; zum Beispiel bei elektrischen Antrieben, Netzspannungsschwankungen; bei thermischen Motoren

Druckschwankungen usf.

Veränderung des Verstärkungsgrades eines Teils des geschlossenen Kreises infolge Speisespannungsschwankungen, Alterung usf.

In den ersten beiden Fällen können es sehr rasch veränderliche Vorgänge sein, während es sich im Fall c) meist um zeitlich langsame Abläufe handelt.

Veränderungen der Übertragungsfaktoren nach c) werden wie folgt behandelt. Nach Figur 2 ist

$$C = R \frac{G_1}{1 + H_1 G_1}. \quad (25)$$

Veränderungen von  $G_1$  und  $H_1$  haben zur Folge:

$$\frac{\delta C}{C} = R \left( \frac{1}{1 + G_1 H_1} \cdot \frac{\delta G_1}{G_1} - \frac{H_1 G_1}{1 + G_1 H_1} \cdot \frac{\delta H_1}{H_1} \right). \quad (26)$$

für  $p \rightarrow 0$  wird

$$\frac{1}{1 + G_1 H_1} \ll 1, \quad \text{dagegen} \quad \frac{H_1 G_1}{1 + H_1 G_1} \approx 1.$$

Da sich der zweite Summand  $\delta H_1 / H_1$  voll auswirkt, müssen an das Messwerk hohe Anforderungen in bezug auf seine zeitliche Konstanz gestellt werden. Dagegen üben bloss Amplitudenänderungen von  $G_1$  kaum einen Einfluss auf das statische, aber unter Umständen einen erheblichen auf das dynamische Verhalten der Regulierung aus.

## 8. Zusammengesetzte Reguliersysteme

Ein Reguliersystem kann aus verschiedenen Teilreguliersystemen zusammengesetzt sein, wie zum Beispiel in Figur 15a gezeigt wird. Die Berechnung folgt dann sukzessive von innen nach aussen.

$$C_1 = R_1 \frac{G_1}{1 + H_1 G_1} = R_1 G'_1, \quad (27)$$

$$C = C_1 G_2 = R_1 G'_1 G_2, \quad (28)$$

$$C = R_2 \frac{G'_1 G_2}{1 + G'_1 G_2} = R_2 G''_1, \quad (29)$$

$$C = R \frac{G}{1 + G}, \quad \text{wobei} \quad G = G''_1 G_3. \quad (30)$$



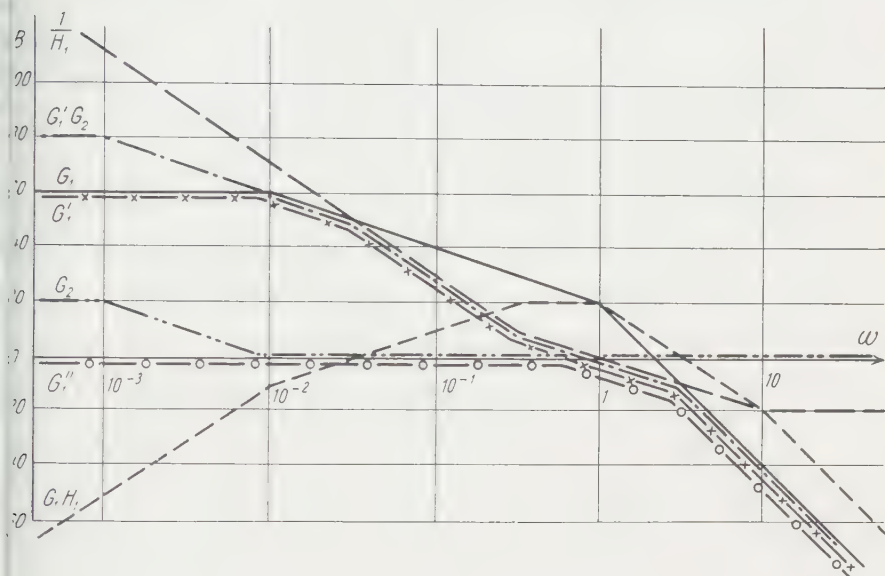


Fig. 16

Abschätzung der Wirkungsweise der Regulierung von Figur 15.

—	$G_1$		
— — —	$\frac{1}{H_1}$	$G_1 = \frac{1000}{(1 + 100 p)(1 + p)^2}$	$G'_1 = \frac{G_1}{1 + H_1 G_1}$
· · · · ·	$G_2$	$\frac{1}{H_1} = \frac{(1 + 3,16 p)(1 + 0,1 p)}{3,16 p^2}$	$G''_1 = \frac{G'_1 G_2}{1 + G'_1 G_2}$
× × ×	$G'_1$		
· · · · ·	$G'_1 G_2$	$G_2 = \frac{10(1 + 100 p)}{(1 + 1000 p)}$	
— — — — —	$G_1 H_1$		
○ — ○ —	$G''_1$		

Approximation  $G''_1 = \frac{1}{(1 + p)(1 + 0,316 p)^2}$

Approximation  $G'_1 = \frac{1}{(1 - p)(1 - 2 \xi T p - T^2 p^2)}$   $T = 0,316, \xi = 0,1$

Approximation  $G''_1 = \frac{(1 + 3,16 p)}{(1 + 2 \xi_1 T_1 p + T_1^2 p^2)(1 + 2 \xi_2 T_2 p + T_2^2 p^2)}$   
 $T_1 = 1,86, \xi_1 = 0,88, T_2 = 0,301, \xi_2 = 0,306$



## 9. Bestimmung der Übertragungsfunktion eines Elementes

*Beispiel.* Tourenzahlregulierung eines Gleichstromnebenschlussmotors mit Hilfe des Felderreglerstromes (Figur 17a). Als Störungsfunktionen treten an a) das Lastdrehmoment  $M_2$ ; b) die Batteriespannung am Anker  $U_2$ .

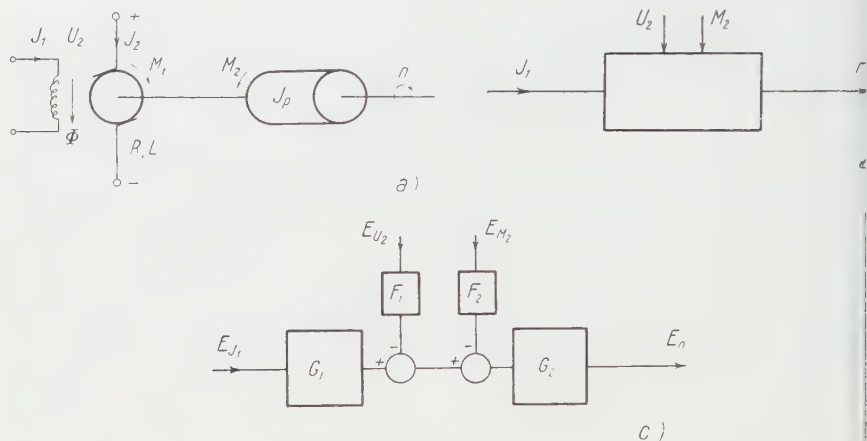


Fig. 17

Ersatzschema eines Nebenschluss-Gleichstrommotors.

Statische Verhältnisse:

Fluss der Erregerwicklung:

$$\Phi = K_1 I_1 \text{ (Ankerrückwirkung vernachlässigt),}$$

Motordrehmoment  $M_1$  (= Lastdrehmoment  $M_2$ ):

$$M_1 = M_2 = K_2 I_2 \Phi,$$

Klemmenspannung am Anker:

$$U_2 = I_2 R + K_3 \Phi n,$$

daraus die Tourenzahl

$$n = \frac{U_2 - I_2 R}{K_3 \Phi} = \frac{U_2}{K_1 K_3 I_1} - \frac{M_2 R}{K_2 K_3 K_1^2 I_1^2}.$$

Die Konstanten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  sind von  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $n$  und  $M_2$  abhängig und können nur bereichsweise als konstant angenommen werden. Die Tourenzahl ist eine nichtlineare Funktion der Eingangsgröße  $I_1$ . Auch hier ist nur eine

beschränkte Variation des Erregerstromes  $I_1$  zulässig, damit das Problem linearisiert werden kann.

Verkürzung:

$$K_1^2 K_2 K_3 = K,$$

$$n = \frac{U_2}{K_1 K_3 I_1} - K \frac{M_2}{I_1^2} \quad \text{Gleichgewichtsbedingung.} \quad (31)$$

Kleine Störungen aus der Gleichgewichtslage:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_{10} [1 + \varepsilon_{i1}(t)], & n &= n_0 [1 + \varepsilon_n(t)], \\ U_2 &= U_{20} [1 + \varepsilon_{U2}(t)], & I_2 &= I_{20} [1 + \varepsilon_{i2}(t)], \\ M_2 &= M_{20} [1 + \varepsilon_{M2}(t)], & M_1 &= M_{10} [1 + \varepsilon_{M1}(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Gleichungen:

$$\Phi = K_1 I_1. \quad (33)$$

Elektrischer Kreis:

$$U_2 = I_2 R + L \dot{I}_2 + K_3 \Phi n. \quad (34)$$

Bewegung der Achse:

$$2 \pi \dot{n} J_p = M_1 - M_2, \quad (35)$$

totales polares Trägheitsmoment bezogen auf die Motorachse,

$$M_1 = K_2 I_2 \Phi = K_1 K_2 I_1 I_2. \quad (36)$$

Werden die  $\varepsilon(t)$  als rein sinusoidale Schwingungen der Frequenz  $\omega = j p$  gewählt und bedeuten  $E_{\text{Index}}$  die zugehörigen Zeiger, so ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen die Gleichungen

$$U_{20} E_{U2} = I_{20} E_{i2} (R + p L) + K_3 K_1 I_{10} n_0 (E_{i1} + E_n), \quad (34a)$$

$$M_{10} E_{M1} = 2 \pi p J_p U_0 E_n + M_{20} E_{M2}, \quad (35a)$$

$$M_{10} E_{M1} = K_1 K_2 I_{20} I_{10} (E_{i1} + E_{i2}). \quad (36a)$$

Die Doppelprodukte  $E_{i1} E_n$  und  $E_{i1} E_{i2}$  werden vernachlässigt gegenüber den anderen Gliedern. Man erhält als Ausgangsgrösse bzw. deren relativer Wert  $E_n$  die Funktion der relativen Werte des Erregerstromes  $E_{i2}$  und der Störungen  $E_{U2}$ .

und  $E_{M2}$  den Ausdruck (37)

$$\left. \begin{aligned} E_n &= \frac{E_{i1} K' (p \tau_1 + 1) - E_{M2} M_{20} (1 + p T_1) - E_{U2} K''}{K''' [p T_2 (p T_1 + 1) + 1]}, \\ K' &= K_1 K_2 I_{10} I_{20} - \frac{I_{10}^2 n_0}{K}; \quad K'' = \frac{K_1 K_2 I_{10} U_{20}}{R}; \\ K''' &= \frac{I_{10}^2 n_0}{K}; \quad T_1 = \frac{L}{R}; \quad T_2 = \frac{2 J_p K}{I_{10}^2}; \\ \tau_1 &= \frac{L}{R} \cdot \frac{K_1 K_2 I_{10} I_{20}}{K_1 K_2 I_{10} I_{20} - (I_{10}^2 n_0 / K)}. \end{aligned} \right\}$$

In der Figur 17c bedeutet nun:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{K'}{K'''} (p \tau_1 + 1), \quad F_1 = \frac{K''}{K'''}, \\ F_2 &= \frac{M_{20}}{K'''} (1 + p T_1), \quad G_2 = \frac{1}{[p T_2 (p T_1 + 1) + 1]}. \end{aligned} \right\}$$

Alle diese Übertragungsfunktionen sind dimensionslos und beziehen sich auf den Zusammenhang der relativen Änderungen der Eingangsgrösse  $I_1$ , der Störungsgrössen  $U_2$  und  $M_2$  mit derjenigen der Ausgangsgrösse  $n$ .

Daneben muss die statische Gleichgewichtsbedingung (31) erfüllt sein. Soll die Regulierung ein breites Gebiet umfassen, dann ist es erforderlich, die obigen Funktionen für alle in Frage kommenden Gleichgewichtslagen neu zu bestimmen. Die zusätzlichen Verstärker, Tachometerdynamo usf. müssen dann den ganzen verlangten Regulierbereich solche Übertragungsfunktionen ergeben, dass der geschlossene Kreis in allen Fällen stabil ist.

## 10. Einfluss einer endlichen Laufzeit im offenen Kreis

Eine endliche Laufzeit  $\tau$  kann in einer Übertragungsfunktion durch den Faktor  $\exp(-p \tau)$  berücksichtigt werden. Die bisher beschriebenen Methoden müssen mit Vorsicht angewandt werden, da die im Abschnitt 2 vorausgesetzten Bedingungen nicht mehr erfüllt sind. KÜPFMÜLLER behandelt in verschiedenen Veröffentlichungen [6] diesen Sonderfall, der sehr oft in der Praxis auftritt (zum Beispiel Schalldruckregelung in einem freien Schallfeld; Leistungsregelung von Generatoren auf Grund fernübertragener Messwerte). Im Gegensatz zu dem in den vorigen Abschnitten Gesagten kann sich eine Störung auf die Ausgangsgrösse zunächst voll auswirken. Sie muss dann durch die Regulierung sukzessive auf den ursprünglichen Wert zurückgeführt werden, wenn sie stabil arbeitet.

In vielen Fällen aber wird der gemeinsame Faktor im Nenner der Übertragungsfunktion (Ausgangsgrösse dividiert durch Fehlergrösse) für irgendeinen

gang mindestens eine Zeitkonstante von erheblicher Grösse aufweisen (Trägheit des zu regulierenden Systems). Mit andern Worten, die Ausgangsgrösse kann sich nicht sprunghaft ändern. Ist das zu regulierende System trägheitslos, so muss der Messkreis eine Zeitkonstante aufweisen, damit eine erhebliche Reglierwirkung (Verminderung der Störeinflüsse) überhaupt möglich ist. Anstelle der Betrachtung des Frequenzganges wird anschaulicher mit einer ver-

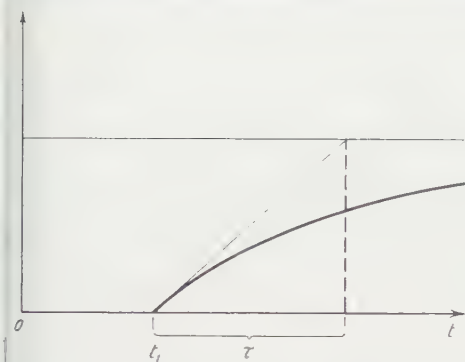


Fig. 18

Beispiel einer Sprungübergangsfunktion eines Systems mit endlicher Laufzeit.

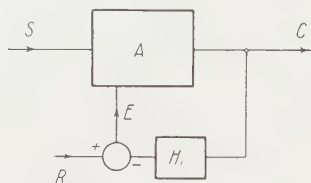


Fig. 19

Regulierung, bei der die Übertragungsfunktion  $A$  des Leistungsfusses eine Funktion der Abweichung ist.

infachten Sprungübergangsfunktion oder deren zeitlicher Ableitung, der Impulsübergangsfunktion, gearbeitet. Als einfacher Fall für die analytische Behandlung untersucht KÜPFMÜLLER die normierte Sprungübergangsfunktion des offenen Regelkreises

$$g(t) = 1 - e^{-(t - t_1)/\tau}, \quad t < t_1, \quad g(t) = 0. \quad (39)$$

Das Reglersystem sei nach Figur 19 aufgebaut.  $A$  sei eine Funktion von  $E = R - H_1 C$   
 $C = A S$  ( $S$  Quelle, Energiereservoir)

$$\delta C = \delta A S_0 + A_0 \delta S, \quad \delta A = \left( \frac{dA}{dE} \right)_{E_0} \delta E$$

Für  $R$  konstant:

$$\delta E = -H_1 \delta C, \quad \delta C = -S_0 H_1 \left( \frac{dA}{dE} \right)_{E_0} \delta C + A_0 \delta S$$

und daraus

$$\frac{\delta C}{C_0} = \frac{\delta S}{S_0} \cdot \frac{1}{1 + S_0 \left( \frac{dA}{dE} \right)_{E_0} H_1} = \frac{\delta S}{S_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{C_0}{A_0} \left( \frac{dA}{dE} \right)_{E_0} H_1}, \quad (40)$$

$$G = \frac{C_0}{A_0} \left( \frac{dA}{dE} \right)_{E_0} H_1 = K p L[g(t)] = K \frac{e^{-t_1 p}}{p \tau + 1}, \quad (4)$$

$$K = \frac{C_0}{A_0} \left( \frac{dA}{dE} \right)_{E_0} H_1(0). \quad (5)$$

In Anwendung früherer Prinzipien erkennt man leicht die Grenze der Stabilität für

$$|G| \leq 1, \quad \arg(G) \geq -\pi.$$

$$K = \sqrt{1 + \omega_0^2 \tau^2} \quad \text{und} \quad \arctg(\omega_0 \tau) + \omega_0 t_1 \leq \pi. \quad (6)$$

Bei  $K \gg 1$ , was bei einer effektiven Regulierung immer der Fall ist, wird  $\omega_0 \tau \approx 1$  und  $\arctg \omega_0 \tau \approx \pi/2$ . Es muss dann sein

$$\frac{K t_1}{\tau} \leq \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

damit die Regulierung stabil ist.

KÜPFMÜLLER löst das Problem mit Hilfe der Integralgleichung (45) und diskutiert die verschiedenen Stabilitätsbereiche.

$$h(t) = f(t) - K \int_0^{t-t_1} \dot{g}(t-\zeta) h(\zeta) d\zeta; \quad (8)$$

$h(t)$  gesuchte Funktion,

$f(t)$  Ausgangsfunktion einer gegebenen Störungsfunktion bei aufgeschnittener, aber in gleichem Zustand sich befindendem Regelkreis [1 ( $t - t_1$ )] gesetzt

Mit (31) und einem Ansatz für  $h(t)$

$$h(t) = h_0 + h_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (9)$$

ergeben sich zwei Beziehungen:

$$\alpha t_1 - \frac{t_1}{\tau} = \frac{\omega_0 t_1}{\operatorname{tg} \omega_0 t_1}; \quad \frac{\tau}{K t_1} e^{-t_1/\tau} = \operatorname{si}(\omega_0 t_1) e^{\omega_0 t_1 / (\operatorname{tg} \omega_0 t_1)}. \quad (10)$$

Entsprechend den periodischen Funktionen  $\operatorname{si}(\omega_0 t_1)$  und  $\operatorname{tg}(\omega_0 t_1)$ , gibt es viele Wertepaare  $\alpha$  und  $\omega_0$ , von denen aber nur das erste für den Einschwingvorgang wichtig ist. Die gleichen Beziehungen können auch leicht gewonnen werden aus der Lösung der charakteristischen Gleichung  $1 + G(p) = 0$ , welche unter Verwendung von (41) lautet:

$$p \tau + 1 + K e^{-t_1 p} = 0. \quad (11)$$

mit den Lösungen  $p_{1,2} = -\alpha \pm j \omega_0$  eingesetzt, erhält man

$$\operatorname{tg} \omega_0 t_1 = \frac{\omega_0 \tau}{\alpha \tau - 1} \quad \text{und} \quad K e^{\alpha t_1} = \sqrt{\omega_0^2 \tau^2 + (1 - \alpha \tau)^2}, \quad (49)$$

welche, etwas umgeformt, die Beziehungen (47) ergeben.

Der aperiodische Grenzfall ist bei  $\omega_0 = 0$ , das heisst

$$K e^{\alpha t_1} = \alpha \tau - 1 \quad \text{oder aus (47)} \quad \frac{\tau}{K t_1} e^{-t_1/\tau} = e, \quad (50)$$

wobei infolge  $t_1/\tau \ll 1$

$$e^{-t_1/\tau} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\tau}{K t_1} = e.$$

Dies in (50) eingesetzt und unter Berücksichtigung, dass  $K e^{\alpha t_1} \gg 1$ , also auch  $\alpha \tau \gg 1$ , erhält man  $e^{\alpha t_1} = \alpha t_1 e$  und daraus

$$\alpha t_1 = 1.$$

Obwohl die sehr grosse Zeitkonstante  $\tau$  in der Übertragungsfunktion vorkommt, wird die Ausgangsgrösse rasch auf die bleibende Abweichung zurückgeführt.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HAROLD CHESTNUT und ROBERT W. MAYER, *Servomechanisms and Regulating System Design*, Bd. I (John Wiley & Sons Inc., New York 1951). Dasselbst ausführliches Literaturverzeichnis über Arbeiten in englischer Sprache.
- [2] H. NYQUIST, *Regeneration Theory*, Bell System techn. J. 11, 126–147 (1932).
- [3] H. W. BODE, *Amplifiers*, USA Patent 2123178 (1938).
- [4] H. W. BODE, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (D. Van Nostrand Co., New York 1945).
- [5] HUBERT M. JAMES, N. B. NICHOLS und R. S. PHILLIPS, *Theory of Servomechanisms* (McGraw-Hill Book Co., New York 1947).
- [6] KARL KÜPFMÜLLER, *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung*, (S.-Hirzel-Verlag, Zürich 1949) (letztes Kapitel).
- [7] Elektrotechn. Z. 73, H. 7 (1952), Sonderheft Regelungstechnik mit Angaben über deutsches Schrifttum.

## Résumé

Se basant sur de nombreuses publications, on expose et on démontre les méthodes les mieux appropriées à l'analyse des problèmes de réglage. L'article traite les différents moyens pour améliorer la stabilité, l'influence de perturbations, les effets transitoires, les systèmes de réglage composés, l'influence d'une vitesse de propagation finie dans le système et la détermination de la fonction de transfert à l'exemple d'un moteur en dérivation. Les méthodes décrites ne sont valables que pour des systèmes linéaires. Des systèmes non linéaires peuvent aussi être étudiés par la même méthode, pour autant qu'il s'agisse de petites perturbations autour d'une position d'équilibre.



## Summary

Based on the numerous publications dealing with feedback-control systems the essential features of the phase-attenuation method most suitable for the design of regulators and servo-mechanisms are shown. Measures to increase stability, series and parallel compensation, influence of disturbances, transient behaviour and the effect of a finite time delay within the system are discussed. As an example, the transfer function of a DC shunt motor is derived. The method is suitable for linear systems only, nonlinear systems may be analyzed by assuming small deviations from a steady state value.

(Eingegangen: 9. Mai 1953.)

## Characteristic Surfaces of the Equations of Motion for Non-Newtonian Fluids<sup>1)</sup>

By JERALD LAVERNE ERICKSEN, Bloomington, Indiana, U.S.A.<sup>2)</sup>

### 1. Introduction

In phenomenological theories of continuum mechanics, characteristic curves or surfaces, when they exist, are usually of some importance. In the classical linear theory of elasticity, waves of compression and distortion are such surfaces [1]<sup>3)</sup>. In gas dynamics and in plasticity, one frequently makes use of the properties of characteristics in solving problems, and physical interpretations for them have been suggested [2], [3]. There is thus some reason to believe that such surfaces may be of importance in modern theories of fluid dynamics such as those proposed by REINER [4], RIVLIN [5], and TRUESDELL [6]. We consider RIVLIN's equation of motion for non-Newtonian fluids. These are

$$t_{,j}^i + \rho f^i = \rho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v_{,j}^i v^j \right), \quad (1)$$

$$t_j^i = -p \delta_j^i + G_1(\text{II}, \text{III}) d_j^i + G_2(\text{II}, \text{III}) d_k^i d_j^k, \quad (1)$$

$$v_{,i}^i = d_i^i = 0, \quad (1)$$

where  $t_j^i$  is the stress tensor,  $f^i$  the body force per unit mass,  $v^i$  the velocity vector,  $d_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$  the rate of deformation tensor,  $\text{II} = -(d_j^i d_i^j)$ ,  $\text{III} = \det. d_j^i$ ,  $p$  is an arbitrary hydrostatic pressure, and  $\rho$  is the density, assumed constant. It is assumed that, in the range of values of  $\text{II}$  and  $\text{III}$  considered,

<sup>1)</sup> Prepared under Army Contract DA-33-008 ORD-454 with Indiana University.

<sup>2)</sup> Graduate Institute for Applied Mathematics, Indiana University. On leave of absence from the Naval Research Laboratory, Washington, D.C.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to the Bibliography on page 266.

lered,  $G_1$  and  $G_2$  are single valued, continuously differentiable, and that not  
 both of these functions vanish identically. For these equations, the characteristic  
 condition is obtained. For a plane motion, it is found that, at a point where

$$G_1 = \text{II } G_2 = 0,$$

$$G_1 = \frac{\text{II } \partial G_1}{\partial \text{II}} = 0,$$

every direction parallel to the plane of the flow is a characteristic direction. At  
 a point where neither of these conditions is satisfied, there are at most six  
 distinct characteristic directions parallel to the plane of the flow, and explicit  
 determinations for these are given. Certain inequalities must be satisfied in  
 order that these exist. Similar results are obtained for a slightly more general  
 class of motions.

Setting  $G_1 = k(-\text{II})^{-1/2}$ ,  $G_2 = 0$ , where  $k$  is a positive constant, one obtains  
 the von Mises equations of plasticity. This case was discussed recently by  
 THOMAS [7].

## 2. An Alternative Form of the Equations of Motion

Using (1.2) to eliminate  $t^{ij}$  from (1.1), one obtains

$$\begin{aligned}
 -p^{,i} + \varrho f^i + G_1 d^{ij}_{,j} + G_2 (d^i_k d^{kj})_{,i} + \left( d^{ij} \frac{\partial G_1}{\partial \text{II}} + d^i_k d^{kj} \frac{\partial G_2}{\partial \text{II}} \right) d^m_{n,j} \frac{\partial \text{II}}{\partial d^m_n} \\
 + \left( d^{ij} \frac{\partial G_1}{\partial \text{III}} + d^i_k d^{kj} \frac{\partial G_2}{\partial \text{III}} \right) d^m_{n,j} \frac{\partial \text{III}}{\partial d^m_n} = \varrho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i_{,j} v^j \right).
 \end{aligned}$$

Using (1.3) and the relations

$$\frac{\partial \text{II}}{\partial d^i_j} = -d^j_i, \quad \frac{\partial \text{III}}{\partial d^i_j} = d^j_k d^k_i + \text{II } \delta^i_j,$$

we can put this equation in the form

$$-p^{,i} + \varrho f^i + T^{ij}_{km} v^k_{,j} v^m = \varrho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i_{,j} v^j \right), \quad (2.1)$$

where

$$\left. \begin{aligned}
 T^{ij}_{km} &= \frac{G_1 \delta^i_k \delta^j_m}{2} + \frac{G_2 (\delta^i_k d^j_m + \delta^i_m d^j_k + \delta^j_m d^i_k)}{2} \\
 &\quad - d^i_{km} \left( d^{ij} \frac{\partial G_1}{\partial \text{II}} + d^i_n d^{nj} \frac{\partial G_2}{\partial \text{II}} \right) \\
 &\quad + d^i_{kn} d^m_n \left( d^{ij} \frac{\partial G_1}{\partial \text{III}} + d^i_p d^{pj} \frac{\partial G_2}{\partial \text{III}} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

In all of which follows, it is assumed that  $\rho$ ,  $f_i$ ,  $G_1$  and  $G_2$  have been specified. Then (1. 3) and (2. 1) yield four equations for determining the four unknowns  $t_i^j$ . Given  $p$  and  $v^i$  satisfying these equations, one can obtain  $t_i^j$  from (1. 1). The stresses thus determined satisfy (1. 1). Therefore we need consider only (1. 3) and (2. 1).

### 3. The Characteristic Condition

In obtaining the characteristic condition, we consider only stationary flow. However, it is easily verified that the same condition holds for nonstationary flow.

In this section, Latin indices take on the values 1, 2, 3, Greek the values 1, 2, 3. Let  $S$  be a surface defined by an equation of the form  $f(x^1, x^2, x^3) = 0$  where  $f$  is continuously differentiable and  $f^i f_{,i} > 0$  at each point of  $S$ . If  $P$  is an arbitrary point on  $S$ , one can choose rectangular Cartesian coordinates such that, in the neighborhood of  $P$ ,  $S$  is represented by an equation of the form

$$x^1 = g(x^2, x^3), \quad (3.1)$$

where  $g_{,\alpha} = 0$  at  $P$ . In this coordinate system, the unit normal  $v_i$  to  $S$  has components  $v^i = \pm \delta_1^i$  at  $P$ .

Consider the function  $p$  on  $S$ . Using (3. 1), one can express  $p$  as a function of the surface coordinates  $x^\alpha$ . Then

$$p_{,\alpha} = \frac{dp}{dx^\alpha} - p_{,3} g_{,\alpha}, \quad (3.2)$$

where  $dp/dx^\alpha$  denotes surface differentiation of  $p$ . Similarly,

$$v_{i,\alpha} = \frac{dv_i}{dx^\alpha} - v_{i,1} g_{,\alpha}, \quad (3.3)$$

$$v_{i,j\alpha} = \frac{dv_{i,j}}{dx^\alpha} - v_{i,j1} g_{,\alpha}. \quad (3.4)$$

It follows from (3. 4) that<sup>1)</sup>

$$v_{i,\alpha 1} = \frac{dv_{i,1}}{dx^\alpha} - v_{i,11} g_{,\alpha}, \quad (3.5)$$

$$v_{i,\alpha\beta} = \frac{dv_{i,\beta}}{dx^\alpha} - g_{,\alpha} \frac{dv_{i,1}}{dx^\beta} + v_{i,11} g_{,\alpha} g_{,\beta}. \quad (3.6)$$

Differentiating (1. 3) with respect to  $x^1$  and using (3. 5), one obtains

$$v_{1,11} = v_{1,11}^\alpha g_{,\alpha} - \frac{dv_{1,1}^\alpha}{dx^\alpha}. \quad (3.7)$$

<sup>1)</sup> A derivation of these equations and a general discussion of characteristics is given by HADAMARD [1].

If the functions  $p$ ,  $v_i$ , and  $v_{i,j}$  are assigned on  $S$  subject to (1.3) and (3.3), equations (2.1), (3.2), (3.5), (3.6) and (3.7) yield 21 linear equations in the unknowns  $p_{,i}$  and  $v_{i,jk}$ . At a point of  $S$  where the determinant  $D$  of the coefficients in these equations is different from zero,  $p_{,i}$  and  $v_{i,jk}$  are determined uniquely. If  $D = 0$ , they are not. If, at each point of  $S$ ,  $D \neq 0$ ,  $S$  is said to be *characteristic relative to the assigned data*. The equation  $D = 0$  will be called the *characteristic condition*.

Consider the 21 equations at  $P$ , where  $g_{\alpha\alpha} = 0$ . The derivatives  $P_{,\alpha}$ ,  $v_{i,\alpha\beta}$ ,  $v_{1,11}$  and  $v_{1,11}$  are then given directly by (3.2), (3.5), (3.6), and (3.7). It then follows from (2.2) that the quantities

$$T_{21}^{21} v_{2,11} + T_{31}^{21} v_{3,11}, \quad T_{21}^{31} v_{2,11} + T_{31}^{31} v_{3,11}, \quad -p_{,1} + T_{21}^{11} v_{2,11} + T_{31}^{11} v_{3,11},$$

can be determined at  $P$ . The derivatives  $p_{,i}$  and  $v_{i,jk}$  are thus determined uniquely unless

$$T_{21}^{21} T_{31}^{31} - T_{21}^{31} T_{31}^{21} = 0. \quad (3.8)$$

Clearly, (3.8) is the characteristic condition, expressed in this special coordinate system. To express (3.8) in invariant form, it is convenient to introduce a scalar

$$U = G_1 + G_2 \mu^i v_i,$$

and a tensor

$$U_j^i = G_2 (d_j^i - v^i \mu_j) + 2 (\mu^i - v^i \mu_k v^k) \left( \mu^m d_{mj} \frac{\partial G_1}{\partial III} - \mu_j \frac{\partial G_1}{\partial II} \right) \\ + 2 (d_m^i \mu^m - v^i \mu_m \mu^m) \left( \mu^n d_{nj} \frac{\partial G_2}{\partial III} - \mu_j \frac{\partial G_2}{\partial II} \right),$$

where  $\mu^i = d_j^i v^j$ . We note that  $v_i U_j^i = 0$ . It follows from (2.2) that, at  $P$ ,

$$2 T_{\beta 1}^{\alpha 1} = U \delta_{\beta}^{\alpha} + U_{\beta}^{\alpha}.$$

Thus (3.8) can be written as

$$U^2 + U U_{\alpha}^{\alpha} + U_2^2 U_3^3 - U_3^2 U_2^3 = 0. \quad (3.9)$$

Furthermore  $U_j^1 = \pm v_i U_j^i = 0$ , so that (3.9) can be written as

$$U^2 + U U_i^i + \frac{(U_i^i)^2 - U_j^j U_i^i}{2} = 0, \quad (3.10)$$

which is an invariant form of the characteristic condition. A *characteristic direction* is the direction of a unit vector  $v_i$  satisfying (3.10). The number of characteristic directions corresponding to a given set of functions  $G_1$ ,  $G_2$ , and may be finite or infinite, depending on the nature of these functions.

In certain theories of plasticity and fluid dynamics, it is assumed that  $G_1 > 0$ ,  $G_2 \equiv 0$ . Then  $U = G_1$ ,  $U_j^i = A^i B_j$ , where

$$A^i = 2 (\mu^i - \nu^i \mu_k \nu^k), \quad B_j = \mu^m d_{mj} \frac{\partial G_1}{\partial III} - \mu_j \frac{\partial G_1}{\partial II},$$

thus

$$(U_i^i)^2 - U_j^i U_i^j = (A^i B_i)^2 - A^i B_j A^j B_i = 0.$$

Equation (3.10) then becomes

$$G_1 + A^i B_i = 0.$$

Now consider a flow in which there exists a surface across which  $p$  and  $v_i$  are continuous, but on which there is a finite discontinuity in at least one of the quantities  $p_{,i}$  and  $v_{i,jk}$ . Such a surface must be characteristic. However, a characteristic surface need not be a surface of discontinuity.

#### 4. Plane Flow

Introduce an orthogonal coordinate system in which the surfaces  $x^3 = \text{const}$  are parallel planes, and consider the problem of determining the characteristic direction  $\nu_i$  for the case where

$$v_{1,3} = v_{2,3} = v_3 = \nu_3 = 0$$

at each point of the flow. Then

$$d_{ij} = d_1 e_i^1 e_j^1 + d_2 e_i^2 e_j^2,$$

where  $e_i^1$  and  $e_i^2$  are mutually orthogonal unit eigenvectors of  $d_{ij}^i$  and  $d_1, d_2$  the corresponding eigenvalues. Using (1.3), one obtains

$$d_{ii} = d_1 (e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2).$$

Thus, if  $\varphi$  is the angle determined by  $e_i^1$  and  $\nu_i$ ,

$$d_{ij} \nu^i \nu^j = d_1 [(e_i^1 \nu^i)^2 - (e_i^2 \nu^i)^2] = d_1 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = d_1 \cos 2\varphi. \quad (4.1)$$

Since  $\nu_i U_j^i = 0$ , the determinant  $|U_j^i|$  must vanish. Thus

$$(U_j^i)^2 - U_j^i U_i^j = 2 |U_j^i| = 0.$$

From (3.10), either

$$U + U_i^i = 0, \quad (4.2)$$

$$U = 0. \quad (4.3)$$

Let  $P$  be a point where (4.2) holds. Introduce rectangular Cartesian coordinates such that, at  $P$ ,  $v_i = \delta_i^1$ . Then

$$d_{2j} d_{ij}^j - d_{2j} d_1^j - d_{12} (d_{11} + d_{22}) = 0.$$

Using this result it is easy to show that

$$U + U_i^i = U + U_2^2 = G_1 - 2(d_{12})^2 \frac{\partial G_1}{\partial II} = 0.$$

It

$$-(d_{12})^2 = d_{11} d_{22} - (d_{12})^2 + (d_{22})^2 = d_1 d_2 + (d_{ij} v^i v^j)^2 = -d_1^2 + (d_{ij} v^i v^j)^2,$$

and  $II = -d_1^2$ . Thus (4.2) can be written in invariant form as

$$G_1 + 2[(d_{ij} v^i v^j)^2 + II] \frac{\partial G_1}{\partial II} = 0,$$

using (4.1),

$$G_1 + 2 II \frac{\partial G_1}{\partial II} \sin^2 2\varphi = 0. \quad (4.4)$$

We exclude the exceptional case  $G_1 = II \partial G_1 / \partial II = 0$ , which is mentioned in the introduction. Then (4.4) can be satisfied if and only if

$$-1 \leq G_1 \left( 2 II \frac{\partial G_1}{\partial II} \right)^{-1} \leq 0. \quad (4.5)$$

When (4.5) is satisfied, (4.4) determines four characteristic directions. These are all distinct if the strict inequalities hold in (4.5). If  $\varphi$  is an angle satisfying (4.4), two make angles  $\varphi$  and  $-\varphi$  with  $e_i^1$  while the other two make angles  $\varphi$  and  $-\varphi$  with  $e_i^2$ . A necessary condition that (4.5) hold for  $\alpha < II < \beta < 0$ , where  $G_1(\beta, 0) \neq 0$ , is that

$$\frac{G_1(II, 0)}{G_1(\beta, 0)} \leq \left( \frac{\beta}{II} \right)^{1/2}$$

for  $\alpha < II < \beta$ .

Suppose now that (4.3) holds. Then

$$G_1 + G_2 d_{ij} v^i v^j = 0,$$

using (4.1),

$$G_1 + G_2 d_1 \cos 2\varphi = 0. \quad (4.6)$$

Excluding the case  $G_1 = II G_2 = 0$ , one must have

$$\frac{G_1}{G_2} |d_1| \leq 1 \quad (4.7)$$



in order that (4.6) define real characteristic directions. When the strict inequality holds in (4.7), (4.6) defines two distinct characteristic directions. vectors  $e_i^1$  and  $e_i^2$  bisect the angles formed by these two.

### 5. Locally Plane Flow

In any flow one has

$$d_{ij} = d_1 e_i^1 e_j^1 + d_2 e_i^2 e_j^2 + d_3 e_i^3 e_j^3,$$

where  $e_i^1, e_i^2$ , and  $e_i^3$  are mutually orthogonal unit eigenvectors of  $d_i^j$  and  $d_2, d_3$  are the corresponding eigenvalues. A flow for which  $\text{III} = d_1 d_2 d_3 = 0$  will be called *locally plane*. One can, without loss of generality, take  $d_3 = 0$ . Then, using (1.3),

$$d_{ij} = d_1 (e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2).$$

For the special case of the von Mises equations of plasticity, it turns out that for real characteristic directions to exist, the motion must be locally plane. Furthermore,

$$v^i e_i^3 = 0. \quad (5.1)$$

Consider the problem of determining the characteristic directions for such a flow for the case where (5.1) holds. If one introduces a rectangular Cartesian coordinate system such that, at an arbitrarily preassigned point  $P$  in the flow,  $e_i^3 = \delta_i^3$ , one sees that this problem is formally identical with that just solved. These characteristic directions are thus given by

$$G_1 + 2 \text{II} \frac{\partial G_1}{\partial \text{II}} \sin^2 2\varphi = 0, \quad G_1 + G_2 d_1 \cos 2\varphi = 0,$$

where  $\cos \varphi = e_i^1 v^i$ . In such flows, the characteristic surface elements will necessarily unite to form surfaces [7].

RIVLIN's general solution for Poiseuille flow provides an example of a flow which is locally plane but not plane [8]. This flow is axially symmetric and (5.1) is the condition that the characteristic surfaces be surfaces of revolution about the axis of symmetry.

### BIBLIOGRAPHY

- [1] J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (A. Hermann, Paris, 1903).
- [2] R. COURANT and K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience, New York, 1948).
- [3] W. PRAGER and P. G. HODGE, Jr., *Theory of Perfectly Plastic Solids* (Wiley & Sons, New York, 1951).

- [1] M. REINER, *A mathematical Theory of Dilatancy*, Amer. J. Math. 67, 350–362 (1945).
- [2] R. S. RIVLIN, *The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids*, I, Proc. Roy. Soc. London [A] 193, 260–281 (1948).
- [3] C. TRUESDELL, *A New Definition of a Fluid*, I: *The Stokesian Fluid*, J. pure appl. Math. [9] 29, 215–244 (1950).
- [4] T. Y. THOMAS, *On the Characteristic Surfaces of the von Mises Plasticity Equations*, J. Rational Mech. and Analysis 1, 343–357 (1952).
- [5] R. S. RIVLIN, *The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids*, II, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 88–91 (1948).

### Résumé

Après avoir dérivé la condition caractéristique pour les équations du mouvement des fluides « non newtoniens », nous avons déterminé les directions caractéristiques pour le cas du mouvement plan.

(received: February 2, 1953.)

## Luftkräfte an einem schwingenden Schaufelkranz kleiner Teilung

VON HEINZ SÖHNGEN, Darmstadt<sup>1)</sup>

### 1. Anlass der Untersuchung und Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit rein theoretischen Überlegungen zum Problem des Schwingens von Schaufelkränzen in axial durchströmten Maschinen. Zur Vereinfachung nehmen wir dabei an, dass der stehende oder umlaufende Kranz sich in einem Ringkanal geringer Höhe (ebenes Problem) befindet, der sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt. Das strömende Medium möge inkompressibel sein, Störkörper mögen sich in der Nähe des Kranzes nicht befinden.

Um das Schwingungsverhalten eines derartigen Kranzes beurteilen zu können, ist die Kenntnis der Luftkräfte, die an den schwingenden Schaufeln anstreifen, unerlässlich. Aussagen über Luftkräfte sind aber bisher nur für den Einzelflügel bekannt, und zwar unter den folgenden Voraussetzungen:

- a) dünne und schwachgewölbte Profile (Streckenprofile),
- b) kleine Auftriebsbeiwerte,
- c) kleine Schwingungsamplituden.

Das strömende Medium wird dabei als reibungsfrei (siehe zum Beispiel [1], [2] und [3])<sup>2)</sup> und im allgemeinen auch inkompressibel [4] angenommen. Die Er-

<sup>1)</sup> Technische Hochschule Darmstadt.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 297.

gebnisse dieser Theorie wird man anwenden können, wenn das Teilungsverhältnis  $a/c$  (siehe Figur 1) genügend gross ist. Ist das Teilungsverhältnis aber klein, so muss erwartet werden, dass infolge der gegenseitigen Induktion der Schaufelabweichungen eintreten, und zwar um so stärker, je kleiner  $a/c$  und je grösser

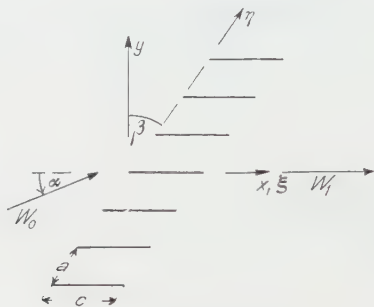


Fig. 1

Gitter in der Abwicklungsebene.

der Auftriebsbeiwert  $c_a$  ist. Aus diesem Grunde sollen die Luftkräfte an einem schwingenden Gitter unter den folgenden Voraussetzungen berechnet werden:

- ebenes Streckengitter kleiner Teilung, das heisst lineare Theorie in  $a/c$ ,
- inkompressibles und reibungsfreies Medium,
- kleine Schwingungsamplituden.

Der Tatsache, dass es sich um ein Gitter aus einem Schaufelkranz handeln soll, tragen wir dadurch Rechnung, dass Schaufeln des Gitters mit Nummern, sich nur um Vielfache der Blattzahl  $z$  unterscheiden, gleiches Verhalten aufweisen sollen.

Unter diesen Voraussetzungen wird ein Verfahren angegeben, das bei beliebig vorgegebener Schwingungsform des Schaufelkranzes sowohl in Tiefenrichtung als auch über dem Umfang die Berechnung der zugehörigen Luftkräfte gestattet. Explizit wird die Rechnung aber nur für die praktisch hauptsächlich interessierenden Fälle der Drehung und Biegung durchgeführt, und zwar werden hierfür die an den Schaufeln angreifenden Kräfte und das Moment um die Vorderkante angeschrieben. Diese reichen aus, um das Eigenschwingungsverhalten, das heisst die kritische Geschwindigkeit eines Schaufelkranzes, zu bestimmen. Um auch das Verhalten eines Schaufelkranzes bei Fremderregung beurteilen zu können, benötigt man ausser den Kräften für die genannten Freiheitsgrade auch noch diejenigen, die sich an den Schaufeln bei periodischer Störung des Zustroms einstellen. Diese sollen später angegeben werden.

Es kann nicht erwartet werden, dass die Luftkräfte an einem schwingenden Gitter eine einfache Form haben, dazu ist die Anzahl der in das Problem eingehenden Parameter zu gross.

Abschliessend wird an einem Beispiel gezeigt, wie mit den angegebenen Kräften die kritische Geschwindigkeit berechnet werden kann, insbesondere wird für den Fall der Biegeschwingung eines Kranzes mit dem Staffelungswinkel  $\beta = 0$  eine explizite Formel dafür abgeleitet.

## 2. Liste der Bezeichnungen

- = Schaufeltiefe,
- = Teilung,
- = Staffelungswinkel,
- = Blattzahl des Schaufelkranzes,
- =  $2 \pi c/a$ ,
- =  $\Omega e^{i\beta}$ ,
- = Blattnummer,
- = dimensionslose Tiefenkoordinate ( $\xi = 1$  entspricht Profiltiefe),
- = dimensionslose Umfangskoordinate ( $\eta = 1$  entspricht Umfang des Kranzes),
- =  $m/3$  Umfangskoordinate der  $m$ -ten Schaufel,
- = rechtwinklige Koordinaten (dimensionsbehaftet),
- =  $x + i y$ ,
- = stationärer Anstellwinkel (weit vor dem Gitter),
- = stationäre Anströmgeschwindigkeit vor dem Gitter,
- = stationäre Abströmgeschwindigkeit,
- = mittlere stationäre Anströmgeschwindigkeit der Vorderkante,
- = mittlere instationäre Anströmgeschwindigkeit der Vorderkante,
- = Luftdichte,
- = Druck,
- = Auftriebsbeiwert,
- =  $2 a \sin \alpha / c \cos(\alpha + \beta)$  modifizierter Auftriebsbeiwert,
- = stationäre Zirkulation an der Vorderkante,
- =  $g(\xi, \eta, s)$  instationäre Wirbeldichte,
- =  $c G(\eta, s)$  instationäre Zirkulation an der Vorderkante,
- = Frequenz der Schwingung (Hertz),
- = Zeit,
- =  $W_1 t/c$ ,
- =  $2 \pi \nu c/W_1$ , reduzierte Frequenz,
- =  $x(\xi, \eta_m, s)$  Auslenkung des Schaufelpunktes  $\xi, \eta_m$  in  $x$ -Richtung,
- =  $y(\xi, \eta_m, s)$  Auslenkung des Schaufelpunktes  $\xi, \eta_m$  in  $y$ -Richtung,
- =  $\Delta x(\xi, \eta_m, s)/a$ ,
- =  $\Delta y(\xi, \eta_m, s)/a$ ,
- = Ordnung der Fourier-Transformation (siehe Abschnitt 3),
- $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ,
- = Fourier-Transformierte  $n$ -ter Ordnung,
- =  $(n/|n|) \beta$ ,
- =  $(n/|n|) \omega$ ,
- =  $|n| \Omega$ .

## 3. Vorbemerkungen

Den Schaufelkranz mit den 3 Schaufeln denken wir uns in eine Ebene abwickelt und erhalten so ein Gitter, dessen Schaufeln wir numerieren  $\dots, -2,$

$-1, 0, 1, 2, \dots$ . In dieser Ebene führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x, y$  ein, dessen  $x$ -Achse den Schaufeln parallel ist und dessen Ursprung in der Vorderkante der nullten Schaufel liegt. Dieses System, das noch dimensionsbehaftet sein möge, dient zur Orientierung der Geschwindigkeiten.  $u$  bezeichnen wir stets eine Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung und mit  $v$  eine solche in  $y$ -Richtung.

Zur Orientierung auf den Schaufeln ist es zweckmässig, noch ein zweites – bei umlaufenden Kränzen schiefwinkliges – Koordinatensystem  $\xi, \eta$  (Gitterkoordinaten) einzuführen, dessen  $\xi$ -Achse in Richtung der  $x$ -Achse weist und dessen  $\eta$ -Achse mit der Gitterachse zusammenfällt.  $\xi, \eta$  seien dimensionslos und zwar entspreche  $\xi = 1$  der Gittertiefe ( $c$ ) und  $\eta = 1$  dem Umfang ( $a$ ) des Kranzes. Es ist dann

$$z = x + i y = c \xi + i e^{-i\beta} a \zeta \eta, \quad (3)$$

bzw.

$$\xi = \frac{1}{c} (x - y \operatorname{tg} \beta), \quad \eta = \frac{y}{a \zeta \cos \beta}.$$

Ist  $f$  eine Funktion von  $x, y$ , so schreiben wir auch in nicht misszuverstehender Weise  $f(x, y) = f(\xi, \eta)$ .

Hat das Gitter Streckenprofile, so sind die Koordinaten der einzelnen Schaufeln durch

$$\eta = \dots, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \dots, \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

gegeben, und wir setzen noch  $\eta_m = m/3$ .

Da sich das Verhalten der Schaufeln mit der Blattzahl  $3$  periodisch wiederholt, so müssen sämtliche in dem Problem wesentlichen Funktionen in  $\eta$  Periode  $1$  haben. Man wird daher Fourier-Reihen bzw. -Polynome einführen. Wir bedienen uns dabei der komplexen Darstellung. Ist  $f(\eta)$  eine Funktion der Periode  $1$ , so schreiben wir

$$f(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^{(n)} e^{-i 2\pi n \eta} \quad (3, 2)$$

mit

$$f^{(n)} = \int_0^1 f(\eta) e^{i 2\pi n \eta} d\eta.$$

Handelt es sich um eine Funktion, die nur für die diskreten  $\eta_m$ -Werte definiert ist, zum Beispiel um die Schwingungsamplituden der einzelnen Schaufeln, und ist  $f_k$  der Wert, den diese Funktion auf der  $k$ -ten Schaufel, also für  $\eta_k$  annimmt, so interpolieren wir diese Funktion durch ein endliches Fourier-Pol

und setzen dazu

$$f^{(n)} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 e^{i2\pi n \eta_m} f_m \quad (3, 2b)$$

und

$$\bar{3} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{wenn } 3 \text{ gerade,} \\ \frac{3-1}{2}, & \text{wenn } 3 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

ann ist

$$f(\eta) = \sum_{n=-\bar{3}}^{\bar{3}} f^{(n)} e^{-i2\pi n \eta} \quad (3, 2c)$$

ein trigonometrisches Polynom, das an den Stellen  $\eta = \eta_k$  die Werte  $f_k$  annimmt.

In der vorliegenden Untersuchung werden des öfteren Integrale der Form

$$F(\eta) = \int_0^1 f(\eta') h(\eta - \eta') d\eta' \quad (3, 3)$$

auftreten, wobei  $f(\eta)$  und  $h(\eta)$  stetige Funktionen der Periode 1 sind. Für die Fourier-Transformierten von  $F(\eta)$  gilt dann der sogenannte Faltungssatz

$$F^{(n)} = f^{(n)} h^{(n)}. \quad (3, 4)$$

An Stelle der Zeit führen wir die dimensionslose Grösse  $s = W_1 t/c$  ein; dabei bedeutet  $W_1$  die stationäre Abströmgeschwindigkeit hinter dem Gitter und  $c$  die Schaufeltiefe. Wir beziehen hier im Gegensatz zur Tragflügeltheorie auf die Geschwindigkeit  $W_1$  anstatt  $W_0$  oder  $W_\infty$ , da die freien Wirbel mit der Geschwindigkeit  $W_1$  abschwimmen. Diese drei Geschwindigkeiten sind nicht gleich, da wir nicht nur den Fall schwacher Belastung betrachten. Ist  $\nu$  die Frequenz in Hertz, mit der die Profile schwingen, so führen wir noch die sogenannte reduzierte Frequenz

$$\omega = \frac{2 \pi \nu c}{W_1} \quad (3, 5)$$

in.

Die Schwingungen der einzelnen Schaufeln seien vorgegeben und mögen mit der reduzierten Frequenz  $\omega$  erfolgen. Die Auslenkung des Schaufelpunktes  $\eta_m$  in Richtung der  $x$ -Achse kann dann in der Form

$$\Delta x(\xi, \eta_m, s) = a_m(\xi) \cos[\omega s + \psi_m(\xi)] \quad (3, 6a)$$

bzw. die Auslenkung in  $y$ -Richtung

$$\Delta y(\xi, \eta_m, s) = b_m(\xi) \cos[\omega s + \chi_m(\xi)] \quad (3, 6b)$$



geschrieben werden, wobei  $a_m(\xi)$ ,  $b_m(\xi)$ ,  $\psi_m(\xi)$  und  $\chi_m(\xi)$  gegeben sind. Setzt man

$$\Delta_{1m}(\xi) = \frac{1}{2a_3} a_m(\xi) e^{i\psi_m(\xi)}, \quad \Delta_{2m}(\xi) = \frac{1}{2a_3} b_m(\xi) e^{i\chi_m(\xi)}$$

und kennzeichnet den Übergang zur konjugiert komplexen Grösse durch einen Querstrich, so erhält man gemäss den Formeln (3, 2b) und (3, 2c) in

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(\xi, \eta, s) &= a_3 e^{i\omega s} \sum_{-\frac{\bar{\delta}+\bar{\delta}+1}{2}}^{\bar{\delta}} \Delta_1^{(n)}(\xi) e^{-i2\pi n \eta} + a_3 e^{-i\omega s} \sum_{-\frac{\bar{\delta}+\bar{\delta}+1}{2}}^{\bar{\delta}} \overline{\Delta_1^{(n)}(\xi)} e^{i2\pi n \eta}, \\ \Delta y(\xi, \eta, s) &= a_3 e^{i\omega s} \sum_{-\frac{\bar{\delta}+\bar{\delta}+1}{2}}^{\bar{\delta}} \Delta_2^{(n)}(\xi) e^{-i2\pi n \eta} + a_3 e^{-i\omega s} \sum_{-\frac{\bar{\delta}+\bar{\delta}+1}{2}}^{\bar{\delta}} \overline{\Delta_2^{(n)}(\xi)} e^{i2\pi n \eta} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

zwei Fourier-Polynome, welche die nur für die diskreten  $\eta_{lm}$  definierten Amplituden  $\Delta_1^{(n)}$  und  $\Delta_2^{(n)}$  schlage der Schaufeln interpolieren und als Superpositionen von elementaren Schwingungsformen über dem Umfang des Schaufelkranzes darstellen.

Da wir uns auf eine lineare Theorie in den Schwingungsamplituden beschränken, in der sich die Kräfte entsprechend den Ausschlägen überlagern, so reicht es aus, die aerodynamischen Reaktionen zu berechnen, die zu elementaren Schwingungsformen

$$\Delta x(\xi, \eta, s) = a_3 e^{i\omega s - i2\pi n \eta} \Delta_1^{(n)}(\xi), \quad \Delta y(\xi, \eta, s) = a_3 e^{i\omega s - i2\pi n \eta} \Delta_2^{(n)}(\xi) \quad (3)$$

gehören. Dabei soll  $\omega$  eine beliebige reelle und  $n$  eine beliebige ganze Zahl sein. Die Grösse  $|n|$  gibt die Anzahl der Harmonischen auf dem Umfang an und  $\xi$  beschreibt damit die Schwingungsform über dem Umfang. Von den beiden Funktionen  $\Delta_1^{(n)}(\xi)$ ,  $\Delta_2^{(n)}(\xi)$ , die die Schwingungsform der Profile über die Tiefe beschreiben, wollen wir nur voraussetzen, dass sie in dem Bereich  $0 < \xi < 1$  stetig differenzierbar sind.

In den technisch interessierenden Fällen haben diese beiden Funktionen einen sehr einfachen Aufbau. Ist das Profil starr, so kann es nur eine kombinierte Biege-Dreh-Schwingung ausführen. Diese kann als Überlagerung der folgenden drei Grundformen dargestellt werden:

1. Schlagschwingung normal zur Schaufel, Schlagamplitude  $\Delta_b^{(n)}$

$$\Delta_1^{(n)}(\xi) = 0, \quad \Delta_2^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta_b^{(n)}}{a_3} = \text{const}; \quad (3)$$

2. Schwingung tangential zur Schaufel, Amplitude  $\Delta_t^{(n)}$

$$\Delta_1^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta_t^{(n)}}{a_3}, \quad \Delta_2^{(n)}(\xi) = 0; \quad (3, 1)$$

3. Drehschwingung um die Vorderkante, Winkelamplitude  $\Delta_d^{(n)}$

$$\Delta_1^{(n)}(\xi) = 0, \quad \Delta_2^{(n)}(\xi) = \frac{c \Delta_d^{(n)}}{a_3} \xi. \quad (3, 1)$$

allgemeinsten Falle eines starren Profils ist also

$$\Delta_1^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta_1^{(n)}}{a_3}, \quad \Delta_2^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta_2^{(n)}}{a_3} + \frac{c \Delta_d^{(n)}}{a_3} \xi. \quad (3,12)$$

entsprechend überlagern sich die Kräfte. Es reicht also aus, die zu den oben geführten drei Grundformen gehörenden Kräfte zu berechnen. Dementprechend könnte man sich auf die Betrachtung linearer Funktionen von  $\xi$   $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  beschränken. Da dies aber bei der Herleitung keinen wesentlichen Anteil bringt, so soll in der allgemeinen Theorie davon kein Gebrauch gemacht, sondern ganz allgemein eine Methode angegeben werden, die es gestattet, die zu den Ausschlägen (3, 8) gehörigen Kräfte zu berechnen. Die explizite Bestimmung der Kräfte führen wir dagegen nur für die soeben genannten drei Grundschwingungsformen durch.

#### 4. Gang der Untersuchung

Wird ein ruhendes Streckengitter mit der Geschwindigkeit  $W_0$  angeblasen, legt sich, wie wir später sehen werden, unter der Voraussetzung kleiner Umlenkung in die Vorderkanten der einzelnen Schaufeln ein Wirbel der Zirkulation  $\Gamma$ , der die Umlenkung besorgt. Zwischen den Schaufeln und dahinter herrscht Abströmgeschwindigkeit  $W_1$ .

Schwingt das Gitter, so treten zu diesem stationären Wirbel noch instationäre hinzu, die nicht nur in der Vorderkante liegen, sondern sich über das ganze Profil verteilen. Unter einem instationären Wirbel verstehen wir dabei das Feld eines Wirbels mit zeitlich veränderlicher Zirkulation einschliesslich des Feldes seiner Wirbelschleppe. Wird nämlich ein Wirbel veränderlicher Zirkulation angeblasen, so schwimmen nach dem Kelvinschen Satz in dem Masse, wie sich die Zirkulation ändert, freie Wirbel ab. Diese unterliegen dem Anströmfeld und dem von ihnen selbst und dem Ausgangswirbel induzierten Feld. Da wir uns auf eine lineare Theorie in den Schwingungsamplituden beschränken, dürfen wir annehmen, dass die freien Wirbel nur dem Anströmfeld unterworfen sind, in unserem Falle also mit der Geschwindigkeit  $W_1$  abschwimmen. Anders ist es bei einem Gitter mit gewölbten Schaufeln; dort variiert die Geschwindigkeit längs der Schaufeln und ist erst von der Hinterkante ab konstant. Entsprechend schwimmen die freien Wirbel ab. Um das Problem nicht schon dadurch noch zu komplizieren, beschränken wir uns auf schwachgewölbte Schaufeln, das heisst Streckengitter.

Definiert man das Feld eines instationären Wirbels wie oben, so ist die Zirkulation um den Ausgangswirbel identisch mit derjenigen, die man üblicherweise als gebundene oder tragende Zirkulation bezeichnet, und die Kraft, die dieser Wirbel ausgeübt wird, ist wie im stationären Fall gleich  $\rho V \Gamma'$  und steht auf der Richtung von  $V$  senkrecht. Dabei ist  $V$  der Mittelwert der

Geschwindigkeit über eine volle Umgebung des betrachteten Wirbelpunktes und  $\Gamma$  die gebundene Zirkulation.

Wir bezeichnen mit  $W_1 g(\xi, \eta_m, s)$  für  $0 < \xi < 1$  die Dichte der gebundenen Wirbel auf der  $m$ -ten Schaufel. Ausserdem müssen wir analog zum stationären Fall in die Vorderkanten isolierte instationäre Wirbel legen. Deren Zirkulation werde mit  $W_1 c G(\eta_m, s)$  bezeichnet. In dem Punkte  $\xi, \eta_m$  mit  $\xi = 1$  liegen dann ausser dem gebundenen Wirbel  $W_1 g(\xi, \eta_m, s)$  noch diejenigen freien Wirbel, die sich von den davorliegenden gebundenen Wirbeln abgrenzen. Ihr Einfluss braucht aber nicht mehr gesondert betrachtet zu werden, da er nach der obigen Definition in dem Feld des zugehörigen gebundenen Wirbels enthalten ist.

Die Wirbel liegen eigentlich auf den schwingenden Schaufeln, und ihre Stärke ist so zu bestimmen, dass das von ihnen induzierte Feld die Normalkomponenten kompensiert, die sich durch die Anströmung und das Schwingen ergeben. Die Anordnung der Wirbel auf den schwingenden Schaufeln braucht aber nur bei den stationären Wirbeln mit der Zirkulation  $\Gamma_0$  zu erfolgen. Bei instationären Wirbeln können wir uns auf den stehenden Schaufeln angeordnen denken, da der hierdurch begangene Fehler in den Schwingungsamplituden quadratisch klein ist.

Führt man die hier skizzierten Rechnungen durch, so ergibt sich bei Beschränkung auf eine lineare Theorie in der Teilung  $a/c$  für die beiden gesuchten Grössen  $G(\eta)$  und  $g(\xi, \eta)$  eine einzige Integralgleichung zweier Veränderlichen. Diese kann nach Einführung von Fourier-Entwicklungen über dem Umfang des Schaufelkranzes gelöst werden. Abschätzungen darüber, bis zu welchen Werten von  $a/c$  eine derartige Theorie sinnvoll ist, lassen sich im allgemeinen Fall nur schwer durchführen. Im stationären Fall, der ja auch exakt behandelt werden kann, zeigt sich, dass für  $a/c < 0,8$  die linearisierte Theorie den Gesamtauftrieb mit hinreichender Genauigkeit liefert [5].

Hat man die Grössen  $\Gamma_0, G(\eta), g(\xi, \eta)$  bestimmt, so kann damit die Kreisstromverteilung auf den einzelnen Schaufeln nach dem Kutta-Joukowskyschen Theorem berechnet werden, falls man die an dem betrachteten Punkt herrschende mittlere Geschwindigkeit kennt. Im Inneren des Gitters kann hierfür  $W_1$  genommen werden, da die Abweichungen hiervon in den Schwingungsamplituden linear sind und dies auch für die Dichten der dort liegenden Wirbel gilt. An der Vorderkante ist im stationären Fall die mittlere Geschwindigkeit gleich  $W_\infty$  (Zwischenwert von  $W_0$  und  $W_1$ ), durch die instationären Belegungen treten Abweichungen davon auf, die in den Schwingungsamplituden linear sind. Diese dürfen nicht vernachlässigt werden, da dort ausser der instationären Zirkulation  $W_1 c G(\eta)$  auch noch der stationäre Wirbel  $\Gamma_0$  liegt, der nicht klein zu vernachlässigen braucht, da wir uns nicht nur auf den Fall der schwachen Belastung beschränken.

Ganz entsprechend erfolgt die Rechnung, wenn ein Laufgitter durch ein inhomogenes Feld hindurchfährt.

## 5. Geschwindigkeitsfeld einer schwingenden Wirbelreihe zeitlich konstanter Zirkulation

Legt man durch die mit Wirbeln belegten Schaufeln einen Schnitt parallel zur Gitterachse, so erhält man eine Wirbelreihe (siehe Figur 2). Die Wirbel dieser Reihe haben aber bei dem hier zu behandelnden Problem nicht alle die gleiche Zirkulation, sondern diese variiert mit der Blattnummer  $m$  und wiederholt sich mit der Blattzahl  $3$  periodisch. Dasselbe gilt für den Abstand der

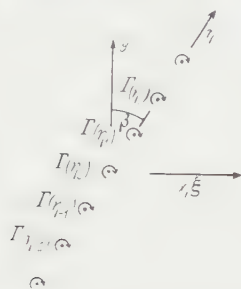


Fig. 2

Wirbelreihe aus einem Schaufelkranz.

einzelnen Wirbel. Aus der Periodizität ergibt sich, dass man das Feld der Ausgangsreihe durch Überlagerung von  $3$  Wirbelreihen mit der Gitterkonstanten  $a/3$  aufbauen kann.

In diesem Abschnitt wollen wir nur den Fall betrachten, dass die Zirkulation der Wirbel zeitlich konstant ist. Dagegen lassen wir zu, dass sich die Lage der Wirbel mit der Zeit ändert.

In den Punkten  $P = m i a e^{-i\beta}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) mögen Wirbel der Zirkulation  $I(\eta_m)$  mit  $I(\eta_m + 1) = I(\eta_m)$  liegen. Gesucht ist das von diesen Wirbeln erzeugte Feld.

Die Wirbel in den Punkten  $P = (m + k/3) i a e^{-i\beta}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), die die gleiche Zirkulation  $I(\eta_m)$  und den Abstand  $a/3$  haben, erzeugen das Feld

$$u - iv = \frac{I(\eta_m)}{2 a/3} e^{i\beta} \left\{ \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi z e^{i\beta}}{i a/3} - \pi \eta_m \right) + i \right\},$$

das weit vor dem Gitter verschwindet. Das gesuchte Feld ergibt sich durch Überlagerung der Felder für  $m = 0, 1, \dots, 3 - 1$ , so dass also

$$U - iV = \frac{e^{i\beta}}{2 a/3} \sum_{m=0}^{3-1} I(\eta_m) \left\{ \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi z e^{i\beta}}{i a/3} - \pi \eta_m \right) + i \right\}$$

Geht man zu dem Fall kleiner Teilung  $a/c$ , das heisst grosser Blattzahl über, so kann man die Summe näherungsweise durch ein Integral ersetzen und

erhält, falls der Aufpunkt nicht in einem Wirbel liegt, also  $\xi \neq 0$  ist,

$$U - iV = \frac{e^{i\beta}}{2a} \int_0^1 \Gamma(\eta') \left\{ \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi z e^{i\beta}}{i a^3} - \pi \eta' \right) + i \right\} d\eta'. \quad (1)$$

Dies gilt, falls die Wirbel ruhen. Schwingen die Wirbel und ist

$$\Delta z(\eta_m, s) = a^3 [\Delta_1(\eta_m, s) + i \Delta_2(\eta_m, s)]$$

die Auslenkung des  $m$ -ten Wirbels, wobei wir vorläufig noch annehmen,  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  reell sind, so ergibt sich aus (5, 1)

$$U - iV = \frac{e^{i\beta}}{2a} \int_0^1 \Gamma(\eta') \left\{ \operatorname{ctg} \left[ \frac{\pi e^{i\beta}}{i a^3} [z - \Delta z(\eta', s)] - \pi \eta' \right] + i \right\} d\eta'$$

und für kleine Schwingungsamplituden

$$\begin{aligned} U - iV = \frac{e^{i\beta}}{2a} \int_0^1 \left\{ \Gamma(\eta') + i \frac{e^{i\beta}}{a^3} \cdot \frac{\partial \Gamma(\eta') \Delta z(\eta', s)}{\partial \eta'} \right\} & \\ \times \left\{ \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi e^{i\beta}}{i a^3} z - \pi \eta' \right) + i \right\} d\eta', & \end{aligned} \quad (2)$$

falls  $\xi \neq 0$ . Versteht man unter

$$\begin{aligned} k_x(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \left\{ e^{i\beta} \operatorname{ctg} \left[ \frac{\kappa}{2i} \xi + \pi \eta \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\beta} \operatorname{ctg} \left[ -\frac{\bar{\kappa}}{2i} \xi + \pi \eta \right] - 2 \sin \beta \right\}, \\ k_y(\xi, \eta) &= \frac{i}{4} \left\{ e^{i\beta} \operatorname{ctg} \left[ \frac{\kappa}{2i} \xi + \pi \eta \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\beta} \operatorname{ctg} \left[ -\frac{\bar{\kappa}}{2i} \xi + \pi \eta \right] + 2 i \cos \beta \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

sowie

$$\begin{aligned} k_{1x}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \left\{ i e^{2i\beta} \operatorname{ctg} \left[ \frac{\kappa}{2i} \xi + \pi \eta \right] \right. \\ &\quad \left. - i e^{-2i\beta} \operatorname{ctg} \left[ -\frac{\bar{\kappa}}{2i} \xi + \pi \eta \right] - 2 \cos 2\beta \right\}, \\ k_{1y}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \left\{ -e^{2i\beta} \operatorname{ctg} \left[ \frac{\kappa}{2i} \xi + \pi \eta \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-2i\beta} \operatorname{ctg} \left[ -\frac{\bar{\kappa}}{2i} \xi + \pi \eta \right] + 2 \sin 2\beta \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

mit

$$\kappa = \frac{2\pi c}{a^3} e^{i\beta} = \Omega e^{i\beta},$$

kann damit das Feld der schwingenden Wirbelreihe zeitlich konstanter Zirkulation in der Form

$$= \frac{1}{a} \int_0^1 \left\{ \Gamma(\eta') k_x(\xi, \eta - \eta') + \frac{\partial \Gamma(\eta')}{\partial \eta'} \frac{\Delta_1(\eta', s)}{\partial \eta'} k_{1x}(\xi, \eta - \eta') + \frac{\partial \Gamma(\eta')}{\partial \eta'} \frac{\Delta_2(\eta', s)}{\partial \eta'} k_{1y}(\xi, \eta - \eta') \right\} d\eta',$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^1 \left\{ \Gamma(\eta') k_y(\xi, \eta - \eta') + \frac{\partial \Gamma(\eta')}{\partial \eta'} \frac{\Delta_1(\eta', s)}{\partial \eta'} k_{1y}(\xi, \eta - \eta') - \frac{\partial \Gamma(\eta')}{\partial \eta'} \frac{\Delta_2(\eta', s)}{\partial \eta'} k_{1x}(\xi, \eta - \eta') \right\} d\eta' \quad (5,5)$$

beschrieben werden.

Wir wollen noch die Fourier-Integrale der Kerne (5, 2) und (5, 3) angeben. Beachtet man, dass für alle ganzzahligen  $n$

$$\int_0^1 e^{i2\pi n \eta} \operatorname{ctg} \left[ \frac{A}{2i} + \pi \eta \right] d\eta = i \left( \frac{n}{|n|} + \frac{\Re A}{|\Re A|} \right) e^{-A n}$$

, falls der Realteil von  $A$ , das heisst  $\Re A \neq 0$  ist und dem Ausdruck  $n/|n|$  für  $n = 0$  der Wert 0 beigelegt wird. Setzt man weiter  $|\beta| < \pi/2$  voraus, so für  $\xi \neq 0$

$$\frac{\Re \xi}{|\Re \xi|} = \frac{\xi}{|\xi|},$$

so erhält man für  $\xi \neq 0$  und  $n \neq 0$  die Fourier-Integrale

$$\begin{aligned} k_x^{(0)}(\xi) &= \frac{i}{4} \left\{ e^{i\beta} \left( \frac{n}{|n|} + \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{-n\pi\xi} + e^{-i\beta} \left( \frac{n}{|n|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{n\pi\xi} \right\}, \\ k_y^{(0)}(\xi) &= \frac{1}{4} \left\{ -e^{i\beta} \left( \frac{n}{|n|} + \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{-n\pi\xi} + e^{-i\beta} \left( \frac{n}{|n|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{n\pi\xi} \right\} \end{aligned} \quad (5,6)$$

wie

$$\begin{aligned} k_x^{(0)}(\xi) &= -\frac{1}{4} \left\{ e^{2i\beta} \left( \frac{n}{|n|} + \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{-n\pi\xi} - e^{-2i\beta} \left( \frac{n}{|n|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{n\pi\xi} \right\}, \\ k_y^{(0)}(\xi) &= -\frac{i}{4} \left\{ e^{2i\beta} \left( \frac{n}{|n|} + \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{-n\pi\xi} + e^{-2i\beta} \left( \frac{n}{|n|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{n\pi\xi} \right\} \end{aligned} \quad (5,7)$$

und für  $n = 0$

$$k_x^{(0)}(\xi) = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} \right) \sin \beta; \quad k_y^{(0)}(\xi) = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} \right) \cos \beta. \quad (5,8)$$

Diese Formeln gelten für  $\xi \neq 0$ . An der Stelle  $\xi = 0$  ist das Geschwindigkeitsfeld unstetig, da dort die Wirbelreihe liegt.



## 6. Geschwindigkeitsfeld einer Wirbelreihe mit zeitlich veränderlicher Zirkulation

In der  $(\xi, \eta)$ -Ebene mögen in den Punkten  $\xi = 0, \eta_m = m/3$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) Wirbel der Zirkulation  $\Gamma(\eta_m) e^{i\omega s}$  liegen, wobei  $\Gamma(\eta_m)$  in  $\eta_m$  Periode 1 hat. Von diesen Wirbeln schwimmen in der Masse, wie sich die Zirkulation ändert, freie Wirbel mit der Geschwindigkeit  $W_1$  ab. Bezeichnet man die Dichte dieser freien Wirbel im Punkte  $\xi > 0, \eta_m$  mit  $\varepsilon(\xi, \eta_m, s)$ , so ist also

$$\varepsilon(\xi, \eta_m, s) = \varepsilon(0, \eta_m, s - \xi)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s} \Gamma(\eta_m) e^{i\omega s} + c \varepsilon(0, \eta_m, s) = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\varepsilon(\xi, \eta_m, s) = -i\omega \frac{1}{c} \Gamma(\eta_m) e^{i\omega(s-\xi)}. \quad (6)$$

Nach (5, 5) wird das Feld einer ruhenden Wirbelreihe, die aus Wirbeln der Zirkulation  $\Gamma(\eta_m)$  in den Punkten  $\xi = 0, \eta = 0, \pm 1/3, \pm 2/3, \dots$  aufgebaut ist, für den Fall kleiner Teilung durch

$$u = \frac{1}{a} \int_0^1 \Gamma(\eta') k_x(\xi, \eta - \eta') d\eta', \quad v = \frac{1}{a} \int_0^1 \Gamma(\eta') k_y(\xi, \eta - \eta') d\eta'$$

beschrieben. Aus diesem Elementarfeld kann das gesuchte Feld der instationären Wirbelreihe aufgebaut werden, und man erhält hierfür

$$u = e^{i\omega s} \frac{1}{a} \int_0^1 d\eta' \Gamma(\eta') \left[ k_x(\xi, \eta - \eta') - i\omega \int_0^\infty e^{-i\omega \xi'} k_x(\xi - \xi', \eta - \eta') d\xi' \right]$$

$$v = e^{i\omega s} \frac{1}{a} \int_0^1 d\eta' \Gamma(\eta') \left[ k_y(\xi, \eta - \eta') - i\omega \int_0^\infty e^{-i\omega \xi'} k_y(\xi - \xi', \eta - \eta') d\xi' \right] \quad (7)$$

wobei die beiden inneren Integrale den Einfluss der abschwimmenden freien Wirbel darstellen.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Formeln nur Mittelwerte sind. Dadurch, dass wir früher den Summationsprozess durch eine Integration ersetzt haben, haben wir eine «Verschmierung» in der  $\eta$ -Richtung vorgenommen, durch die die Sprünge, welche die Tangentialgeschwindigkeiten an einer Wirbelschicht erleiden, herausfallen. Da wir aber zur Erfüllung der Randbedingung nur die Normalgeschwindigkeiten brauchen, so stört diese Mittelung

ung nicht. Die Tangentialgeschwindigkeiten benötigen wir nur zur Berechnung der an der Vorderkante angreifenden Kraft, und zwar in der Form eines Mittelwertes über eine volle Umgebung.

Zur Abkürzung führen wir noch in (6, 2) die Kerne

$$\left. \begin{aligned} K_x(\xi, \eta) &= k_x(\xi, \eta) - i \omega \int_0^{\infty} e^{-i \omega \xi'} k_x(\xi - \xi', \eta) d\xi' , \\ K_y(\xi, \eta) &= k_y(\xi, \eta) - i \omega \int_0^{\infty} e^{-i \omega \xi'} k_y(\xi - \xi', \eta) d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (6,3)$$

n, deren Fourier-Transformierte sich mit

$$\kappa_n = \frac{1}{n \kappa - i \omega}, \quad \bar{\kappa}_n = \frac{1}{n \bar{\kappa} + i \omega}$$

ur  $n \neq 0$  in der Form

$$\left. \begin{aligned} K_x^{(n)}(\xi) &= \frac{i}{4} \left\{ (1 + i \omega \kappa_n) e^{i\beta} \left( \frac{n}{|n|} + \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{-n \kappa \xi} \right. \\ &\quad + (1 - i \omega \bar{\kappa}_n) e^{-i\beta} \left( \frac{n}{|n|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{n \bar{\kappa} \xi} \\ &\quad \left. - i \omega \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} \right) (e^{i\beta} \kappa_n + e^{-i\beta} \bar{\kappa}_n) e^{-i \omega \xi} \right\} , \\ K_y^{(n)}(\xi) &= \frac{1}{4} \left\{ - (1 + i \omega \kappa_n) e^{i\beta} \left( \frac{n}{|n|} + \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{-n \kappa \xi} \right. \\ &\quad + (1 - i \omega \bar{\kappa}_n) e^{-i\beta} \left( \frac{n}{|n|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right) e^{n \bar{\kappa} \xi} \\ &\quad \left. + i \omega \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} \right) (e^{i\beta} \kappa_n - e^{-i\beta} \bar{\kappa}_n) e^{-i \omega \xi} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6,4)$$

zw. für  $n = 0$

$$\begin{aligned} K_x^{(0)}(\xi) &= -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} \right) \sin \beta e^{-i \omega \xi}; \quad K_y^{(0)}(\xi) = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{|\xi|} \right) \cos \beta e^{-i \omega \xi} \end{aligned} \quad (6,5)$$

hreiben lassen. Diese Funktionen sind wieder für  $\xi = 0$  nicht definiert.

Mit den so definierten Grössen erhält man dann nach dem Faltungssatz für die Fourier-Transformierten des durch (6, 2) gegebenen Feldes der instationären Wirbelreihe die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} u^{(n)}(\xi, s) &= u^{(n)}(\xi) e^{i \omega s} = e^{i \omega s} \frac{\Gamma^{(n)}}{a} K_x^{(n)}(\xi), \\ v^{(n)}(\xi, s) &= v^{(n)}(\xi) e^{i \omega s} = e^{i \omega s} \frac{\Gamma^{(n)}}{a} K_y^{(n)}(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (6,6)$$

urch die das gesuchte Feld beschrieben wird.

## 7. Geschwindigkeitsfeld um den schwingenden Schaufelkranz, Randbedingung

Dieses Feld setzt sich zusammen aus:

1. dem Feld der Anströmung

$$u_1 = W_0 \cos \alpha, \quad v_1 = W_0 \sin \alpha;$$

2. dem stationären Wirbelfeld (ruhende Wirbel der Zirkulation  $\Gamma_0$  in den Vorderkanten)

$$u_2 = \frac{\Gamma_0}{a} k_x^{(0)}(\xi) = -\frac{\Gamma_0}{2a} \left(1 + \frac{\xi}{|\xi|}\right) \sin \beta;$$

$$v_2 = \frac{\Gamma_0}{a} k_y^{(0)}(\xi) = \frac{\Gamma_0}{2a} \left(1 + \frac{\xi}{|\xi|}\right) \cos \beta;$$

3. dem instationären Feld, das durch das Schwingen der Vorderkantenwirbel der Zirkulation  $\Gamma_0$  entsteht. Hierfür ist nach (5, 5)

$$u_3 = \frac{\Gamma_0}{a} \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \Delta_1(0, \eta', s)}{\partial \eta'} k_{1x}(\xi, \eta - \eta') + \frac{\partial \Delta_2(0, \eta', s)}{\partial \eta'} k_{1y}(\xi, \eta - \eta') \right\} d\eta'$$

$$v_3 = \frac{\Gamma_0}{a} \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \Delta_1(0, \eta', s)}{\partial \eta'} k_{1y}(\xi, \eta - \eta') - \frac{\partial \Delta_2(0, \eta', s)}{\partial \eta'} k_{1x}(\xi, \eta - \eta') \right\} d\eta'$$

mit den Fourier-Transformierten

$$u_3^{(n)} = -i 2 \pi n \frac{\Gamma_0}{a} [k_{1x}^{(n)}(\xi) \Delta_1^{(n)}(0) + k_{1y}^{(n)}(\xi) \Delta_2^{(n)}(0)] e^{i \omega s},$$

$$v_3^{(n)} = -i 2 \pi n \frac{\Gamma_0}{a} [k_{1y}^{(n)}(\xi) \Delta_1^{(n)}(0) - k_{1x}^{(n)}(\xi) \Delta_2^{(n)}(0)] e^{i \omega s};$$

4. dem Feld der instationären Vorderkantenwirbel der Zirkulation

$$W_1 c G(\eta) e^{i \omega s}.$$

Die Fourier-Transformierten dieses Feldes ergeben sich nach (6, 6) zu

$$u_4^{(n)} = W_1 \frac{c}{a} G^{(n)} K_x^{(n)}(\xi) e^{i \omega s}, \quad v_4^{(n)} = W_1 \frac{c}{a} G^{(n)} K_y^{(n)}(\xi) e^{i \omega s};$$

5. dem Feld der instationären Schaufelbewegung mit der Dichte

$$W_1 g(\xi, \eta) e^{i \omega s}.$$

Die Fourier-Transformierten dieses Feldes sind

$$u_5^{(n)} = W_1 \frac{c}{a} \int_0^1 g^{(n)}(\xi') K_x^{(n)}(\xi - \xi') d\xi' e^{i \omega s},$$

$$v_5^{(n)} = W_1 \frac{c}{a} \int_0^1 g^{(n)}(\xi') K_y^{(n)}(\xi - \xi') d\xi' e^{i \omega s}.$$

mit kann das gesamte Geschwindigkeitsfeld um die Schaufeln in der Form

$$\tilde{U} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5, \quad \tilde{V} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \quad (7,1)$$

beschrieben werden. Wir benutzen dabei die Zeichen  $\tilde{U}$  bzw.  $\tilde{V}$ , um anzudeuten, dass es sich nur um Mittelwerte handelt. Weiter sei hervorgehoben, dass die Felder 2, 3 und 4 an der Vorderkante ( $\xi = 0$ ) unstetig sind.

Um die Randbedingung aufzustellen, denken wir uns das Gitter mit der Geschwindigkeit  $(-W_0 \cos \alpha, -W_0 \sin \alpha)$  bewegt und ausserdem schwingend. Die Randbedingung verlangt dann, dass die Wirbelbelegung des Gitters so beschaffen ist, dass in jedem Schaufelpunkt die Normalkomponente der dort von den Wirbeln induzierten Geschwindigkeit gleich derjenigen Geschwindigkeit ist, mit der sich der betreffende Schaufelpunkt in Richtung seiner Schaufelmittellinie bewegt. Bezeichnen wir also mit  $\mathbf{x}$  den Vektor, der die jeweilige Lage des betrachteten Schaufelpunktes beschreibt, mit  $\mathbf{n}$  die Schaufelnormale in diesem Punkt und mit  $\mathbf{v}$  die dort von den Wirbeln induzierte Geschwindigkeit, also

$$\mathbf{v} = \{u_2 + u_3 + u_4 + u_5, v_2 + v_3 + v_4 + v_5\},$$

lautet die Randbedingung

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \circ \mathbf{n} = \mathbf{v} \circ \mathbf{n}. \quad (7,2)$$

Setzt man für den Schaufelpunkt die Gitterkoordinaten  $\xi, \eta$ , so ist

$$\mathbf{x} = \{x(\xi, \eta, t), y(\xi, \eta, t)\}$$

$$x(\xi, \eta, t) = -W_0 t \cos \alpha + c \xi + a_3 \eta \sin \beta + a_3 \Delta_1(\xi, \eta, s),$$

$$y(\xi, \eta, t) = -W_0 t \sin \alpha + a_3 \eta \cos \beta + a_3 \Delta_2(\xi, \eta, s).$$

Weiter ist

$$\mathbf{n} \sim \left\{ -\frac{a_3}{c} \cdot \frac{\partial \Delta_2}{\partial \xi}, 1 \right\}.$$

Setzt man damit in die Randbedingung (7, 2) ein und berücksichtigt nur die zeitlich veränderlichen Schwingungsamplituden linearer Glieder, so erhält man die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} &W_0 \sin \alpha + W_0 \cos \alpha \frac{a_3}{c} \cdot \frac{\partial \Delta_2}{\partial \xi} \\ &+ W_1 \frac{a_3}{c} \cdot \frac{\partial \Delta_2}{\partial s} = -\frac{a_3}{c} u_2 \frac{\partial \Delta_2}{\partial \xi} + v_2 + v_3 + v_4 + v_5, \end{aligned} \right\} \quad (7,3)$$

die für  $0 < \xi < 1$ , alle  $\eta$  und  $s$  erfüllt sein muss. Dies ist die Bestimmungsgleichung für die Wirbelbelegungen  $\Gamma_0, W_1 \propto G(\eta), W_1 g(\xi, \eta)$ . Sie zerfällt in einen stationären und einen instationären Anteil, die für sich befriedigt sein müssen.

Der stationäre Anteil von (7, 3) liefert

$$-W_0 \sin \alpha = v_2, \quad \text{also} \quad \Gamma_0 = \frac{a W_0 \sin \alpha}{\cos \beta}.$$

Die stationäre Abströmggeschwindigkeit ergibt sich damit für  $\xi > 0$  zu

$$W_1 = W_0 \cos \alpha + u_2 = W_0 \cos \alpha - \frac{\Gamma_0}{a} \sin \beta = \frac{W_0 \cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}, \quad (1)$$

und für den Mittelwert der stationären Geschwindigkeit in der Umgebung Vorderkante findet man

$$w_\infty = \left\{ W_0 \cos \alpha - \frac{\Gamma_0}{2a} \sin \beta, \quad W_0 \sin \alpha - \frac{\Gamma_0}{2a} \cos \beta \right\} = W_\infty \{ \cos \alpha_\infty, \sin \alpha_\infty \}$$

mit

$$\operatorname{tg} \alpha_\infty = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad W_\infty = \frac{1}{2} W_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_\infty}.$$

Auf jede Schaufel wirkt senkrecht zu  $w_\infty$  die Kraft

$$K = \varrho W_\infty \Gamma_0 = \frac{1}{2} \varrho W_\infty^2 c \frac{4a}{c \cos \beta} \sin \alpha_\infty.$$

Für den Auftriebsbeiwert ergibt sich also das bekannte Ergebnis

$$c_a = \frac{4a}{c \cos \beta} \sin \alpha_\infty. \quad (1)$$

Wir führen hier noch den modifizierten Auftriebsbeiwert  $C_a$  ein, der durch

$$C_a = 2 \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \quad (1)$$

definiert wird. Damit ist dann

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} W_1 c C_a. \quad (1)$$

Der instationäre Anteil der Randbedingung (7, 3) liefert damit

$$v_4 + v_5 = W_1 \frac{a}{c} \left[ \frac{\partial \Delta_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} + i \omega \Delta_2(\xi, \eta) \right] e^{i \omega s} - v_3$$

für  $0 < \xi < 1$ . Geht man darin zu den Fourier-Transformierten über und steht für  $0 < \xi < 1$  unter  $H^{(n)}(\xi)$  den Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} H^{(n)}(\xi) &= \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \left( \frac{\partial \Delta_2^{(n)}(\xi)}{\partial \xi} + i \omega \Delta_2^{(n)}(\xi) \right) \\ &\quad + i \tau n C_a [\dot{h}_{1v}^{(n)}(\xi) \Delta_1^{(n)}(0) - \dot{h}_{1a}^{(n)}(\xi) \Delta_2^{(n)}(0)], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

er durch die Schwingungsform und die stationäre Anströmung des Gitters gegeben ist, so liefert der instationäre Anteil die Integralgleichung

$$G^{(n)} K_y^{(n)}(\xi) + \int_0^1 g^{(n)}(\xi') K_y^{(n)}(\xi - \xi') d\xi' = H^{(n)}(\xi) \quad \text{für } 0 < \xi < 1 \quad (7,9)$$

er Bestimmung der noch fehlenden Wirbelbelegungen  $G^{(n)}$  und  $g^{(n)}(\xi)$ .

Durch die Gleichung (7, 8) ist die Funktion  $H^{(n)}(\xi)$  nur für  $\xi > 0$  definiert. Unter  $H^{(n)}(0)$  wollen wir noch diejenige Grösse verstehen, die man erhält, wenn man mit  $\xi$  von positiven Werten her gegen Null geht. Es ist dann

$$H^{(n)}(0) = \frac{a}{c} \cdot \frac{a^3}{c} [\mathcal{A}_2^{(n)}(0) - i \omega \mathcal{A}_2^{(n)}(0)] - \frac{\pi}{2} C_a [n \mathcal{A}_1^{(n)}(0) + i n \mathcal{A}_2^{(n)}(0)] e^{2i\beta n}, \quad (7,10)$$

bei

$$\frac{n}{|n|} \beta = \beta_n$$

gesetzt ist.

## 8. Lösung der Integralgleichung des schwingenden Gitters

Die Integralgleichung (7, 9) soll für gegebenes  $H^{(n)}(\xi)$  gelöst werden. Wir beschränken uns dabei zunächst einmal auf den Fall  $n > 0$ . Mit den Konstanten

$$a_n = (1 + i \omega \kappa_n) e^{i\beta}; \quad b_n = i \omega (e^{i\beta} \kappa_n - e^{-i\beta} \bar{\kappa}_n)$$

nimmt die Integralgleichung die Form

$$\left. \begin{aligned} & a_n [-a_n e^{-n\kappa\xi} + b_n e^{-i\omega\xi}] - a_n \int_0^\xi g^{(n)}(\xi') e^{-n\kappa(\xi-\xi')} d\xi' \\ & \bar{a}_n \int_0^1 g^{(n)}(\xi') e^{n\bar{\kappa}(\xi-\xi')} d\xi' + b_n \int_0^\xi g^{(n)}(\xi') e^{-i\omega(\xi-\xi')} d\xi' = 2 H^{(n)}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (8,1)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $e^{-n\bar{\kappa}\xi}$ , differenziert und multipliziert mit  $e^{n\bar{\kappa}\xi}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} & n [a(\kappa + \bar{\kappa}) e^{-n\kappa\xi} - b_n(i\omega + n\bar{\kappa}) e^{-i\omega\xi}] + g^{(n)}(\xi) [-a_n - \bar{a}_n + b_n] \\ & n a_n(\kappa + \bar{\kappa}) \int_0^\xi g^{(n)}(\xi') e^{-n\kappa(\xi-\xi')} d\xi' - b_n(i\omega + n\bar{\kappa}) \int_0^\xi g^{(n)}(\xi') e^{-i\omega(\xi-\xi')} d\xi' \\ & = 2 [H^{(n)'}(\xi) - n \bar{\kappa} H^{(n)}(\xi)]. \end{aligned}$$



Durch entsprechende Operationen kann man auch noch die beiden restlichen Integrale wegschaffen und gelangt dann zu der Differentialgleichung

$$g^{(n)''}(\xi) \cos \beta = -H^{(n)'''}(\xi) - i[\omega + 2n\Omega \sin \beta] H^{(n)''}(\xi) + [(n\Omega)^2 + 2\omega n\Omega \sin \beta] H^{(n)'}(\xi) + i\omega (n\Omega)^2 H^{(n)}(\xi).$$

Setzt man

$$H_1^{(n)}(\xi) = - \int_{\xi}^1 H^{(n)}(\xi') d\xi' \quad \text{und} \quad H_2^{(n)}(\xi) = - \int_{\xi}^1 H_1^{(n)}(\xi') d\xi', \quad (8)$$

so folgt

$$\left. \begin{aligned} g^{(n)}(\xi) \cos \beta = & -H^{(n)'}(\xi) - i[\omega + 2n\Omega \sin \beta] H^{(n)}(\xi) \\ & + [(n\Omega)^2 + 2\omega n\Omega \sin \beta] H_1^{(n)}(\xi) \\ & + i\omega (n\Omega)^2 H_2^{(n)}(\xi) + E_n \xi + F_n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Um schliesslich noch die Konstanten  $G^{(n)}$ ,  $E_n$ ,  $F_n$  zu erhalten, gehe man mit (8, 3) in die Gleichung (8, 1) ein. Damit die sich dann ergebende Beziehung befriedigt ist, muss

$$E_n = - \frac{i\omega (n\Omega)^2 e^{-i\beta} H^{(n)}(1) - \omega^2 (n\Omega)^2 e^{i\beta} H_1^{(n)}(0) + \omega^2 (n\Omega)^3 H_2^{(n)}(0)}{n\Omega + i\omega (n\Omega + 2 \cos \beta)},$$

$$F_n = - \left( \frac{\omega^2 (n\Omega) e^{2i\beta} (1 + n\Omega e^{-i\beta}) [H_1^{(n)}(0) - n\Omega e^{-i\beta} H_2^{(n)}(0)]}{n\Omega + i\omega (n\Omega + 2 \cos \beta)} + \frac{n\Omega e^{-2i\beta} (i\omega + n\Omega e^{i\beta}) H^{(n)}(1)}{n\Omega + i\omega (n\Omega + 2 \cos \beta)} \right)$$

sowie

$$G^{(n)} \cos \beta = -H^{(n)}(0) + \frac{n\Omega e^{-2i\beta} \{ -H^{(n)}(1) + [n\Omega e^{i\beta} + i\omega n\Omega e^{i\beta} + i\omega] H_1^{(n)}(0) + i\omega n\Omega e^{i\beta} H_2^{(n)}(0) \}}{n\Omega + i\omega (n\Omega + 2 \cos \beta)}$$

sein. Damit ist die Integralgleichung (7, 9) für positive  $n$  vollständig gelöst.

Ist  $n < 0$ , so nimmt die Integralgleichung die Form

$$\left. \begin{aligned} [-\bar{a}_n e^{n\bar{\omega}\xi} + b_n e^{-i\omega\xi}] G^{(n)} - \bar{a}_n \int_0^{\xi} g^{(n)}(\xi') e^{n\bar{\omega}(\xi-\xi')} d\xi' \\ + a_n \int_{\xi}^1 g^{(n)}(\xi') e^{-n\omega(\xi-\xi')} d\xi' + b_n \int_0^{\xi} g^{(n)}(\xi') e^{-i\omega(\xi-\xi')} d\xi' = 2 H^{(n)}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

an. Nun ist aber, wie man sich leicht überzeugt, für  $n \neq 0$

$$\bar{a}_{-|n|}(\beta) = a_{|n|}(-\beta), \quad a_{-|n|}(\beta) = \bar{a}_{|n|}(-\beta) \quad \text{sowie} \quad b_{-|n|}(\beta) = b_{|n|}(-\beta),$$

Es heisst, die Integralgleichung (8, 4) erhält man dadurch, dass man in (8, 1), gesehen von  $G^{(n)}$ ,  $g^{(n)}$  und  $H^{(n)}$ , die Grösse  $n$  durch  $|n|$  und  $\beta$  durch  $-\beta$  ersetzt. Da wir aber bei der Lösung dieser Integralgleichung keine Voraussetzung über das Vorzeichen von  $\beta$  gemacht haben, so gilt diese Symmetrieeigenschaft auch für die Lösung, und man erhält allgemein:

Ist  $n \neq 0$ , so wird die Integralgleichung des schwingenden Schaufelkranzes 9) durch

$$\left. \begin{aligned} G^{(n)} \cos \beta &= -H^{(n)}(0) + \left( \frac{|n| \Omega e^{-2i\beta n}}{|n| \Omega + i\omega (|n| \Omega + 2 \cos \beta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H^{(n)}(1) e^{-i\beta n} - i\omega |n| \Omega e^{i\beta n} - i\omega H_1^{(n)}(0) - i\omega |n| \Omega e^{i\beta n} H_2^{(n)}(0)}{|n| \Omega + i\omega (|n| \Omega + 2 \cos \beta)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8,5)$$

wie

$$\begin{aligned} g^{(n)}(\xi) \cos \beta &= -H^{(n)'}(\xi) - i[\omega + 2|n| \Omega \sin \beta_n] H^{(n)}(\xi) \\ &\quad + [(n \Omega)^2 + 2\omega |n| \Omega \sin \beta_n] H_1^{(n)}(\xi) \\ &\quad + i\omega (n \Omega)^2 H_2^{(n)}(\xi) + E_n \xi + F_n \end{aligned}$$

t

$$\begin{aligned} &= - \frac{i\omega (n \Omega)^2 e^{-i\beta n} H^{(n)}(1) - \omega^2 (n \Omega)^2 e^{i\beta n} H_1^{(n)}(0) + \omega^2 (|n| \Omega)^3 H_2^{(n)}(0)}{|n| \Omega + i\omega (|n| \Omega + 2 \cos \beta)}, \\ &= - \left( \frac{\omega^2 |n| \Omega e^{2i\beta n} (1 + |n| \Omega e^{-i\beta n}) [H_1^{(n)}(0) - |n| \Omega e^{-i\beta n} H_2^{(n)}(0)]}{|n| \Omega + i\omega (|n| \Omega + 2 \cos \beta)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|n| \Omega e^{-2i\beta n} (i\omega + |n| \Omega e^{i\beta n}) H^{(n)}(1)}{|n| \Omega + i\omega (|n| \Omega + 2 \cos \beta)} \right) \end{aligned}$$

löst.

Zu erledigen bleibt schliesslich nur noch der Fall  $n = 0$ . Die Integralgleichung nimmt dann die Form

$$-G^{(0)} \cos \beta e^{-i\omega \xi} = \int_0^\xi g^{(0)}(\xi') \cos \beta e^{-i\omega(\xi - \xi')} d\xi' - H^{(0)}(\xi)$$

i. Daraus folgt

$$G^{(0)} \cos \beta = -H^{(0)}(0)$$

wie

$$g^{(0)}(\xi) \cos \beta = -H^{(0)'}(\xi) - i\omega H^{(0)}(\xi),$$

Es heisst, die oben angegebene Lösung (8, 5) ist auch für  $n = 0$  gültig.

Damit ist die Integralgleichung des schwingenden Schaufelkranzes kleiner Teilung vollständig gelöst, falls die Auslenkungen der Schaufeln gegeben sind.

### 9. $C_a$ -Anteil der gebundenen Wirbel

Die gebundenen instationären Wirbel sind nach Abschnitt 8 durch die Funktion  $H^{(n)}(\xi)$  vollständig bestimmt. Diese Funktion ist durch die Schwingungsform und die Anströmung des Schaufelkranzes gegeben; sie zerfällt in den vor  $C_a$  unabhängigen Anteil

$$H_0^{(n)}(\xi) = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \beta \left[ \frac{\partial \Delta_2^{(n)}(\xi)}{\partial \xi} + i \omega \Delta_2^{(n)}(\xi) \right] \quad (9,1)$$

und in den  $C_a$ -Anteil

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha^{(n)}(\xi) &= i \pi n C_a [k_{1y}^{(n)}(\xi) \Delta_1^{(n)}(0) - k_{1x}^{(n)}(\xi) \Delta_2^{(n)}(0)], \quad (0 < \xi < 1) \\ &= \frac{\pi}{2} C_a [n | \Delta_1^{(n)}(0) + i n \Delta_2^{(n)}(0)] e^{2i\beta n - |n| \Omega} e^{i\beta n \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (9,2)$$

Entsprechend der Zerlegung von  $H$  schreiben wir auch

$$g^{(n)}(\xi) = g_0^{(n)}(\xi) + g_\alpha^{(n)}(\xi) \quad \text{und} \quad G^{(n)} = G_0^{(n)} + G_\alpha^{(n)}. \quad (9,3)$$

Die vom Anstellwinkel  $\alpha$  abhängigen Anteile können, da in diese die Schwingungsform der Schaufeln nur durch Konstante eingeht, nach dem vorhergehenden Abschnitt berechnet werden, und man erhält

$$\left. \begin{aligned} g_\alpha^{(n)}(\xi) &= \pi C_a [n | \Delta_1^{(n)}(0) + i n \Delta_2^{(n)}(0)] \omega^2 e^{i\beta n} \frac{e^{i\beta n} + |n| \Omega - |n| \Omega \xi}{|n| \Omega + i \omega (|n| \Omega + 2 \cos \beta)}, \\ G_\alpha^{(n)} &= -\pi C_a [n | \Delta_1^{(n)}(0) + i n \Delta_2^{(n)}(0)] e^{i\beta n} \frac{|n| \Omega (1 + i \omega) + i \omega e^{i\beta n}}{|n| \Omega + i \omega (|n| \Omega + 2 \cos \beta)}. \end{aligned} \right\} \quad (9,4)$$

### 10. Kräfte am schwingenden Gitter

Um aus den Wirbelverteilungen die Kräfte berechnen zu können, brauchen wir noch die in dem betrachteten Punkt herrschende mittlere Geschwindigkeit. Wie schon früher dargelegt wurde, kann hierfür im Innern des Gitters die Geschwindigkeit  $W_1$  genommen werden. Bei der Bestimmung der auf die Vorderkante wirkenden Kraft reicht aber die Kenntnis der mittleren stationären Geschwindigkeit  $w_\infty = (u_\infty, v_\infty)$  in der Umgebung der Vorderkante nicht aus; man benötigt vielmehr die dort herrschenden mittleren Geschwindigkeiten einschließlich der in den Schwingungsamplituden linearen Glieder. Der Mittelungsprozess ist dabei über eine volle Umgebung des betrachteten Punktes zu

erstrecken. Durch den Übergang von der Summendarstellung zum Integral haben wir den Mittelungsprozess in der  $\eta$ -Richtung bereits durchgeführt und brauchen ihn jetzt nur noch in der  $\xi$ -Richtung zu vollziehen.

Unstetig an der Vorderkante sind nur die Geschwindigkeiten  $u_2, v_2; u_3, v_3$  und  $u_4, v_4$ . Da diese Funktionen für  $\xi = 0$  nicht definiert sind, so verstehen wir unter  $u_2(0, \eta), v_2(0, \eta), \dots$  die Mittelwerte. Weiter verstehen wir unter  $u_2(+0, \eta), v_2(+0, \eta), \dots$  diejenigen Werte, die sich ergeben, wenn man von positiven  $\xi$ -Werten her gegen Null geht. Dann ist für  $n \neq 0$ :

$$u_3^{(n)}(0) = -\frac{C_a}{2} |n| \pi W_1 \frac{c}{a} \{A_1^{(n)}(0) \sin 2\beta + A_2^{(n)}(0) \cos 2\beta\},$$

$$v_3^{(n)}(0) = -\frac{C_a}{2} |n| \pi W_1 \frac{c}{a} \{A_1^{(n)}(0) \cos 2\beta - A_2^{(n)}(0) \sin 2\beta\},$$

$$v_3^{(n)}(+0) = v_3^{(n)}(0) - i W_1 \frac{\pi c}{2a} C_a n \{A_1^{(n)}(0) \sin 2\beta + A_2^{(n)}(0) \cos 2\beta\}$$

sowie

$$u_4^{(n)}(0) = W_1 G^{(n)} \frac{i c}{4 a} \left\{ -\frac{n}{|n|} (1 - i \omega \kappa_n) e^{i\beta} + \frac{n}{|n|} (1 - i \omega \bar{\kappa}_n) e^{-i\beta} - i \omega (e^{i\beta} \kappa_n + e^{-i\beta} \bar{\kappa}_n) \right\},$$

$$v_4^{(n)}(0) = W_1 G^{(n)} \frac{c}{a} \left\{ -\frac{n}{|n|} (1 - i \omega \kappa_n) e^{i\beta} - \frac{n}{|n|} (1 - i \omega \bar{\kappa}_n) e^{-i\beta} - i \omega (e^{i\beta} \kappa_n - e^{-i\beta} \bar{\kappa}_n) \right\},$$

$$v_4^{(n)}(+0) = v_4^{(n)}(0) - \frac{c}{2a} W_1 G^{(n)} \cos \beta.$$

Die Geschwindigkeiten  $u_5^{(n)}(0)$  und  $v_5^{(n)}(0)$ , die an der Vorderkante stetig sind, können durch Integration berechnet werden. Einfacher ist es, die Randbedingung zu benutzen. Nach Abschnitt 7 ist

$$v_4^{(n)}(+0) + v_5^{(n)}(+0) = W_1 \frac{c}{a} H^{(n)}(0),$$

wobei  $H^{(n)}(0)$  durch (7, 10) gegeben ist. Aus dieser Beziehung kann dann  $v_5^{(n)}(+0)$  berechnet werden, und wegen der Stetigkeit an der Vorderkante ist diese Grösse auch gleich  $v_5^{(n)}(0)$ . Beachtet man weiter, dass für  $n \neq 0$

$$u_5^{(n)}(0) = i \frac{n}{|n|} v_5^{(n)}(0)$$

ist, so kann auch  $u_5^{(n)}(0)$  berechnet werden.

Ist  $n = 0$ , so ist

$$\begin{aligned} u_3^{(0)}(0) &= 0; & v_3^{(0)}(0) &= 0, \\ u_4^{(0)}(0) &= -\frac{1}{2} W_1 \frac{c}{a} G^{(0)} \sin \beta; & v_4^{(0)}(0) &= -\frac{1}{2} W_1 \frac{c}{a} G^{(0)} \cos \beta, \\ u_5^{(0)}(0) &= 0; & v_5^{(0)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Schliesslich gilt noch für die stationären Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} u_1(0) &= W_0 \cos \alpha; & v_1(0) &= W_0 \sin \alpha, \\ u_2(0) &= -\frac{\Gamma_0}{2a} \sin \beta - \frac{1}{2} W_0 \operatorname{tg} \beta \sin \alpha; & v_2(0) &= -\frac{\Gamma_0}{2a} \cos \beta - \frac{1}{2} W_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

so dass also die mittlere stationäre Anströmgeschwindigkeit der Vorderkante durch

$$\left. \begin{aligned} u_\infty &= u_1(0) + u_2(0) = W_1 \left( 1 + \frac{c}{4a} C_a \sin \beta \right), \\ v_\infty &= v_1(0) + v_2(0) = W_1 \frac{c}{4a} C_a \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (10,1)$$

gegeben wird.

Berücksichtigt man schliesslich noch, dass in der effektiven Anblasgeschwindigkeit der Vorderkante auch die Eigenbewegung der Profile – mit dem umgekehrten Vorzeichen – aufgenommen werden muss, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} U_e(0, \eta, s) &= u_\infty + u_3(0, \eta, s) + u_4(0, \eta, s) + u_5(0, \eta, s) \\ &\quad - W_1 i \omega \frac{a^3}{c} \Delta_1(0, \eta) e^{i\omega s} \\ &= u_\infty + e^{i\omega s} \sum_{-\infty}^{\infty} u_e^{(n)}(0) e^{-i2\pi n \eta} = u_\infty + u_e(0, \eta, s); \\ V_e(0, \eta, s) &= v_\infty + v_3(0, \eta, s) + v_4(0, \eta, s) + v_5(0, \eta, s) \\ &\quad - W_1 i \omega \frac{a^3}{c} \Delta_2(0, \eta) e^{i\omega s} \\ &= v_\infty + e^{i\omega s} \sum_{-\infty}^{\infty} v_e^{(n)}(0) e^{-i2\pi n \eta} = v_\infty + v_e(0, \eta, s) \end{aligned} \right\} \quad (10,2)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} u_e^{(n)}(0) &= -W_1 i \omega \frac{a^3}{c} \Delta_1^{(n)}(0) \\ &\quad + i \frac{n}{|n|} W_1 \frac{c}{a} \left\{ \frac{1}{2} G^{(n)} (\cos \beta + e^{i\beta n}) + H^{(n)}(0) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} W_1 C_a \frac{c}{a} \pi |n| [\sin 2\beta \Delta_1^{(n)}(0) + \cos 2\beta \Delta_2^{(n)}(0)], \end{aligned} \right\} \quad (10,3)$$

$$\left. \begin{aligned} v_e^{(n)}(0) = & -W_1 i \omega \frac{a}{c} \frac{3}{c} \Delta_2^{(n)}(0) + W_1 \frac{c}{a} \left[ H^{(n)}(0) + \frac{1}{2} G^{(n)} \cos \beta \right] \\ & - \frac{1}{2} W_1 C_a \frac{c}{a} \pi |n| [\cos 2 \beta \Delta_1^{(n)}(0) - \sin 2 \beta \Delta_2^{(n)}(0)] \end{aligned} \right\} \quad (10,3)$$

sowie

$$u_e^{(0)}(0) = -W_1 i \omega \frac{a}{c} \frac{3}{c} \Delta_1^{(0)}(0) - \frac{1}{2} W_1 \frac{c}{a} G^{(0)} \sin \beta ,$$

$$v_e^{(0)}(0) = -W_1 i \omega \frac{a}{c} \frac{3}{c} \Delta_2^{(0)}(0) - \frac{1}{2} W_1 \frac{c}{a} G^{(0)} \cos \beta .$$

Durch diese Formeln ist die mittlere effektive Anblasgeschwindigkeit der Vorderkante vollständig beschrieben. In den letzten vier Formeln gibt das erste Glied jeweils die negative Eigengeschwindigkeit der Vorderkante an, das zweite Glied rührt von der instationären Wirbelbelegung her, das dritte Glied schliesslich, falls es auftritt, wird von den schwingenden Vorderkantenwirbeln der Zirkulation  $\Gamma_0$  erzeugt. Diese Gleichungen gelten auch dann noch, falls das Gitter nicht schwingt, sondern instationär angeströmt wird. Nur ist dann natürlich für  $H$  die dem Problem entsprechende Grösse einzusetzen, weiter sind  $\Delta_1, \Delta_2$  gleich 0 zu setzen, und das erste Glied ist schliesslich durch die gegebene Störgeschwindigkeit am Orte der Vorderkante zu ersetzen.

Damit sind wir nun in der Lage, die Kräfte anzugeben, die auf die Schaufeln des Gitters wirken, und zwar greift an einem Element der Länge  $c d\xi$  und der Breite 1 aus dem Innern der  $m$ -ten Schaufel nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz, da dort die Dichte der tragenden Wirbel gleich  $W g(\xi, \eta_m, s)$  ist, die Kraft

$$dP_y = \rho c W_1^2 g(\xi, \eta_m, s) d\xi; \quad dP_x = 0$$

und an der Vorderkante entsprechend die Kraft

$$P_{0y} = \rho U_e(0, \eta_m, s) [\Gamma_0 + W_1 c G(\eta_m, s)] ,$$

$$P_{0x} = -\rho V_e(0, \eta_m, s) [\Gamma_0 + W_1 c G(\eta_m, s)]$$

an. In diesen ist der stationäre Anteil noch mit enthalten; um ihn von dem instationären Anteil zu trennen, schreiben wir

$$U_e(0, \eta, s) = u_\infty + u_e(0, \eta, s); \quad V(0, \eta, s) = v_\infty + v_e(0, \eta, s)$$

und erhalten in einer linearen Theorie für die an der Vorderkante angreifende Kraft

$$P_{0y} = \rho u_\infty \Gamma_0 + \rho u_\infty W_1 c G(\eta_m, s) + \rho u_e(0, \eta_m, s) \Gamma_0 ,$$

$$P_{0x} = -\rho v_\infty \Gamma_0 - \rho v_\infty W_1 c G(\eta_m, s) - \rho v_e(0, \eta_m, s) \Gamma_0 ,$$

in der jeweils die ersten Glieder die stationäre Kraft angeben. Für die gesamte



an der  $m$ -ten Schaufel angreifende Luftkraft ergibt sich somit

$$\left. \begin{aligned} P_y &= \varrho u_\infty \Gamma_0 + \varrho u_e(0, \eta_m, s) \Gamma_0 + \varrho u_\infty W_1 c G(\eta_m, s) \\ &\quad + \varrho c W_1^2 \int_0^1 g(\xi, \eta_m, s) d\xi, \\ P_x &= -\varrho v_\infty \Gamma_0 - \varrho v_e(0, \eta_m, s) \Gamma_0 - \varrho v_\infty W_1 c G(\eta_m, s) \end{aligned} \right\} \quad (10,4)$$

sowie für das an der Vorderkante angreifende und kopflastig positiv gezählte Moment

$$M = \varrho c^2 W_1 \int_0^1 \xi g(\xi, \eta_m, s) d\xi. \quad (10,5)$$

Durch die Formeln (10, 4) und (10, 5) ist die eingangs gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Diese Formeln gelten für eine lineare Theorie in der Teilung  $a/c$ . Da die stationäre Theorie - wie schon oben erwähnt - für Teilungswerte bis zu 0,8 eine sehr gute Näherung für den Auftrieb liefert, so wird man hoffen dürfen, dass für Schwingungsformen des Kranzes, bei denen die Anzahl der Harmonischen auf dem Umfang klein gegenüber der Blattzahl  $z$  ist, die vorliegende Theorie brauchbare Werte ergibt.

Bei der Herleitung der Formeln wurde vorausgesetzt, dass die Auslenkungen der Schaufeln dem Gesetz (3, 8) unterworfen sind, also harmonisch über den Umfang verteilt sind. Hat man es allgemeiner mit einer Schwingung der Form (3, 6) bzw. (3, 7) zu tun, so sind die Kräfte entsprechend zu überlagern.

Für die in die Gleichungen (10, 4) und (10, 5) eingehenden Grössen gilt noch der folgende Wegweiser: Die stationären Grössen  $u_\infty$ ,  $v_\infty$ ,  $W_1$  und  $I$  werden bei gegebener Anströmgeschwindigkeit  $W_0$  und gegebenem stationärem Anstellwinkel  $\alpha$  durch (7, 4), (7, 6) und (7, 7) bzw. (10, 1) geliefert. Die instationären Wirbelbelegungen  $G$  bzw.  $g$  sind den Formeln (8, 5) und (8, 2) zu entnehmen, wobei die Hilfsgrösse  $H^{(n)}(\xi)$  durch (7, 8) mit (5, 7) gegeben ist. Die mittleren instationären Geschwindigkeiten an der Vorderkante  $u_e(0)$  bzw.  $v_e(0)$  werden durch die Gleichungen (10, 3) mit (7, 10) gegeben.

## 11. Zusammenstellung der Luftkräfte für die wichtigsten Schwingungsformen

Es sollen hier explizit die Luftkräfte angegeben werden, die zu den drei elementaren Schwingungsformen über die Tiefe, nämlich

1. Schlagschwingung normal zur Schaufel (3, 9),
  2. Schwingung tangential zur Schaufel (3, 10),
  3. Drehschwingung um die Vorderkante (3, 11),
- aus denen sich die allgemeinste Biege-Dreh-Schwingung eines starren Profils

linear kombinieren lässt, gehören. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Schwingungsform über dem Umfang harmonisch ist, also in der Form (3, 8) dargestellt werden kann, wobei  $\omega$  eine beliebige positive oder negative reelle Zahl und  $n$  eine beliebige Zahl ist.

Durchweg verstehen wir dabei unter  $N$  die Grösse

$$N = (n \Omega)^2 + \omega^2 (|n| \Omega + 2 \cos \beta)^2$$

und setzen noch

$$\omega_n = \frac{n!}{|n|!} \omega \quad \text{und} \quad |n| \Omega = \sigma.$$

### a) Schlagschwingung normal zur Schaufel

Auslenkung der  $m$ -ten Schaufel:

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = \Delta_b e^{i\omega s - i2\pi n \eta m}.$$

Kräfte auf die  $m$ -te Schaufel:

$$P_y = q W_1^2 \Delta_b \frac{a}{c} e^{i\omega s - i2\pi n \eta m}$$

$$\times \left\{ A_{b_0} + i \omega B_{b_0} + \left( \frac{c}{a} C_a \right) (A_{b_1} + i \omega B_{b_1}) + \left( \frac{c}{a} C_a \right)^2 (A_{b_2} + i \omega B_{b_2}) \right\}.$$

$$P_x = q W_1^2 \Delta_b \frac{a}{c} e^{i\omega s - i2\pi n \eta m}$$

$$\times \left\{ \left( \frac{c}{a} C_a \right) (a_{b_1} + i \omega b_{b_1}) + \left( \frac{c}{a} C_a \right)^2 (a_{b_2} + i \omega b_{b_2}) \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_{b_0} &= \frac{-1}{12 N \cos \beta} \{ \omega_n 12 \sigma^2 \sin 2 \beta \\ &\quad + \omega_n^2 [2 \sigma^4 + 12 \sigma^3 \cos \beta + 24 \sigma^2 \cos^2 \beta + 24 \sigma \cos 2 \beta \cos \beta] \\ &\quad - \omega_n^4 (\sigma + 2 \cos \beta) [24 \cos \beta + 24 \sigma \cos^2 \beta + 8 \sigma^2 \cos \beta + \sigma^3] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{b_1} &= \frac{1}{2 N} \{ \sigma^3 \sin \beta + \omega_n \sigma^2 (\sigma \cos \beta - 2 \sin^2 \beta) \\ &\quad + \omega_n^3 (\sigma + 2 \cos \beta) [2 \sigma \cos 2 \beta + \sigma^2 \cos \beta] \}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{b_2} = \frac{1}{4 N} \{ \sigma^3 \sin^2 \beta + \omega_n^2 \sigma (\sigma + 2 \cos \beta) [\sigma \sin^2 \beta - \cos \beta \cos 2 \beta] \},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{b_0} &= \frac{-1}{4 N \cos \beta} \{ 2 \sigma^2 (\sigma + 2 \cos \beta)^2 - 8 \sigma \sin \beta \cos \beta [\sigma + 2 \cos \beta] \omega_n \\ &\quad + \omega_n^2 [\sigma^4 + 8 \sigma^3 \cos \beta + 24 \sigma^2 \cos^2 \beta + 32 \sigma \cos^3 \beta + 16 \cos^2 \beta] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{b_1} &= \frac{-1}{2 N} \left\{ \frac{1}{\omega_n} \sigma^3 \cos \beta + (\sigma + 2 \cos \beta) \sigma^2 \sin \beta \right. \\ &\quad \left. + \omega_n \sigma \cos \beta [\sigma^2 + 4 \sigma \cos \beta + 4 \cos 2 \beta] \right\}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{b_2} = -\frac{1}{4 N} \sigma^2 \cos \beta,$$

$$a_{b_1} = \frac{1}{8N} \{ \omega_n \sigma^2 \sin \beta (\sigma + 2 \cos \beta) + \omega_n^2 2 \sigma \cos \beta [\sigma^2 + 4 \sigma \cos \beta + 4 \cos 2 \beta] \\ + \omega_n^3 2 \sigma \sin \beta (\sigma + 2 \cos \beta) (\sigma + 4 \cos \beta) \},$$

$$a_{b_2} = \frac{1}{4N} \{ -\sigma^3 \sin \beta \cos \beta + \omega_n \sigma^2 \cos \beta - \omega_n^2 \sigma \sin \beta \cos \beta [\sigma + 2 \cos \beta]^2 \},$$

$$b_{b_1} = \frac{1}{4N} \{ 2 \sigma^2 [1 + \cos 2 \beta + \sigma \cos \beta] - \sigma \omega_n \sin \beta [\sigma^2 + 4 \sigma \cos \beta + 8 \cos^2 \beta] \\ + \omega_n^2 (\sigma + 2 \cos \beta) [4 \sigma \cos^2 \beta + \sigma^2 \cos \beta + 4 \cos \beta] \},$$

$$b_{b_2} = \frac{1}{8N} \left\{ \frac{1}{\omega_n} \sigma^3 + \omega_n \sigma^2 (\sigma + 2 \cos \beta) \right\}.$$

Moment um die Vorderkante der  $m$ -ten Schaufel (kopflastig positiv):

$$M = \varrho W_1^2 a A_b \left\{ C_{b_0} + i \omega D_{b_0} + \left( \frac{c}{a} C_a \right) [C_{b_1} + i \omega D_{b_1}] \right\} e^{i \omega s - i 2 \pi n \eta m}$$

mit

$$C_{b_0} = \frac{1}{24 N \cos \beta} \{ \omega_n 12 \sigma^3 \sin \beta - \omega_n^2 [4 \sigma^3 \cos \beta + \sigma^4] \\ + \omega_n^3 \sigma \sin \beta [6 \sigma^2 + 32 \sigma \cos \beta + 48 \cos^2 \beta] \\ + \omega_n^4 (\sigma + 2 \cos \beta) [\sigma^3 + 8 \sigma^2 \cos \beta + 24 \sigma \cos^2 \beta + 24 \cos \beta] \},$$

$$C_{b_1} = \frac{1}{12 N} \{ -\omega_n^2 \sigma^2 \sin \beta (6 \cos \beta + \sigma) + \omega_n^3 \sigma (3 \cos 2 \beta + \sigma \cos \beta) (\sigma + 2 \cos \beta) \}$$

$$D_{b_0} = -\frac{1}{12 N \cos \beta} \{ 2 \sigma^4 + 6 \sigma^3 \cos \beta + \omega_n 2 \sigma^3 \sin \beta \\ + \omega_n^2 [\sigma^4 + 7 \sigma^3 \cos \beta + 16 \sigma^2 \cos^2 \beta + 12 \sigma \cos \beta \cos 2 \beta] \\ - \omega_n^3 (\sigma + 2 \cos \beta) \sigma \sin \beta (4 \cos \beta + \sigma) \},$$

$$D_{b_1} = \frac{1}{12 N} \{ \omega_n \sigma^2 (3 \cos 2 \beta + \sigma \cos \beta) + \omega_n^2 \sigma (3 \sin 2 \beta + \sigma \sin \beta) (\sigma + 2 \cos \beta) \}$$

#### b) Schwingung tangential zur Schaufel

Auslenkung der  $m$ -ten Schaufel:

$$\Delta x = A_t e^{i \omega s - i 2 \pi n \eta m}; \quad \Delta y = 0.$$

Kraft auf die  $m$ -te Schaufel:

$$P_y = \varrho W_1^2 A_t \frac{a}{c} \left\{ \left( \frac{c}{a} C_a \right) (A_{t_1} + i \omega B_{t_1}) + \left( \frac{c}{a} C_a \right)^2 (A_{t_2} + i \omega B_{t_2}) \right\} e^{i \omega s - i 2 \pi n \eta m}$$

$$P_x = \varrho W_1^2 A_t \frac{a}{c} \left( \frac{c}{a} C_a \right) \{ a_{t_2} + i \omega b_{t_2} \} e^{i \omega s - i 2 \pi n \eta m}$$

mit

$$A_{t_1} = -\frac{1}{4N} \{ 2 \sigma^3 \cos \beta + \omega_n^2 \sigma \cos \beta [\sigma^2 + 4 \sigma \cos \beta + 4 \cos 2 \beta] \\ - \sigma (\sigma + 2 \cos \beta) (2 \sin 2 \beta + \sigma \sin \beta) \omega_n^3 \},$$

$$A_{t_2} = -\frac{1}{4N} \{ \sigma^3 \sin \beta \cos \beta + \omega_n \sigma^2 \cos \beta + \omega_n^2 \sin \beta \cos \beta (\sigma + 2 \cos \beta)^2 \},$$

$$B_{t_1} = \frac{1}{4N} \left\{ \frac{1}{\omega_n} 2 \sigma^3 \sin \beta + \omega_n \sigma [\sigma^2 \sin \beta + 2 \sigma \sin 2 \beta + 4 \cos \beta \sin 2 \beta] \right. \\ \left. + \omega_n^2 (\sigma + 2 \cos \beta) [4 \cos \beta + 4 \sigma \cos^2 \beta + \sigma^2 \cos \beta] \right\},$$

$$B_{t_2} = -b_{b_2},$$

$$a_{t_2} = \frac{1}{4N} \{ \sigma^3 \cos^2 \beta + \omega_n^2 \sigma \cos \beta (\sigma + 2 \cos \beta) [\sigma \cos \beta + \cos 2 \beta] \},$$

$$b_{t_2} = B_{t_1}.$$

Moment um die Vorderkante der  $m$ -ten Schaufel

$$M = \varrho W_1^2 a \Delta_t \left( \frac{c}{a} C_a \right) \{ C_{t_1} + i \omega D_{t_1} \}$$

mit

$$C_{t_1} = \frac{1}{12N} \{ \omega_n^2 \sigma^2 (3 \cos 2 \beta + \sigma \cos \beta) + \omega_n^3 (3 \sin 2 \beta + \sigma \sin \beta) (\sigma + 2 \cos \beta) \sigma \},$$

$$D_{t_1} = \frac{1}{12N} \{ \omega_n \sigma^2 (3 \sin 2 \beta + \sigma \sin \beta) - \omega_n^2 \sigma (\sigma + 2 \cos \beta) (3 \cos 2 \beta + \sigma \cos \beta) \}.$$

c) Drehschwingungen um die Vorderkante

Auslenkung der  $m$ -ten Schaufel:

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = c \Delta_d e^{i\omega s - i2\pi n \eta m} \xi.$$

Kraft auf die  $m$ -te Schaufel:

$$P_y = \varrho W_1^2 a \Delta_d \left\{ A_{d_0} + i \omega B_{d_0} + \left( \frac{c}{a} C_a \right) (A_{d_1} + i \omega B_{d_1}) \right\} e^{i\omega s - i2\pi n \eta m},$$

$$P_x = \varrho W_1^2 a \Delta_d \left( \frac{c}{a} C_a \right) \{ a_{d_1} + i \omega b_{d_1} \} e^{i\omega s - i2\pi n \eta m}$$

mit

$$A_{d_0} = \frac{-1}{24N \cos \beta} \{ 12 \sigma^2 (\sigma + 2 \cos \beta)^2 + 12 \omega_n \sigma \sin \beta (\sigma^2 - 8 \cos^2 \beta) \\ + \omega_n^2 [9 \sigma^4 + 80 \sigma^3 \cos \beta + 192 \sigma^2 + 48 \sigma \cos \beta (2 + 3 \cos 2 \beta) + 96 \cos^2 \beta] \\ + \omega_n^3 [2 \sigma^3 \sin \beta + 4 (\sigma + 2 \cos \beta) (3 \sigma \sin 2 \beta + \sigma^2 \sin \beta)] \\ + \omega_n^4 (\sigma + 2 \cos \beta) [24 \cos \beta + 24 \sigma \cos^2 \beta + 8 \sigma^2 \cos \beta + \sigma^3] \},$$

$$A_{d_1} = \frac{1}{24N \cos \beta} \{ -6 \sigma^2 \sin 2 \beta (\sigma + 2 \cos \beta) - \omega_n 12 \sigma \cos \beta (\sigma + 2 \cos \beta \cos 2 \beta) \\ - \omega_n^2 \sigma \sin 2 \beta [48 \cos^2 \beta + 30 \sigma \cos \beta + 5 \sigma^2] \\ + \omega_n^3 2 \sigma \cos \beta (\sigma + 2 \cos \beta) [3 \cos 2 \beta + \sigma \cos \beta] \},$$

$$B_{d_0} = \frac{1}{24 N \cos \beta} \left\{ \frac{48}{\omega_n} \sigma^2 \sin \beta \cos \beta - [4 \sigma^4 + 12 \sigma^3 \cos \beta - 48 \sigma \cos 2 \beta \cos \beta] \right. \\ \left. + \omega_n 4 \sigma \sin \beta [\sigma^2 + 12 \sigma \cos^2 \beta + 24 \cos^2 \beta] \right. \\ \left. - \omega_n^2 [6 \sigma^4 + 54 \sigma^3 \cos \beta + 192 \sigma^2 \cos^2 \beta + \sigma \cos \beta (192 + 120 \cos 2 \beta) \right. \\ \left. + 192 \cos^2 \beta] - \omega_n^3 \sigma \sin \beta (\sigma + 2 \cos \beta) (2 \sigma + 8 \cos \beta) \right\},$$

$$B_{d_1} = \frac{1}{24 N \cos \beta} \left\{ -\frac{1}{\omega_n} 12 \sigma^2 \cos \beta [\cos 2 \beta + \sigma \cos \beta] + 24 \sigma \sin 2 \beta \cos^2 \beta \right. \\ \left. - \omega_n \sigma \cos \beta [10 \sigma^2 \cos \beta + \sigma (12 + 30 \cos 2 \beta) + 48 \cos \beta \cos 2 \beta] \right. \\ \left. - \omega_n^2 \sigma \sin 2 \beta (\sigma + 2 \cos \beta) [\sigma + 6 \cos \beta] \right\},$$

$$a_{d_1} = \frac{1}{12 N} \{ 6 \sigma^2 (\cos 2 \beta + \sigma \cos \beta) - 12 \omega_n \sigma \sin 2 \beta \cos \beta \\ + \omega_n^2 \sigma [24 \cos \beta \cos 2 \beta + \sigma (30 \cos^2 \beta - 9) + 5 \sigma^2 \cos \beta] \\ + \omega_n^3 \sigma \sin \beta (\sigma + 2 \cos \beta) [6 \cos \beta + \sigma] \},$$

$$b_{d_1} = \frac{-1}{12 N} \left\{ \frac{1}{\omega_n} 6 \sigma^2 \sin \beta (\sigma + 2 \cos \beta) + 6 \sigma^2 + 12 \sigma \cos 2 \beta \cos \beta \right. \\ \left. + \omega_n \sigma \sin \beta [48 \cos^2 \beta + 30 \sigma \cos \beta + 5 \sigma^2] \right. \\ \left. - \omega_n^2 (\sigma + 2 \cos \beta) [\sigma^2 \cos \beta + 3 \sigma \cos 2 \beta] \right\}.$$

Moment um die Vorderkante der  $m$ -ten Schaufel

$$M = \varrho W_1^2 a c A_a \{ C_{d_0} + i \omega D_{d_0} \} e^{i \omega s - i 2 \pi n \eta m}$$

mit

$$C_{d_0} = \frac{-1}{180 N \cos \beta} \{ 30 \sigma^4 + 90 \sigma^3 \cos \beta \\ + \omega_n [21 \sigma^4 + 195 \sigma^3 \cos \beta + (30 + 240 \cos^2 \beta) \sigma^2 + 180 \sigma \cos \beta \cos 2 \beta] \\ - \omega_n^3 \sigma \sin \beta [30 \sigma^2 + 180 \sigma \cos \beta + 240 \cos^2 \beta] \\ - \omega_n^4 (\sigma + 2 \cos \beta) [4 \sigma^3 + 33 \sigma^2 \cos \beta + (60 + 45 \cos 2 \beta) \sigma + 120 \cos \beta] \},$$

$$D_{d_0} = \frac{-1}{180 N \cos \beta} \left\{ \frac{90}{\omega_n} \sigma^3 \sin \beta + 15 \sigma^2 [\sigma^2 + 4 \sigma \cos \beta + 6] \right. \\ \left. + \omega_n 60 \sigma \sin \beta [\sigma^2 + 4 \sigma \cos \beta + 6 \cos^2 \beta] \right. \\ \left. + \omega_n^2 [20 \sigma^4 + 180 \sigma^3 \cos \beta + (45 + 600 \cos^2 \beta) \sigma^2 + 360 \sigma \cos \beta (2 + \cos 2 \beta) \right. \\ \left. + 720 \cos^2 \beta] \right\}.$$

## 12. Biegeflattern eines Schaufelkranzes

Um ein einfaches Beispiel für die Behandlung des Flatterproblems eines Schaufelkranzes zu geben, soll untersucht werden, ob die Schaufeln eines Kranzes auch bei Berücksichtigung der Luftkräfte Biegeschwingungen ausführen können. Dabei wollen wir annehmen, der Staffelungswinkel des Kranzes sei  $\beta = 0$ , die

Schaufeln im Vakuum haben die Eigenfrequenz  $\nu_0$  und seien über den Fuss hinweg nicht gekoppelt. Weiter sei  $M$  die Masse der Schaufel pro Spannweiteinheit, und mit  $F_k(t)$  werde die auf die Spannweiteinheit der  $k$ -ten Schaufel wirkende Normalkraft bezeichnet. Für die Bewegungsgleichungen erhält man dann

$$\Delta \ddot{y}_k = - (2 \pi \nu_0)^2 \Delta y_k + \frac{1}{M} F_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, 3) \quad (12, 1)$$

dabei sind die  $F_k$  selbst Funktionen der  $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_3$ .

Es ist zu untersuchen, ob es eine Geschwindigkeit  $W_1$ , eine Frequenz  $\nu$  und  $z$  sämtlich verschwindende Konstanten  $c_m$  so gibt, dass die

$$\Delta y_m = c c_m e^{i 2 \pi \nu t}$$

bei der Geschwindigkeit  $W_1$  das Gleichungssystem (12, 1) befriedigen.

Um zunächst den Zusammenhang zwischen den Auslenkungen und den Kräften herzustellen, berechnen wir nach (3, 2b) die Fourier-Transformierten

$$c^{(n)} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 c_m e^{i 2 \pi n t_{im}}.$$

Damit wird dann

$$\Delta y_k = c \sum_{n=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} c^{(n)} e^{i 2 \pi \nu t - i 2 \pi n \eta k}, \quad (12, 2)$$

Zu dem Anteil  $c c^{(n)} e^{i 2 \pi \nu t - i 2 \pi n \eta k}$  von  $\Delta y_k$  gehört nach Abschnitt 11 die Kraft in der  $y$ -Richtung

$$P_y^{(n)} = \varrho a c^{(n)} W_1^2 e^{i \omega s - i 2 \pi n \eta k} (F_0^{(n)} + i \omega F_1^{(n)}) \quad (12, 3)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} F_0^{(n)} &= A_{b_0} + \left(\frac{c}{a} C_a\right) A_{b_1} + \left(\frac{c}{a} C_a\right)^2 A_{b_2}, \\ F_1^{(n)} &= B_{b_0} + \left(\frac{c}{a} C_a\right) B_{b_1} + \left(\frac{c}{a} C_a\right)^2 B_{b_2}, \end{aligned} \right\} \quad (12, 4)$$

wobei die  $A$  und  $B$  reelle Funktionen der Gitterkonstanten  $\Omega$ , der reduzierten Frequenz  $\omega$  und von  $n$  sind. Gemäss dem Superpositionsprinzip ist dann

$$F_k(t) = \varrho a W_1^2 \sum_{n=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} c^{(n)} e^{i \omega s - i 2 \pi n \eta k} (F_0^{(n)} + i \omega F_1^{(n)}).$$

Geht man damit sowie mit der Zerlegung (12, 2) in die Bewegungsgleichungen ein, so erhält man mit

$$\omega_0 = \frac{2 \pi \nu_0 c}{W_1} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\varrho a c}{M}$$

das Gleichungssystem

$$\sum_{n=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} c^{(n)} e^{-i 2 \pi n \eta k} \{ \omega_0^2 - \omega^2 - \mu (F_0^{(n)} + i \omega F_1^{(n)}) \} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, 3)$$



Wendet man darauf die Fourier-Transformation an, das heisst, multipliziert man die  $k$ -te Gleichung mit  $e^{i2\pi m \eta k}$  und summiert über  $k = 1, 2, \dots, 3$ , so findet man dass

$$c^{(m)} \{ \omega_0^2 - \omega^2 - \mu (F_0^{(m)} + i \omega F_1^{(m)}) \} = 0 \quad (m = -3 + \bar{3} + 1, \dots, \bar{3}) \quad (12, 5)$$

sein muss. Die Schaufeln des Kranzes können also dann und nur dann Biegeschwingungen ausführen, wenn das Gleichungssystem (12, 5) eine nichttriviale Lösung zulässt. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn es wenigstens eine unter den ganzen Zahlen  $-3 + \bar{3} + 1, \dots, \bar{3}$  so gibt, dass für diese Zahl  $n$

$$\omega_0^2 - \omega^2 - \mu (F_0^{(n)} + i \omega F_1^{(n)}) = 0$$

ist, das heisst aber

$$F_1^{(n)} = 0 \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \omega^2 + \mu F_0^{(n)}$$

ist. Die erste dieser beiden Gleichungen bestimmt die kritischen  $\omega$ -Werte, aus der zweiten können dann die dazugehörigen kritischen Geschwindigkeiten berechnet werden. Dabei interessiert der Wert von  $\omega$ , der den grössten Wert von  $\omega_0$  liefert, denn  $\omega_0$  ist ja der kritischen Geschwindigkeit umgekehrt proportional. Da nun  $\mu$  im allgemeinen klein ist<sup>1)</sup>, so läuft dies darauf hinaus, ein mögliches grosses  $\omega$  zu bestimmen, für das wenigstens eines der  $F_1^{(n)}$  verschwindet.

Im Fall der Biegeschwingungen ergibt sich mit  $\beta = 0$  nach (12, 4) und Abschnitt 11

$$\begin{aligned} F_1^{(n)} &= -\frac{1}{4 N \omega_n} \left\{ \omega_n^3 (\sigma + 2)^4 + 2 \omega_n^2 \sigma (\sigma + 2)^2 \left( \frac{c}{a} C_a \right) \right. \\ &\quad \left. + \omega_n \sigma^2 \left[ 2 (\sigma + 2)^2 + \left( \frac{c}{a} C_a \right)^2 \right] + 2 \sigma^3 \left( \frac{c}{a} C_a \right) \right\} \\ &= -\frac{(\sigma + 2)^4}{4 N \omega_n} \left[ \omega_n + \frac{\sigma \frac{c}{a} C_a}{(\sigma + 2)^2} \right] \left[ \omega_n^2 + \omega_n \frac{\sigma \frac{c}{a} C_a}{(2 + \sigma)^2} + 2 \frac{\sigma^2}{(2 + \sigma)^2} \right]. \end{aligned}$$

Da nun im allgemeinen

$$\left( \frac{c}{a} C_a \right)^2 < 8 (2 + \sigma)^2$$

ist, so besitzt der letzte Faktor keine reelle Nullstelle, und  $F_1^{(n)}$  verschwindet nur für

$$\omega_n = -\frac{\sigma \frac{c}{a} C_a}{(\sigma + 2)^2} \quad \left( \sigma = |n| \frac{2 \pi c}{a \bar{3}} \right)$$

Das Maximum wird angenommen, wenn  $\sigma$  in der Nähe von 2 liegt. Da die Schaufelzahl  $\bar{3}$  im allgemeinen gross ist, so dürfen wir voraussetzen, dass der Wert von  $\sigma$  angenommen werden kann und erhalten als kritische reduzierte Frequenz

$$\omega_{krit} = \frac{1}{8} \cdot \frac{c}{a} C_a$$

<sup>1)</sup> Es wird an ein Gas als strömendes Medium gedacht.

und mithin (falls  $\mu = 0$  gesetzt wird) als kritische Abströmgeschwindigkeit

$$W_{1, \text{krit}} = \frac{16 \pi v_0 a}{c_a}$$

oder mit dem üblichen Auftriebsbeiwert  $c_a$  für die kritische Anströmgeschwindigkeit

$$W_{0, \text{krit}} = \frac{16 \pi v_0 a}{c_a} \sqrt{1 + 3 \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{a} c_a \right)^2}.$$

Damit ist also gezeigt, dass ein *belasteter* Schaufelkranz schon allein mit dem Freiheitsgrad Biegung flattern kann; wesentlich ist allerdings, dass die Schaufeln die Möglichkeit haben, mit Phasenverschiebungen zu schwingen, also nicht gegenseitig abgestützt sind. Weiterhin darf auch die Eigenfrequenz der Schaufel nicht zu hoch liegen<sup>1)</sup>. Schliesslich ist noch zu beachten, dass in der vorliegenden Untersuchung ein inkompressibles Medium und anliegende Strömung vorausgesetzt wurde. Ist die Strömung abgerissen, so schwingt der Ablösepunkt; dadurch erfahren auch die Luftkräfte eine Phasenverschiebung, die im allgemeinen die Luftdämpfung herabsetzt. Weiter ist noch zu vermuten, dass die Kompressibilität der den Schaufelkranz umgebenden Gassäule von wesentlichem Einfluss ist. Auf diese Frage soll in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. G. KÜSSNER und L. SCHWARZ, *Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder*, Luftfahrtforschung 17, 337–354 (1940).
- [2] H. G. KÜSSNER, *Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegungen der Flüssigkeit*, Luftfahrtforschung 17, 355–361 (1940).
- [3] H. SÖHNGEN, *Bestimmung der Auftriebsverteilung für beliebige instationäre Bewegungen (ebenes Problem)*, Luftfahrtforschung 17, 401–420 (1940).
- [4] C. POSSIO, *Aerotecnica* 18, 441–458 (1938).
- [5] F. WEINIG, *Aerodynamik der Luftschraube* (Springer, Berlin 1940), Abb. 140.
- [6] CH. BELLENOT und J. LALIVE D'EPINAY, *Selbsterregte Schaufelschwingungen in Turbomaschinen*, Brown-Boveri-Mitt. 1950, 368.

#### Summary

For an investigation on the vibration behaviour of a ring of blades of an axial compressor, knowledge of the aerodynamic forces on the individual blades is required. Since, at small gap-chord-ratio and possibly at high aerodynamic loading of the blades, the aerodynamic interference between the blades is not negligible, a method including the interference is given for evaluating the aerodynamic forces acting on an arbitrarily vibrating ring of blades. This method is valid for thin and slightly cambered blades, arranged with small gap-chord ratio, in a nonviscous incompressible medium.

(Eingegangen: 22. August 1952.)

<sup>1)</sup> Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangten auch CH. BELLENOT und J. LALIVE D'EPINAY [6], wobei allerdings sehr stark vereinfachende Annahmen über die Luftkräfte an einem schwingenden Kranz gemacht wurden.

# Wirbelsysteme in Schaufelgittern und Turbomaschinen

VON WALTER TRAUPEL, Winterthur<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Über die Wirbelsysteme, die beim Durchtritt eines Strömungsmittels durch eine Schaufelreihe auftreten, besteht bis heute kein klares Bild. Betrachten wir etwa ein gerades Schaufelgitter, so fliesst diesem das Strömungsmittel niemals mit völlig gleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung zu, da sich an den Begrenzungsflächen des Zuströmkanals Grenzschichten bilden. Die Endpartien der Schaufeln werden daher langsamer angeströmt als die mittleren, weshalb auch die Zirkulation um die Schaufel längs ihrer Erstreckung variiert. Es wird daraus häufig gefolgert, dass, entsprechend dieser variablen Zirkulation, Wirbelschleppen von der Austrittskante stromabwärts gehen müssen – gemäss dem dritten Helmholtzschen Wirbelsatz – ähnlich wie beim einzelnen Tragflügel im freien Luftraum. Andererseits entsteht bei jeder Ablenkung einer Strömung der sogenannte Sekundärwirbel, da das wesentlich durch die Kernströmung bestimmte Druckfeld der Grenzschicht aufgeprägt wird und dort entsprechende Querbewegungen herbeiführt. Nun stellt sich die Frage, ob es sich bei den beiden eben erwähnten Wirbelsystemen tatsächlich um zwei verschiedene Effekte handelt oder ob nur zwei Aspekte oder Erklärungsversuche ein und desselben Effekts vorliegen oder ob wir gar zwei widersprechende Theorien vor uns haben, von denen mindestens eine falsch wäre. Ziel der folgenden Ausführungen ist es, diese und verwandte Fragen zu analysieren. – In den Figuren werden Wirbellinien entsprechend Stromlinien mit Pfeilen angegeben, wobei Pfeilsinn und Drehsinn des Wirbels durch die Rechtsschraubenregel einander zugeordnet sind. Figur 1 stellt die Darstellungsweise klar.

## 2. Der Einzelflügel

Beim Einzelflügel im freien Luftraum gehen bekanntlich von den Flügelenden Wirbelschleppen stromabwärts, die den «induzierten Widerstand» bedingen. Herbeigeführt wird diese Erscheinung durch den Druckunterschied zwischen Flügelober- und -unterseite, der eine Umströmung der Flügelenden im Sinne der Pfeile 1, Figur 2, bewirkt. Die Luft gleitet daher, wie die Pfeile zeigen, schief über die Flügeloberseite und entsprechend im entgegengesetzten Sinne über die Unterseite, und von der Austrittskante gehen folglich Unstetigkeitsflächen – das heisst Wirbelflächen – ab, wie die Pfeile 3 darstellen.

<sup>1)</sup> Gebrüder Sulzer AG., Winterthur.

Man findet oft die Darstellung, wonach das Auftreten dieser Wirbelschleppen unmittelbar aus dem dritten Helmholtz'schen Wirbelsatz folgt (Zirkulation um einen Wirbelfaden ist konstant, daher kann Wirbelfaden im Inneren der Flüssigkeit nicht beginnen oder enden, sondern ist in sich geschlossen oder erstreckt sich ins Unendliche). Dies ist aber nicht korrekt, da der dritte Helm-



Fig. 1

Darstellungsweise der Wirbellinien.

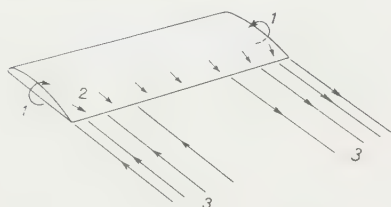


Fig. 2

Einzelflügel mit Wirbelsystem.

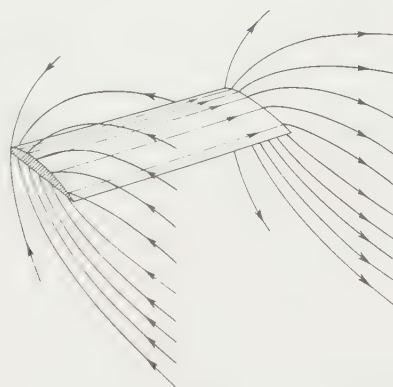


Fig. 3

Mathematisch denkbare Wirbelsystem am Einzelflügel.

holtzsche Wirbelsatz ein rein mathematisches Theorem ist; er macht eine geometrische Aussage über jedes denkbare Vektorfeld, unabhängig von jeder physikalischen Bedeutung. Die Entstehung der Wirbelschleppe ist aber durch die Gesetze der Dynamik bestimmt, kann also niemals durch mathematische Überlegungen allein vorausgesagt werden. In der Tat sind mathematisch auch ganz andere Lösungen denkbar. So könnte man etwa annehmen, der Flügel beeinflusse den Luftraum nur innerhalb des Bereiches seiner eigenen Spannweite, während alles ausserhalb Liegende unbeeinflusst bleibt. Dann bilden sich, von den Flügelenden ausgehend, senkrechte Trennflächen - vgl. Figur 3 - welche beeinflusstes und unbeeinflusstes Gebiet scheiden. Diese Lösung erfüllt, wie noch unabsehbar viele andere, den dritten Helmholtz'schen Wirbelsatz ebenso

wie die Lösung nach Figur 2. Es sind die Gesetze der Dynamik, die aus der unabsehbaren Fülle der an sich denkbaren Lösungen diejenige nach Figur 2 auswählen.

### 3. Gerades Schaufelgitter, primäres Wirbelsystem

Figur 4 veranschaulicht das Wirbelsystem einer zwischen zwei parallelen Wänden verlaufenden Parallelströmung, deren Geschwindigkeitsprofil ebenfalls dargestellt ist. Es besteht aus im Bereiche der Grenzschichten quer zur Strömungsrichtung verlaufenden Wirbelfäden.

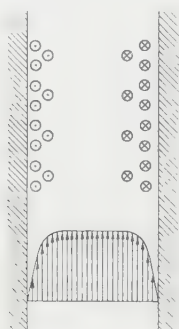


Fig. 4

Geschwindigkeitsprofil und Wirbelsystem der grenzschichtbehafteten Parallelströmung.

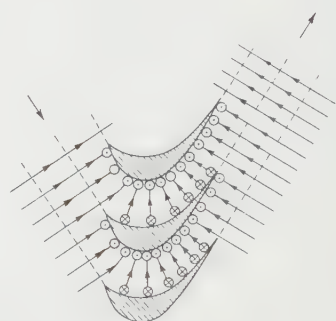


Fig. 5

Primäres Wirbelsystem der Gitterströmung.

Wir betrachten nun eine solche Strömung, die in ein gerades Schaufelgitter eingeleitet und dort umgelenkt wird, um wieder als Parallelströmung fortzufließen (Figur 5). Die im Bild gezeigten Wirbellinien repräsentieren die Wirbelfäden der Grenzschicht der unteren Begrenzungsebene. Auf der Zuströmseite kommen sie aus dem Unendlichen und steigen dort, wo sie auf ein Schaufelprofil auftreffen, an diesem hoch – entsprechend der Grenzschicht am Schaufelprofil selbst – und gehen schliesslich der oberen Begrenzungsfläche entlang ins Unendliche zurück. Genau so verlaufen die Wirbelfäden auf der Austrittsseite. Innerhalb der Schaufelkanäle sind die Wirbelfäden geschlossene Ringe, die an der Saugseite des Profils auf- und an der Druckseite absteigen.

Bei endlicher Grenzschichtdicke erfüllen die Wirbelfäden den Raum stetig und schrumpfen in Unstetigkeitsflächen zusammen, wenn die Grenzschichtdicke gegen Null strebt. In diesem Grenzfall springt also die Geschwindigkeit unmittelbar an den Wandflächen auf Null, was auch bei reibungsfreier Strömung so gedacht werden muss, soll die Kuttasche Abflussbedingung erhalten und das d'Alembertsche Paradoxon vermieden werden. – Bei endlicher Grenzschichtdicke fällt die Zirkulation um das Profil gegen die Schaufelenden hin



stetig auf Null ab. Daraus folgt nach dem dritten Helmholtzschen Wirbelsatz noch keineswegs, wie oft fälschlicherweise geschlossen wird, dass von der Schaufelaustrittskante Wirbelschleppen abgehen müssen. Dies wäre eine physikalische Aussage, und eine solche kann aus dem genannten Theorem niemals gewonnen werden. Wie es im vorliegenden Falle erfüllt wird, zeigt eben Figur 5, und es muss dazu vom mathematischen Standpunkt aus nichts Weiteres beigefügt werden. Mit der Annahme der Existenz der grenzschichtbehafteten Strömung ist auch die Existenz des dargestellten Wirbelsystems denknotwendig gegeben, denn dieses ist ja nichts anderes als eine besondere Art der mathematischen Beschreibung des Vorausgesetzten.

Wir nennen das hier beschriebene Wirbelsystem das *primäre*, da es ja mit dem Vorhandensein der Strömung zugleich schon besteht, und zwar – in besonderer Form – selbst im Grenzfall der Potentialströmung.

#### 4. Sekundäres Wirbelsystem

Betrachten wir wieder die Strömung durch das gerade Schaufelgitter mit Grenzschichten an den ebenen Begrenzungswänden. Innerhalb des gekrümmten Schaufelkanals sind die in der Grenzschicht strömenden Flüssigkeitsteilchen den im Kanal herrschenden Druckgradienten ausgesetzt, doch sind ihre Geschwindigkeiten nicht so gross, dass beim Fortschreiten auf ungestörten Bahnen dynamisches Gleichgewicht entstände. Daher werden die wandnahen Teilchen in Richtung des Druckgefälles seitlich abgedrängt, das heisst also nach der Saugseite hin.

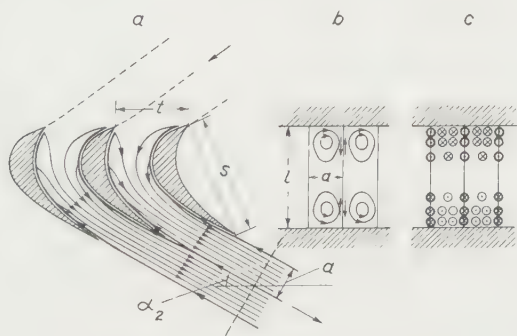


Fig. 6

Sekundärwirbelsystem der Gitterströmung.

Das entsprechende Wirbelsystem zeigt Figur 6, in welcher wieder das Wirbelsystem längs der unteren Begrenzungsebene dargestellt ist. Über den Querschnitt eines einen Schaufelkanal erfüllenden Stromfadens ist die Stärke des Sekundärwirbels in bestimmter Weise stetig verteilt, wie in Figur 6b und c



veranschaulicht. Nach Austritt aus dem Schaufelkanal erhalten die gegenseitigen Begrenzungsflächen dieser Stromfäden den Charakter von Diskontinuitätsflächen (vgl. ebenfalls Figur 6b und c).

Berechnen wir nun die Zirkulation der Sekundärströmung längs einer Kontrollkontur der Art  $ABCD$  (Figur 7). Sie ist

$$\left. \begin{aligned} d\Gamma &= \int_A^B u \, dx + v(B) \, dy + \int_C^D u \, dx - v(A) \, dy \\ &= \int_A^B u \, dx + v(B) \, dy - \int_A^B \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \, dy \right) dx - v(A) \, dy. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da sich das Kontrollgebiet gerade über eine Teilung erstreckt, ist  $v(B) = v(A)$ . Ferner ist gemäss der Kontinuitätsgleichung  $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ . Folglich wird Gleichung (1)

$$d\Gamma = dy \int_A^B \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = dy \int_A^B dv = [v(B) - v(A)] \, dy = 0. \quad (2)$$

Ist aber  $d\Gamma = 0$ , so muss die Wirbelstärke des in der Kontrollkontur liegenden Teiles der Trennfläche entgegengesetzt gleich der Wirbelstärke der gesamten Sekundärströmung innerhalb derselben Kontur sein.

So gelangen wir zu der in Figur 6a dargestellten Gesamtstruktur des Wirbelsystems. Aus dem Unendlichen austrittsseitig laufen unendlich dünne Wirbelschichten an die Profilaustrittskanten heran, zerteilen sich hier und folgen den beiden Schaufeloberflächen. Längs diesen werden die Wirbelschichten immer schwächer, da von ihnen aus stetig verteilte Wirbel ins Innere der Strömung abzweigen und schliesslich in Abströmrichtung wieder ins Unendliche verlaufen. Diese letzteren sind die eigentlichen Sekundärwirbel. Beim Durchströmen des Schaufelkanals wird die Sekundärwirbelstärke immer grösser, doch liegt keine Entstehung der Wirbelstärke im Inneren der Strömung vor – das wäre ja durch den dritten Helmholtzschen Wirbelsatz ausgeschlossen –, sondern die Wirbelfäden dringen, wie beschrieben, von den längs den Schaufelflächen verlaufenden Wirbelschichten her in den Raum ein. Die Existenz dieser Wirbelschichten und ihre Veränderlichkeit längs der Schaufelfläche ist gegeben durch das Gleiten der in Strömungsrichtung sich verstärkenden Sekundärbewegung an dieser Fläche.

Die gesamte Zirkulation des Sekundärwirbelsystems nach Austritt aus der Schaufelung ist, wie gezeigt wurde, Null. Die Trennflächen, die übrigens instabil sind, werden sich in Wirklichkeit schliesslich zufolge der Zähigkeit in der Strömung auflösen, womit aber gerade wieder die Sekundärbewegung «ausgelöscht» wird. So schliesst bei der zähigkeitsbehafteten Flüssigkeit das ganze Wirbelsystem im Endlichen in sich zurück.

Die Stärke der an die Austrittskanten anschliessenden Wirbel hat keinen unmittelbaren Zusammenhang mit der Abnahme der Zirkulation gegen die Schaufelenden zu. SQUIRE und WINTER<sup>1)</sup> haben unter vereinfachenden Annahmen (kleine Kanalbreite, keine Beschleunigung oder Verzögerung, Vernachlässigung der Reibung) die Stärke des über den Querschnitt stetig verteilten

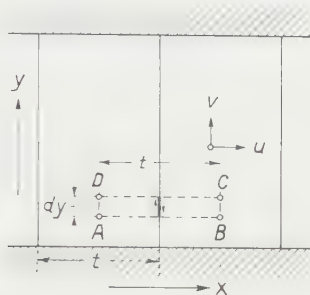


Fig. 7

Kontrollkontur zur Bestimmung der Wirbelstärke der Trennfläche.

Sekundärwirbels berechnet und fanden

$$\zeta = 2 \vartheta \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3)$$

wo  $\vartheta$  der Umlenkungswinkel ist und  $\partial w / \partial z$  der örtliche Geschwindigkeitsgradient in der Grenzschicht an der ebenen Begrenzungswand. Die Theorie macht die Annahme, dass  $\partial w / \partial z$  nur vom Wandabstand abhängt. Berechnungen unter allgemeineren Voraussetzungen werden bei HAWTHORNE<sup>2)</sup> durchgeführt, doch können alle diese Rechnungen nur als erste Näherung betrachtet werden. Einfache, allgemein und streng gültige Aussagen lassen sich jedenfalls nicht machen.

## 5. Für veränderliche Zirkulation entworfene Schaufelung

Oft müssen Schaufelungen von Turbomaschinen so entworfen werden, dass selbst in reibungsfreier Strömung keine Konstanz der Zirkulation längs der Schaufel besteht. Im geraden Schaufelgitter, wo die Verhältnisse leichter überblickbar sind, lässt sich dieser Fall dadurch reproduzieren, dass man die Schaufeln hier, wo ohne Verdrehung eine konstante Zirkulation erreicht wird, verdreht. Figur 8 zeigt ein solches Gitter, bei dem, wie der Grundriss *b* zeigt, die Ablenkung und damit die Zirkulation gegen oben kleiner wird. Das Strömungs-

<sup>1)</sup> H. B. SQUIRE und K. G. WINTER, *The Secondary Flow in a Cascade of Airfoils in Non-uniform Stream*, J. aeron. Sci. 18, Nr. 4, 271 (1951).

<sup>2)</sup> W. R. HAWTHORNE, *Secondary Circulation in Fluid Flow*, Proc. Roy. Soc. London [A] 206, 74 (1951).

mittel sei reibungsfrei, und es herrsche vor dem Gitter Potentialströmung. Betrachten wir ein Flüssigkeitsteilchen während seines Durchtrittes durch das Gitter, so folgt aus dem Thomsonschen Satz von der Erhaltung der Zirkulation, dass es das Gitter drehungsfrei verlassen muss, da es drehungsfrei eingetreten ist, dass also mithin die Strömung auch nach dem Gitter eine Potentialströmung ist.

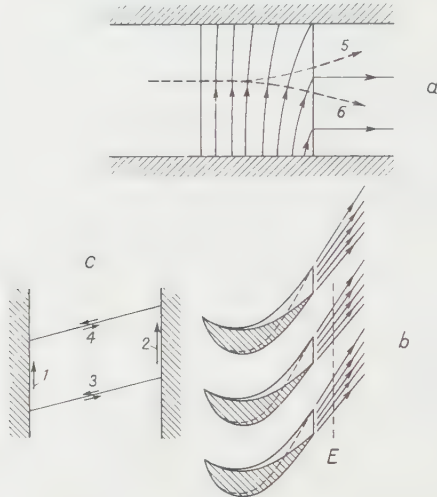


Fig. 8

Gitter mit variabler Zirkulation und wirbelfreier Anströmung.

Der Seitenriss (Figur 8c) ist ein Schnitt in der Ebene  $E$  (siehe Grundriss  $b$ ) durch den aus einem Schaufelkanal austretenden Stromfaden. Durch die verschiedene Länge der Pfeile 1 und 2 ist angedeutet, dass die entsprechende Geschwindigkeitskomponente gemäss der unterschiedlichen Ablenkung oben kleiner ist als unten. Dieser Geschwindigkeitsunterschied, multipliziert mit der Schaufelteilung, ist gleich dem Unterschied der Zirkulation des untersten und obersten Schaufelprofils. Nun muss andererseits die Zirkulation um den ganzen Querschnitt des Stromfadens Null sein, da ja Potentialströmung vorliegt. Daher müssen an den beiden anderen Begrenzungsflächen des Stromfadens Quergeschwindigkeiten auftreten, gekennzeichnet durch Pfeile 3 und 4, derart dass ihre Wegintegrale entgegengesetzt gleich dem obgenannten Produkt aus Geschwindigkeitsdifferenz und Teilung sind. So werden die gegenseitigen Berührungsflächen der aus den einzelnen Schaufelkanälen austretenden Stromfäden zu Unstetigkeitsflächen, und zwar ist nach der eben durchgeführten Überlegung die Zirkulation einer solchen Unstetigkeitsfläche gleich dem gesamten an einer Schaufel auftretenden Zirkulationsunterschied.

Hier haben wir also den Fall vor uns, wo in exakter Analogie zum Einzelflügel von der Austrittskante eine Wirbelschicht abgeht, deren Stärke durch den Zirkulationsunterschied an der Schaufel gegeben ist. Figur 8a zeigt den Verlauf der Wirbellinien im Aufriss. Die Stromlinien 5 und 6 biegen in der gezeigten Weise ab und bewirken damit auch ein entsprechendes Abbiegen der längs der Schaufel verlaufenden Wirbellinien. Diese letzteren münden damit zum Teil in die Austrittskante ein und laufen in der Wirbelschicht stromabwärts fort. Die Existenz dieses Wirbelsystems wurde hergeleitet ausgehend vom Thomsonschen Satz, der eine unmittelbare Folge der dynamischen Bewegungsgleichung für Zähigkeitsfreie Flüssigkeit ist.

Man beachte, dass die Ausführungen dieses Abschnittes zugleich für den Fall eines Spaltes zwischen Schaufelende und Begrenzungswand gelten. Ein solcher Spalt ist ja grundsätzlich nichts anderes als ein «Stück Schaufel mit der Zirkulation Null».

## 6. Schaufelung bei wirbeldurchsetzter Anströmung

Figur 9 zeigt das Gegenbeispiel der oben behandelten Strömung. Einem Schaufelgitter strömt das reibungsfrei vorausgesetzte Strömungsmittel mit längs der Schaufelhöhe variierender Richtung zu, zum Beispiel unten gemäss den gestrichelten Stromlinien 1, in der Mitte entsprechend den ausgezogenen Linien und oben gemäss den gestrichelten Stromlinien 2, wobei die Grösse der



Fig. 9

Gitter mit variabler Zirkulation und wirbelliger Anströmung.

Zuströmungsgeschwindigkeit über die Schaufelhöhe konstant sei. Die Schaufelung sei so gestaltet, dass die Austrittsrichtung – abgesehen von schwachen, durch zufällige Wirbelbewegungen bedingten Quergeschwindigkeiten – konstant sei.

Die Änderung des statischen Druckes beim Durchströmen des Gitters ist für alle Flüssigkeitsteilchen gleich gross, da ja in den Räumen vor und nach dem Gitter ausgeglichener Druck herrscht. Nach BERNOULLI ist daher die Abströmungsgeschwindigkeit für alle Teilchen gleich, weil dies auch für die Zuströmungsgeschwin-

digkeit gilt. Könnte das Gitter eine vollkommen unveränderliche Austrittsrichtung erzwingen, so läge am Austritt eine Potentialströmung vor, und die Schaufelung würde folglich die zuströmenden Wirbel «aufschlucken». Nach dem Thomsonschen Satz können aber die einzelnen Flüssigkeitsteilchen bei Reibungsfreiheit ihre Drehung nicht verlieren, so dass die Wirbelfäden mit unveränderlicher Stärke das ganze Gitter durchsetzen (vgl. die ausgezogenen Linien 3). Die Stromfäden, die aus den einzelnen Schaufelkanälen austreten, sind also wirbel durchsetzt und grenzen durch Trennflächen 4 aneinander an. Durch entsprechende Schaufelgestaltung kann erreicht werden, dass die Zirkulation eines solchen Trennfläche entgegengesetzt gleich derjenigen des aus einem Schaufelkanal austretenden Stromfadens ist. Die resultierende Zirkulation der austretenden Strömung ist dann Null, obwohl sie keine Potentialströmung ist. Mit Rücksicht auf die Verluste in Schaufelungen ist es wichtig, aus dieser Überlegung zu erkennen, dass eine Schaufelreihe einer wirbel durchsetzten Strömung der hier angenommenen Art ihre Wirbel nicht einfach auf reversiblen Wege entziehen kann, sondern sie kann nur Gegenwirbel in die Strömung abgehen lassen, welche durch Reibungseffekte die ursprünglichen Wirbel zum Verschwinden bringen. Die Zirkulation der Trennfläche ist hier wiederum gleich dem Zirkulationsunterschied der beiden Endprofile der Schaufel, und die Gestalt des entsprechenden Wirbellinienbildes ist grundsätzlich die in Figur 8a angegebene.

## 7. Wirbelverluste

Trotz der Kompliziertheit der Vorgänge kann man doch qualitative Aussagen über die Wirbelverluste machen. Betrachten wir zuerst den Sekundärwirbel. Für ein nur ablenkendes (nicht die Geschwindigkeit änderndes) Gitter fanden SQUIRE und WINTER Gleichung (3) als Näherungsausdruck für die Wirbelstärke  $\zeta$ . Figur 10a veranschaulicht den senkrechten Querschnitt, durch den aus einem Schaufelkanal austretender Stromfaden, dessen Höhe gleich  $l$  und dessen Breite gleich  $a$  ist. Ist die Gestalt des Geschwindigkeitsprofils gegeben, die Grenzschichtdicke also proportional  $l$ , so ist  $\partial w / \partial z$  umgekehrt proportional und proportional der Geschwindigkeit  $w_0$  in der Mitte des Stromfadens. Also wird

$$\zeta \sim \partial \frac{w_0}{l}.$$

Die längs der Kontur  $ABCD$  gebildete Zirkulation  $\Gamma$  ist das über die entsprechende Fläche erstreckte Integral von  $\zeta$ , so dass die Proportionalität

$$\Gamma \sim a l \zeta \sim \partial w_0 a$$

gilt. Andererseits ist  $\Gamma$  proportional den linearen Abmessungen und proportional den durch die Wirbelverteilung induzierten Geschwindigkeiten, für die ein



rgendeinem festen Punkt vorhandener Wert  $w'$  als Charakteristikum eingesetzt werden kann. Es ist daher  $\Gamma \sim a w'$  und somit aus (5)

$$a w' \sim \vartheta w_0 a. \quad (6)$$

Schliesslich ist der durch die Wirbelbewegung gegebene relative Verlust  $Z$  (kinetische Energie der Wirbelbewegung) proportional  $(w'/w_0)^2$ , also nach (6)

$$\underline{Z \sim \vartheta^2}. \quad (7)$$

Dieses Resultat gilt zwar nur unter den vereinfachenden Voraussetzungen der Theorie von SQUIRE und WINTER, doch kann daraus der ganz allgemeine

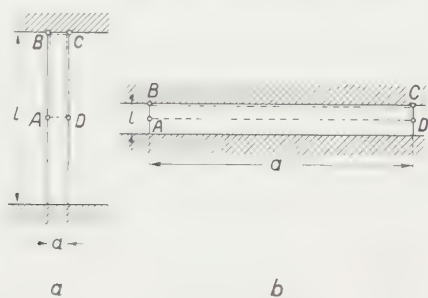


Fig. 10

Kontrollkonturen zur Bestimmung des Energieverlustes durch Sekundärströmung.

*a* Für extrem schlanke Schaufeln;

*b* für extrem gedrungene Schaufeln.

schluss gezogen werden, dass der durch den Sekundärwirbel bedingte Verlust mit zunehmendem Ablenkungswinkel sehr stark ansteigt. Eine allgemeine Erkenntnis lässt sich ferner gewinnen über den Einfluss des Erstreckungsverhältnisses der Schaufeln. Wir nehmen an, die Gestalt des Gitters im Schnitt parallel zu den Begrenzungsflächen sei gegeben, hingegen werde das Verhältnis der schaufelhöhe zur Sehnenlänge (Erstreckungsverhältnis) variiert. Die Gestalt des Geschwindigkeitsprofils sei ebenfalls vorgegeben.

Figur 10a und b sind senkrechte Schnitte durch aus einem Schaufelkanal austretende Stromfäden, und zwar entspricht Figur 10a extrem schlanken, Figur 10b extrem gedrungenen Schaufeln. Betrachten wir in beiden Fällen die Zirkulation  $\Gamma$  längs der Kontrollkontur ABCD, so ist sie

$$\Gamma = \frac{\xi}{2} a l = \int_A^B w'_t ds + \int_B^C w'_t ds + \int_C^D w'_t ds + \int_D^A w'_t ds, \quad (8)$$

wo bei  $w'_t$  die zur Kontur tangentielle Komponente der Sekundärgeschwindigkeit



keit  $w'$  ist,  $s$  der Integrationsweg und  $\bar{\zeta}$  der über die Fläche  $ABCD$  gebildete Mittelwert der Wirbelstärke.

Beschränken wir die Betrachtung zuerst auf den Fall nach Figur 10a, so können im Ausdruck (8) die Integrale von  $B$  nach  $C$  und von  $D$  nach  $A$  näherungsweise vernachlässigt werden, da hier der Integrationsweg kurz und gleichzeitig der Integrand klein ist. Die beiden restlichen Integrale ergeben zusammen  $l \bar{w}_t$ , wo  $\bar{w}_t$  der Mittelwert von  $w'_t$  über die betrachteten Strecken ist, also

$$\frac{\bar{\zeta}}{2} a l = l \bar{w}_t. \quad (9)$$

Nun setzen wir

$$\zeta \sim \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{w_0}{l} \cdot \frac{\partial W}{\partial z^*}, \quad (10)$$

wo  $W = w/w_0$ ,  $z^* = z/l$ . Bei gegebener Gestalt des Geschwindigkeitsprofils ist dann  $\partial W/\partial z^*$  von den absoluten Abmessungen des Systems unabhängig. Der Ansatz (10) ist eine Verallgemeinerung der Formel von SQUIRE und WINTER und dürfte in dieser Form wohl unter sehr allgemeinen Voraussetzungen mindestens näherungsweise zutreffen. Mit (10) ist (9) in der Form

$$\frac{a w_0}{l} \cdot \frac{\partial \bar{W}}{\partial z^*} \sim \bar{w}_t \quad (11)$$

darstellbar. Für eine gegebene Gestalt des Gitters und des Geschwindigkeitsprofils wird dann der Verlust

$$Z \sim \left( \frac{\bar{w}_t}{w_0} \right)^2 \sim \left( \frac{a}{l} \right)^2 \quad (12)$$

oder, da andererseits die Sehnenlänge  $s$  des Profils proportional  $a$  ist

$$Z = K \left( \frac{s}{l} \right)^2. \quad (13)$$

Liegt umgekehrt der Extremfall des ganz gedrunenen Gitters nach Figur 10b vor, so verschwinden praktisch die Integrale von  $A$  bis  $B$  und  $C$  bis  $D$ , und die beiden anderen ergeben zusammen  $2 a \bar{w}_t$ . Folglich tritt an die Stelle von (9)

$$\frac{\bar{\zeta}}{2} a l = 2 a \bar{w}_t, \quad (14)$$

während (11) zu ersetzen ist durch

$$a w_0 \frac{\partial \bar{W}}{\partial z^*} \sim a \bar{w}_t. \quad (15)$$

Damit wird aber das für den Verlust massgebende Verhältnis  $w_1/w_0$  unabhängig vom Erstreckungsverhältnis, das heisst, wir haben ein konstantes  $Z$ :

$$Z = Z_{max} \quad (16)$$

Überblickt man (13) und (16), so erkennt man, dass der Verlust  $Z$  vom Erstreckungsverhältnis  $s/l$  abhängt, gemäss einer Funktion, die durch die Kurve der Figur 11 qualitativ dargestellt ist. Für sehr kleine  $s/l$ , also sehr schlanke

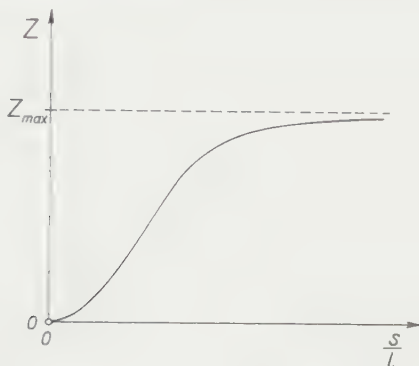


Fig. 11

Verlauf der Wirbelverluste in Funktion des Erstreckungsverhältnisses.

Schaufeln, hat die Kurve den Charakter einer quadratischen Parabel, geht aber für sehr grosse  $s/l$ , also gedrungene Schaufeln, asymptotisch in den Wert  $Z_{max}$  über.

Bekanntlich bestehen widersprechende Behauptungen darüber, ob das Erstreckungsverhältnis den Wirkungsgrad einer Schaufelung massgebend beeinflusst, wobei sich diese Behauptungen alle auf Messergebnisse stützen. Beachtet man den Verlauf der Kurve der Figur 11 und den durch (7) wiedergegebenen Zusammenhang, so wird dies verständlich. Es gibt Fälle, wo der Einfluss von  $s/l$  gering oder der ganze durch Sekundärwirbel bedingte Verlust nach (7) sehr klein ist (zum Beispiel Axialverdichter, Kaplan-Turbine) und andere, wo das Gegenteil zutrifft.

Die Überlegungen, die zur Kurve der Figur 11 führen, gelten übrigens auch für Verluste, wie sie durch die in Abschnitt 5 und 6 behandelten Strömungsformen bedingt sind. In der Tat können die Betrachtungen über die Zirkulation ebensowohl an Kontrollkonturen durchgeführt werden, welche den ganzen aus einem Kanal austretenden Stromfaden umspannen. Die Relation (10) besteht allerdings nicht mehr, doch tritt an ihre Stelle eine der Form

$$\zeta \sim \frac{w_0}{l} \varphi, \quad (17)$$

wo  $q$  eine Grösse ist, die nur von der gesamten Änderung der Zuströmrichtung bzw. der Gittergestalt längs der Schaufelhöhe abhängt. Wichtig ist an (17), dass  $l$  im Nenner steht, was darauf beruht, dass die Wirbelstärke proportional der Änderung der Zirkulation (um die Schaufel) pro Längeneinheit ist. Von (17) aus gelangt man zu (13) und (16) genau gleich wie von (10) aus.

Beachtlich ist, dass man mit dieser Überlegung auch den in Abschnitt 4 behandelten Fall mit umfasst, obwohl dort überhaupt keine über den Querschnitt stetig verteilte Wirbelstärke vorhanden ist. Würden nämlich die durch Pfeile 3 und 4 in Figur 8c angedeuteten Querbewegungen nicht auftreten, läge eine wirbeldurchsetzte Strömung vor, und die genannten Querbewegungen bestimmen eine genau entgegengesetzte Wirbelverteilung  $\zeta$ , welche gerade die Wirbelfreiheit wiederherstellt. Es ist diese Wirbelverteilung  $\zeta$ , auf die obigen Überlegungen anzuwenden sind, denn diese Querbewegungen werden in nachfolgenden Schaufelungen nicht ausnützlich sein, sondern ihre kinetische Energie wird durch Reibung aufgezehrt werden.

Selbst die Beziehung (7) hat ein Analogon im Falle der in Abschnitt 5 und 6 behandelten grenzschichtfreien Strömungen mit längs der Schaufel variierender Zirkulation. In der Tat sind ja die Quergeschwindigkeiten proportional der Veränderlichkeit der Zirkulation, wie aus dem dritten Helmholtzschen Wirbelsatz folgt. Damit wird aber der Energieverlust proportional dem Quadrat der Veränderlichkeit der Zirkulation. Hier mag es zunächst scheinen, als sei es eine physikalische Schlussfolgerung aus einem rein mathematischen Satz gezogen worden, doch trifft dies nicht zu, denn die Überlegung wird nur dadurch möglich, dass wir die Struktur des Wirbelsystems kennen, und diese wurde aus physikalischen Gesetzen erschlossen. Die quadratische Abhängigkeit der Verluste von der Variation der Zirkulation längs der Schaufel bedeutet, auf den Turbomaschinenbau übertragen, dass fehlende oder falsche Verdrehung der Schaufeln den Wirkungsgrad nur ganz unmerklich beeinträchtigen, sofern der Fehler nicht allzu gross ist. Nach der Kurve der Figur 11 trifft dies in besonderem Masse für schlanke Schaufeln zu. Zusätzliche Verluste entstehen in solchen Fällen, wenn überhaupt, so in erster Linie durch ungünstiges Anströmen einzelner Schaufelprofile und damit verbundene Strömungsablösungen.

## 8. Übertragung auf die Turbomaschine

Die Verhältnisse in der Schaufelung einer Turbomaschine weichen in dreier Hinsicht von denen im geraden Schaufelgitter ab.

Erstens ist die Strömungsform, die beim Gitter als idealer Grundfall gilt, in der Richtung und Grösse der Geschwindigkeit sowie Druck sind überall längs der Schaufelhöhe konstant –, kein möglicher Gleichgewichtszustand mehr. An dieser Stelle tritt die im englischen Sprachgebrauch als «free vortex flow» bezeichnete Strömung: Axialkomponente über die Schaufelhöhe konstant, Umfangskomponente

nente  $c_u$  längs des Radius  $r$  variierend gemäss  $rc_u = \text{const.}$  Abweichungen gegenüber den oben durchgeführten Überlegungen entstehen dadurch nicht, denn man hat nur die Strömung  $rc_u = \text{const.}$  als idealen Grundfall zu nehmen und Abweichungen hiervor in genau gleicher Weise zu betrachten, wie das oben für das gerade Gitter geschah.

Zweitens tritt als weiterer Effekt hinzu, dass die Grenzschichten an den Laufschaufeln unter dem Einfluss der Fliehkraft nach aussen abgedrängt werden. Damit überlagert sich den bisherigen Wirbelströmungen noch eine weitere, deren Mechanismus demjenigen der gewöhnlichen Sekundärströmung analog ist. Die Bedeutung dieses Effektes wird übrigens häufig überschätzt, denn die Spuren, welche die Strömung oft an bestaubten Laufschaufeln hinterlässt, zeigen, dass die Grenzschichten nur verhältnismässig wenig auszentrifugiert werden.

Eine dritte Abweichung – die weitaus schwerwiegendste – besteht darin, dass die hier durchweg vorausgesetzte stationäre Strömung bei der Turbomaschine höchstens im ersten Schaufelkranz verwirklicht ist. Schon die dem zweiten Schaufelkranz zufließende Strömung hat (relativ zu diesem) einen komplizierten periodischen instationären Charakter. Was die Turbomaschinen-theorie bis heute tut – ohne es ausdrücklich zu sagen, meist wohl ohne sich überhaupt darüber im klaren zu sein – ist folgendes: Man betrachtet diese ganzen instationären Schwankungen als eine Art grobe Turbulenz, welche sich einer stationären Grundströmung überlagert. Wenn der Charakter dieser stationären Grundströmung durch diese „geordnete Grobturbulenz“ nicht massgebend beeinflusst wird – das hat man bisher angenommen –, dann lassen sich alle oben durchgeführten Überlegungen ohne weiteres auf die Turbomaschine übertragen. Ob aber diese Annahme zulässig ist, bleibt dahingestellt. Dafür spricht lediglich die Tatsache, dass grobe, unerklärliche Abweichungen zwischen der Erfahrung und sonst gut fundierten Theorien im Turbomaschinenbau kaum aufgetreten sind.

### *Summary*

When a fluid is flowing past rows of deviating blades, such as used in turbo machines, different vortex systems will arise. These vortex systems are largely uninvestigated and so far there has not even existed any survey of the phenomena to be expected. An attempt is made to give such a survey.

Eingegangen: 10. Februar 1953.)

## Optimale Rechengenauigkeit bei Rechenanlagen mit gleitendem Komma

Von KLAUS SAMELSON und FRIEDRICH L. BAUER, München<sup>1)</sup>

### § 1. Problemstellung

Für die Darstellung von Zahlen in programmgesteuerten Rechenautomaten sind zwei Varianten unter den Stichworten «festes Komma» und «gleitendes Komma» bekannt<sup>2)</sup>.

Beim Rechnen mit gleitendem Komma werden die Zahlen in der Maschine selbst halblogarithmisch, das heisst in der Form  $x \cdot 2^n$ ,  $x < 1$ , dargestellt<sup>3)</sup>. Da bei festem Komma notwendigen umständlichen Vorbereitungen zur Feststellung des angemessenen Zahlenbereichs oder Programmierungsmassnahmen, die ein Überlaufen des Rechenwerks verhindern, fallen dabei weg. Die Maschine errechnet automatisch den jeweils gültigen Skalenfaktor, der sich im Exponenten ausdrückt und üblicherweise nach jeder arithmetischen Operation durch die Forderung  $1/2 \leq x < 1$  für die Mantisse  $x$  neu festgelegt wird.

Bekanntlich werden dadurch häufig, etwa bei der Subtraktion nahezu gleicher Zahlen, die letzten, mit Ungenauigkeit (zum Beispiel Rundungsfehlern) behafteten Stellen unter Vortäuschung einer nicht vorhandenen Genauigkeit weit nach links gerückt. Um dies zu verhindern, muss man die Forderung  $1/2 \leq x$  fallen lassen. Vielmehr hat die Maschine selbst (gegebenenfalls nach Anweisung durch das Programm) die Genauigkeit des Ergebnisses jeder arithmetischen Operation abzuschätzen und die Mantisse entsprechend zu verschieben. Dadurch wird hier der Exponent des Ergebnisses festgelegt. Die erstmalige Fixierung des Dual-exponenten bei der Zahleneingabe ist Sache der Umrechnungsroutine und wird in § 2 dieser Arbeit behandelt.

### § 2. Diskussion des Abbrechfehlers

Ausdrücklich betont werden soll, dass die von der Maschine durchzuführende Abschätzung sich *nur* auf die einzelne Rechenoperation bezieht. Die Fortpflanzung von Ungenauigkeiten in den Eingabewerten und von internen Rundungsfehlern durch längere Serien von Rechenoperationen hindurch kann wohl kaum von der Maschine selbst kontrolliert werden und wird daher hier nicht diskutiert.

Dementsprechend wird bei der Untersuchung der arithmetischen Operation die Annahme gemacht, dass die Mantissen der beiden der Maschine jeweils zur Verfügung stehenden Operanden nach einem der in RSS. § 3.6, angegebenen Verfahren richtig gerundet sind und infolgedessen einen Fehler tragen, der etwa dem Verfahren  $b$  maximal die halbe Einheit der letzten angegebenen Stelle beträgt.

<sup>1)</sup> Mathematische Arbeitsgruppe für Rechenanlagen der Technischen Hochschule München.

<sup>2)</sup> Vgl. zum Beispiel den Bericht von H. RUTISHAUSER, A. SPEISER und E. STIEFEL, ZAMP 277, 339 (1950); 2, 1, 63 (1951). (Zitiert: RSS.)

<sup>3)</sup> Wir beziehen uns der Einfachheit halber stets auf das reine Dualsystem.



beträgt. Das formale Ergebnis der Rechenoperation ist dann mit einem gewissen Fehler  $F_1$  der Mantisse behaftet. Besitzt es mehr Stellen als die Operanden, so soll die Grössenordnung des Fehlers von der Maschine zur Bestimmung der Zahl der brauchbaren Stellen benützt werden.

Es ist selbstverständlich, dass der zusätzliche Rundungsfehler  $F_2$ , den das Abbrechen des formalen Ergebnisses mit sich bringt, von der gleichen Grössenordnung ist wie der Fehler  $F_1$ . Das Ergebnis trägt also einen Gesamtfehler, der stets grösser als  $F_2$  ist und maximal etwa das Doppelte davon beträgt. Es kann aber von per Maschine bei der nächsten Rechenoperation nur als richtig gerundet behandelt werden. Ein allmähliches Akkumulieren des Gesamtfehlers, wie es sich auch hier ergibt, kann demnach prinzipiell nicht verhindert werden, wenn man nicht stets so abbricht, dass  $F_1$  gegen  $F_2$  zu vernachlässigen ist. Dies würde jedoch den Verlust einer ganzen Reihe brauchbarer Stellen bei jeder Operation bedeuten, wie er zum Beispiel bei der Multiplikation mit festem Komma auftritt, wenn beide Faktoren klein gegen 1 sind.

### § 3. Die arithmetischen Operationen

Der obenerwähnte Fehler  $F_1$  ist nun für die Grundrechenoperationen "with the machine's eye-view" abzuschätzen. Dabei ist an eine Parallelmaschine mit  $N$  Mantissenstellen gedacht. Die Operanden seien mit

$$z_1 = (x + \Delta x) 2^n \quad \text{und} \quad z_2 = (y + \Delta y) 2^m$$

bezeichnet.  $x$  und  $y$  sind die als Rechengrössen zur Verfügung stehenden Mantissen,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Rundungsfehler, deren Beträge voraussetzungsgemäss jeweils höchstens den Wert  $2^{-(N+1)}$  haben.

#### a) Addition und Subtraktion

Vor Beginn einer Addition oder Subtraktion sind nötigenfalls die Exponenten anzugleichen, selbstverständlich durch Erhöhung des *kleineren* mit gleichzeitiger *Rechts*verschiebung der zugehörigen Mantisse und Rundung auf  $N$  Stellen, zum Beispiel für  $n < m$

$$x 2^n + y 2^m = (x 2^{n-m} + y) 2^m.$$

Die bei dem üblichen Verfahren eventuell anschliessende Linksverschiebung der Summe unter Nachholung von Nullen ist zu unterlassen. Der Gesamtfehler beträgt maximal eine Einheit der letzten Stelle, ist also höchstens gleich  $2 F_2$ .

#### b) Multiplikation

Für den Fehler  $F_1$  gilt bis auf Grössen zweiter Ordnung

$$F_1 = |x \Delta y + y \Delta x| \leq (|x| + |y|) 2^{-(N+1)} \leq \text{Max}(|x|; |y|) 2^{-N}.$$

Sei etwa  $|x| \leq |y|$  und  $2^{-(k+1)} \leq |y| < 2^{-k}$ , das heisst,  $|y|$  habe genau  $k$  Nullen hinter dem Komma. Dann ist  $F_1 < 2^{-(N-k)}$ . Abzubrechen ist dementsprechend hinter der  $(N + k - 1)$ -ten Stelle; der Gesamtfehler ist kleiner als  $2 F_2$ .

Die  $(N + k - 1)$ -te Stelle befindet sich im allgemeinen in MR. Es sind also  $k - 1$  Linksverschiebungen aus MR nach AC durchzuführen. Dies ist stets möglich, da voraussetzungsgemäss das Produkt mindestens  $2k$  Nullen hinter dem Komma enthält.



## c) Division

Für den Quotienten  $z_1/z_2$  muss  $|x| < |y|$  vorausgesetzt werden, damit die Durchführbarkeit der Division gewährleistet ist. Dies ist gegebenenfalls vorher durch Rechtsverschiebung der Zählermantissee zu erzwingen.

Für  $F_1$  ergibt sich in erster Ordnung

$$F_1 = \left| \frac{1}{y^2} (y \Delta x - x \Delta y) \right| \leq \frac{1}{|y|} \left( 1 + \frac{|x|}{|y|} \right) 2^{-(N+1)} \leq \frac{1}{|y|} 2^{-N}.$$

Sei wieder  $2^{-(k+1)} \leq |y| < 2^{-k}$ , dann ist  $1/|y| \leq 2^{k+1}$ , also  $F_1 \leq 2^{-(N-k-1)}$ . Abzubrechen ist also hinter der  $(N - k - 2)$ -ten Stelle, die in AC liegt. Demnach sind  $k + 2$  Rechtsverschiebungen durchzuführen. Der Gesamtfehler beträgt wie der höchstens  $2 F_2$ .

Die angegebenen Abschätzungen für  $F_1$  sind unter Umständen um einen Faktor 2 zu grob, soweit sie von der Zahl  $k$  der Nullen von  $|y|$  hinter dem Komma abhängen, für  $|x| \ll |y|$  sogar nahezu um einen weiteren Faktor 2. Da überdies der Mittelwert des Fehlerbetrags sicher merklich kleiner als die angegebenen Grenzen ist, könnte man daran denken, in der Regel bei der Multiplikation Linksverschiebungen, bei der Division  $k + 1$  oder gar nur  $k$  Rechtsverschiebungen des Zwischenergebnisses durchzuführen und zusätzliche Rechtsverschiebungen nur bedarfsweise einzuprogrammieren. Dies wäre auch deshalb zweckmässig, weil der Fehler  $F_1$  auf die Hälfte zurückgeht, wenn einer der beiden Operanden (bei der Addition derjenige mit dem grösseren Exponenten) exakt ist.

Sind beide Operanden exakt, so kann angenommen werden, dass sie unter Ausnützung der vollen Stellenzahl, also ohne Nullen hinter dem Komma, vorliegen. Das Ergebnis steht dann von selbst richtig.

## § 4. Technische Durchführung

Abschliessend soll diskutiert werden, durch welche Massnahmen die Maschine nach jeder Rechenoperation die richtige Lage der Mantissee und damit den Exponenten automatisch bestimmen kann.

Bei der Addition und Subtraktion ist die technische Durchführung nach 3a) im grundsätzlichen evident. Der Exponent wird  $\text{Max}(n; m)$ .

Die Multiplikation und Division ist abhängig von der Anzahl  $k$  der Nullen nach dem Komma im Betrag von  $y$ , das heisst der grösseren der beiden Faktorenmantissen bzw. der Mantissee des Nenners. Eine einheitliche Behandlung ist möglich, wenn man stets vor Beginn der Rechenoperation den Fall  $k = 0$  erzwingt. Man hat dazu so lange Linksverschiebungen (bei der Division in MD, bei der Multiplikation in MD oder MR) durchzuführen, bis die  $2^0$ - und die  $2^{-1}$ -Stelle entgegengesetzte Werte annehmen<sup>1)</sup>. Die dabei nachgeholten Nullen beeinflussen nur Stellen des Ergebnisses, die beim Abbrechen wieder wegfallen. Abschliessend Rechtsverschiebungen könnten nach der im Schlussabsatz des § 3 geführten Diskussion unter Umständen wegfallen.

Eine einheitliche Behandlung der Multiplikation und Division soll kurz skizziert werden:

Beide Operanden werden gleichzeitig so lange nach links verschoben, bis sie am Komma auflaufen. Zur Ermöglichung der Division ist unter Umständen eine Rechtsverschiebung in AC vorzunehmen. Die an dem kleineren Operanden durch-

<sup>1)</sup> Nachdem bei der Division AC gegebenenfalls vorher auf die Stellenzahl von MD nach rechts verschoben worden ist, wie in § 3c) erwähnt.

geführten überzähligen Linksverschiebungen werden durch eine gleiche Anzahl Rechtsverschiebungen des Ergebnisses kompensiert. Der Mehraufwand an Schaltelementen ist gering gegenüber dem gesamten Aufwand für eine Rechenmaschine mit gleitendem Komma in der üblichen Bauweise.

### § 5. Konvertierung halblogarithmisch dargestellter Zahlen vom Dezimal- ins Dualsystem

Eine Zahl  $s$  laute in dezimaler, halblogarithmischer Darstellung

$$s_{dez} = p_{dez} 10^i, \quad (p_{dez} = 0, p_1 p_2 p_3 \dots p_L)$$

Alle  $L$  Stellen sollen mit gültigen Ziffern ausgefüllt sein, also  $1/10 \leq p_{dez} < 1$ , falls  $s_{dez}$  exakt<sup>1)</sup> oder mit mindestens  $L$  Stellen bekannt ist. Im letzteren Fall beträgt der Rundungsfehler höchstens eine Einheit der letzten Stelle. Falls jedoch  $s_{dez}$  sei es etwa als Näherungsbruch einer Irrationalzahl oder als fehlerbehafteter Messwert einer physikalischen Grösse, mit weniger als  $L$  gültigen Ziffern vorliegt, so soll, in Übereinstimmung mit dem Grundsatz von § 1, die letzte gültige Ziffer an die  $L$ -te Stelle zu liegen kommen<sup>2)</sup>.

Durch diese Forderung der «optimalen Genauigkeit» legen wir nun auch die Mantisse  $u_{dual}$  und den Exponenten  $k$  von  $s$  nach der Konvertierung

$$s_{dez} \equiv p_{dez} 10^i = u_{dual} 2^k \equiv s_{dual}$$

fest, das heisst, wir bestimmen  $k$  so, dass für

$$u_{dual} = \left( p_{dez} \frac{10^i}{2^k} \right)_{dual} = p_{dual} t_{dual}$$

die Bedingung  $1/2 \leq t_{dual} \equiv (10^i/2^k)_{dual} < 1$  erfüllt wird.

Die Umrechnungsvorschrift lautet also:

1. Konvertiere  $p_{dez}$  in  $p_{dual}$ , im wesentlichen nach bekannten Methoden (SSR. 3.7);
2. konvertiere  $10^i$  in  $t_{dual} 2^k$  mit  $1/2 \leq t_{dual} < 1$ ;
3. bilde  $p_{dual} (t_{dual} 2^k) = u_{dual} 2^k$ .

$s_{dual} = u_{dual} 2^k$  ist die Dualdarstellung von  $s$ .

Zu 1: Die Umrechnung einer in  $L$  Tetraden direkt verschlüsselten Dezimalmantisse  $p_{dez}$  in eine  $4M$ -stellige Dualmantisse geschieht bekanntlich folgendermassen:

$$q_0 = 0, \quad q_k = 10 q_{k-1} + 16^{-M} p_k \quad (k = 1, 2, \dots, L), \quad p_{dual} = q_L : \left( \frac{10^L}{16^M} \right).$$

$L$  Tetraden ergeben, dual umgerechnet, rund  $2 \log(10^L) \approx 3,32 L$  Dualziffern. Üblicherweise hat man  $L = M$  und füllt  $\approx 0,68 M$  Stellen der insgesamt  $N = 4 M$  Dualstellen nicht aus. Wenn man jedoch die Konvertierung direkt an die tetradenweise Eingabe anschliesst, kann man eine fast vollständige Ausnützung der verfügbaren Dualstellen erzielen, zum Beispiel mit  $L = 12$  bei  $M = 10$  ( $N = 40$ ).

Zu 2. Die Umrechnung von  $10^i$  in  $t_{dual} 2^k$  verläuft ebenfalls rekursiv, wobei jetzt das Exponentenrechenwerk herangezogen wird. Für  $i > 0$  hat man

$$y_0 = \frac{1}{2} 2^1, \quad y_h = \frac{5}{4} 2^3 y_{h-1}, \quad y_i = (10^i)_{dual} = t_{dual} 2^k.$$

<sup>1)</sup> Exakt (hinsichtlich der Stellenzahl  $L$ ) soll heissen, dass  $s_{dez}$  eine ganze Zahl  $< 10^L$ , dividiert durch eine beliebige Zehnerpotenz, darstellt.

<sup>2)</sup> Oder an eine andere, aber feste Stelle  $L' < L$ , wenn in einem Rechengang grundsätzlich nur Zahlen mit weniger als  $L'$  Stellen verarbeitet werden sollen.

Die Multiplikation mit  $5/4 = 2^0 + 2^{-2} > 1$ , die nicht als Routinemultiplikation ausgeführt werden kann, läuft in einem einfachen Zyklus von Additionen und Rechtsverschiebungen ab. Dabei erfolgt immer wieder ein Überlaufen des Mantissenrechenwerks, das durchaus erwünscht ist. Es führt zur automatischen Korrektur durch Rechtsverschiebung unter Erhöhung des Exponenten um 1. Man hat somit für  $t_{dual}$  gerade immer die Forderung  $1/2 \leq t_{dual} < 1$  erfüllt.

Für  $i < 0$  ist  $p_{dual} 10^{|i|}$  zu berechnen.

Verwendet man zweistellige Dezimalexponenten  $i = \alpha 10 + \beta$ , so bedeutet es eine Abkürzung des Verfahrens, wenn man, mit Hilfe des gespeicherten Wertes  $(10^{10})_{dual} = (10^{10}/2^{34}) 2^{34} = r 2^{34}$ ,  $10^i = 10^{\alpha 10 + \beta}$  als  $r^\alpha 10 \beta \cdot 2^{34\alpha}$  berechnet. Man kann dann den Dezimalexponenten direkt tetradisch verschlüsselt eingeben und behandeln. Negative Exponenten werden zweckmässig in derselben Form  $\alpha 10 + \beta$ , aber mit  $\alpha < 0$ ,  $0 \leq \beta \leq 9$  dargestellt, so dass hinsichtlich  $\beta$  keine Fallunterscheidung mehr zu machen ist. Auf die verschiedenen möglichen Varianten des Verfahrens soll nicht weiter eingegangen werden.

### § 6. Rückkonvertierung vom Dual- ins Dezimalsystem

Die Rückkonvertierung von  $s_{dual} = u_{dual} 2^{k'}$  stellt grundsätzlich eine Umkehrung des Verfahrens von § 5 dar. Die Umrechnungsvorschrift lautet:

1. Konvertiere  $2^{k'}$  in  $10^i/t_{dual}$ ,  $1/2 \leq t_{dual} < 1$ ; speise  $i$  aus;
2. bilde  $u_{dual} : t_{dual} = p_{dual}$ ;
3. konvertiere  $p_{dual}$  in  $p_{dez}$ , im wesentlichen wieder nach bekannter Methode (RSS. 3.7).

$p_{dez} 10^i$  ist die Dezimaldarstellung von  $s = s_{dual}$ .

Zu 1: Für die Umrechnung von  $2^{k'}$  in  $10^i/t_{dual}$  wird die Rekursion von § 5, 1, benutzt. Sie ist abzubrechen bei der Zahl  $i$ , für welche erstmals  $k \geq k'$  wird<sup>1)</sup>. Anschließend sind noch  $k - k'$  Rechtsverschiebungen von  $u_{dual}$  durchzuführen.

Zu 2: Die Division der reinen Mantissen,  $u_{dual} : t_{dual}$ , kann nur noch als Operation mit festem Komma ausgeführt werden, da der Exponent bereits abgebaut ist. Sie ist stets ausführbar, wenn man (als einfachste Lösung) vor Ablauf des Schrittes<sup>1)</sup> durch eine Rechtsverschiebung der Mantisse mit Exponentenangleichung  $|u_{dual}| < 1/2$  erzwingt.

Auch die Ausgabe zweistelliger Dezimalexponenten ist in sinngemässer Umkehr der Überlegung am Schluss von § 5 direkt tetradenweise durchführbar. Hierfür ist zunächst die Zehnerstelle

$$\alpha = \frac{k' - k''}{34} \quad (k'' \equiv k' \pmod{34}; 0 \leq k'' < 34)$$

zu berechnen und  $u_{dual}$  durch  $r^\alpha$  zu dividieren. Der Rest  $k''$  wird mit Hilfe der Zehnerrekursion abgebaut und liefert die Einerstelle  $\beta$  des Dezimalexponenten.

### Summary

Digital automatic computing machines with floating binary point are investigated with respect to their accuracy. It is concluded that special devices can be designed without difficulty, which guarantee the highest accuracy obtainable with a fixed number of digits. For binary computers, a modification of the usual conversion routine is necessary, which is discussed in detail.

(Eingegangen: 27. Februar 1953.)

<sup>1)</sup> Praktisch dürfte es wohl am zweckmässigsten sein, das Anfangsglied  $y_0$  der Rekursion durch  $y'_0 = y_0 2^{-|k|}$  zu ersetzen und nach dem Vorzeichenwechsel im Exponenten abzubrechen.

## Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. Mai 1953 in Genf<sup>1)</sup>

### Berichte über angewandte Physik und Mathematik

**Biegeschwingungen verwundener Stäbe**, von A. TRÖSCH<sup>2)</sup>, New York, M. ANLIKER<sup>3)</sup>, Zürich, und H. ZIEGLER, ETH., Zürich.

Mit Hilfe der programmgesteuerten Rechenmaschine des Instituts für angewandte Mathematik an der ETH. werden die natürlichen Frequenzen der Biegeschwingungen von einseitig eingespannten, geraden Stäben, die im ungespannten Zustand wie ein Propellerblatt verdreht und deren Querschnitte ideal schmal sind, exakt berechnet. Die Masse pro Längeneinheit, der Verdrehungswinkel pro Längeneinheit sowie die Biegesteifigkeiten bezüglich der Hauptachsen werden dabei als konstant vorausgesetzt. Eine ausführliche Veröffentlichung ist geplant.

**Projekt einer elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH.**, von A. P. SPEISER<sup>4)</sup>.

Eine der Aufgaben des Instituts für angewandte Mathematik ist die Lösung numerischer Aufgaben, welche aus Kreisen der Hochschule und der Industrie gestellt werden. Zu diesem Zweck wurde 1950 eine programmgesteuerte, mit Relais arbeitende Rechenmaschine in Betrieb genommen. Diese ist aber heute trotz einem fast durchgehenden Tag- und Nachtbetrieb dem Andrang an Problemen nicht mehr gewachsen, so dass viele Aufgaben zurückgestellt werden müssen.

Es ist daher ein Projekt einer elektronischen Rechenmaschine ausgearbeitet worden, welches sich vom bestehenden Gerät durch höhere Rechengeschwindigkeit, grössere Speicherkapazität und flexiblere Programmgebung unterscheidet. Die projektierte Maschine arbeitet im Dezimalsystem; die Zahlen werden in der Form  $\pm a \cdot 10^{\pm b}$  dargestellt, wobei  $a$  11 Dezimalstellen und  $b$  2 Dezimalstellen hat. Das Speicherwerk enthält eine rotierende Trommel mit einem magnetischen Belag, auf dem die Ziffern als Dipole aufgezeichnet werden; insgesamt können 10 000 Zahlen und Befehle gespeichert werden. Die Rechenzeit beträgt 20 ms für die Multiplikation und 5 ms für die Addition. Dazu kommen noch gewisse Wartezeiten für die Ablesung aus dem Speicher. Die Inversion einer zehnstufigen Matrix dauert 2,5 min.

Die elektronischen Teile der Maschine enthalten Vakuumröhren und Kristallhoden; ferner werden Relais überall dort eingesetzt, wo sie die Rechengeschwindigkeit nicht reduzieren. Der Verkehr mit der Aussenwelt geschieht durch Lochkarten und automatische Schreibmaschinen. Auf die Entwicklung neuartiger Schaltelemente wird im Interesse einer schnellen Fertigstellung und einer hohen Betriebssicherheit verzichtet; dagegen wird die logische Planung im Sinne einer Reduktion des Aufwandes an Schaltelementen sehr sorgfältig durchgeführt. Die

<sup>1)</sup> Die Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft findet am 6. September 1953 in Lugano im Rahmen der Generalversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft statt.

<sup>2)</sup> Institute for Applied Mathematics and Mechanics, University of New York.

<sup>3)</sup> Assistenz für technische Mechanik an der ETH., Zürich.

<sup>4)</sup> Institut für angewandte Mathematik, ETH., Zürich.



vollständige Maschine wird ungefähr 1200 Röhren, 2000 Kristalldioden und 30 Relais enthalten.

Gegenwärtig sind Versuche im Gang, welche die Einzelheiten der Schaltelemente, insbesondere der magnetischen Speicherung, abklären werden. Erstes Ziel dieser Versuche ist der Bau eines Speicherwerkes im reduzierten Maßstab, welche im Dauerbetrieb auf seine Zuverlässigkeit hin erprobt werden kann.

### Wärmeübergang im Atomreaktor, von W. TRAUPEL<sup>1)</sup>.

Das Problem der Wärmeübertragung im Atomreaktor ist deshalb schwierig, weil in kleinem Raum sehr viel Wärme entwickelt wird, zu deren Übertragung weder eine sehr grosse Oberfläche noch eine grosse Temperaturdifferenz zur Verfügung steht.

Von den drei grundsätzlich möglichen Arten der Wärmeübertragung – Strahlung, Leitung und Konvektion (Wärmetransport durch bewegtes Medium) – kommt für die Abgabe der im Reaktor entwickelten Wärme an ein wärmeverwertendes System wesentlich nur die dritte in Frage. Strömt der Wärmeträger *laminar*, so liegt allerdings insofern noch ein Wärmeleitungsvorgang vor, als für jedes Raumelement die algebraische Summe der eingeleiteten und durch Strömung hereingeführten Wärme verschwinden muss. Strömt das Mittel durch einen Kanal, von dessen Wandungen her Wärme eintritt, so erfolgt die Wärmezufuhr zum Raumelement rein durch Leitung, die Wärmeabfuhr durch die strömende Bewegung. Es kommt in diesem Falle also lediglich auf die weitmöglichste Steigerung des Wärmeleitvorganges an, das heisst Wahl eines Mediums mit hoher Wärmeleitfähigkeit und kleine Kanalabmessungen (kleine Leitungswege, grosse Temperaturgradienten). Kleine Kanalabmessungen sind ohnehin notwendig, damit überhaupt laminare Strömung entsteht. Obwohl gerade die beliebige Steigerung des Wärmeüberganges durch Verkleinerung der Kanalabmessungen theoretisch sehr verlockend ist, stehen dieser Lösung bis heute grosse technologische Schwierigkeiten im Wege. Bekanntlich muss das Uran von einer dichten Hülle umgeben sein, die den Übertritt radioaktiver Spaltprodukte in den Wärmeträger verhindert. Die Erfüllung dieser Bedingung wird schwierig, wenn man sich etwa vorstellt, dass feine Kühlkanäle in grosser Zahl die Uranmasse durchsetzen. Ausserdem stellt das Zuführen und Wegführen des Wärmeträgers bei der Vielzahl und Kürze der Kühlkanäle grosse konstruktive Probleme.

Praktisch kommt daher nur Wärmeübertragung durch *turbulente* Strömung in Betracht. Hierbei tritt die Wärmeleitung grössenordnungsmässig in den Hintergrund gegenüber dem Wärmetransport durch die turbulente Querbewegung im Kanal. Die Wärmebilanz für ein Raumelement lautet dann so, dass die durch die Hauptströmung wegtransportierte Wärme gleich ist der durch die turbulente Querbewegung einfließenden. Diese ist aber proportional der Wärmekapazität  $\rho c_p$  des Mediums und dem statistischen Mittelwert der Quergeschwindigkeiten. Letzterer ist in grober Näherung proportional der Geschwindigkeit  $w$  der Hauptbewegung, so dass das Produkt  $\rho c_p w$  wesentlich massgebend für die Wärmeübertragung wird. Einer beliebigen Steigerung dieser Grösse durch Wahl einer hohen Geschwindigkeit steht entgegen, dass der Strömungswiderstand – bedingt durch die Notwendigkeit des ständigen Aufrechterhaltens der Turbulenzbewegung – proportional  $(\rho/2) w^2$  ist, der Leistungsaufwand zu seiner Überwindung also sogar proportional  $(\rho/2) w^3$ . Man wählt folglich zweckmässig einen Wärmeträger, dessen Produkt  $\rho c_p$  möglichst hoch liegt, weil dann mit kleinem  $w$ , also kleiner Leistung

<sup>1)</sup> Gebrüder Sulzer AG., Winterthur.

dissipation, auszukommen ist. Flüssigkeiten sind deshalb ungleich günstiger als Gase. Unter der engen Auswahl, die uns die kernphysikalischen Bedingungen noch lassen, findet sich jedoch keine, die von schweren Nachteilen frei wäre. Wasser muss unter hohem Druck gehalten werden, soll der Reaktor mit einer Temperatur arbeiten, die eine auch nur einigermaßen wirtschaftliche Umwandlung der Wärme in Arbeit gestattet. Flüssige Metalle (Pb, Bi, Sn) bieten Aussicht auf Erfolg, doch sind die technischen Schwierigkeiten gross. Gase sind nur bei hohen Drücken (zum Beispiel 40 at und mehr) aussichtsreich, weil dann  $q$  einigermaßen günstig ist; sie haben den Vorteil, dass bei ihnen Druck und Temperatur voneinander unabhängig sind. Am günstigsten sind leichte Gase, vor allem He, weil bei diesem  $c_p$  hoch liegt, was das Verhältnis zwischen  $q$ ,  $c_p$ ,  $\bar{u}$  und  $(q/2)\bar{u}^2$  günstig beeinflusst. Grundsätzlich sehr günstig ist der Wärmeübergang an eine verdampfende Flüssigkeit, weil bei ihr der Verdampfungsvorgang selbst die Turbulenz anfährt.

### Kinematische Ähnlichkeit bei Hydrozyklonen, von R. GREGORIG<sup>1)</sup>.

Nach einem Hinweis über den zu grossen Aufwand zur experimentellen Ermittlung des Wirkungsgrades eines Hydrozyklons nach den strengen Gesetzen der Modellähnlichkeit werden einige vereinfachende Annahmen zur Reduktion der Kennzahlen gemacht. Die wesentlichste darunter ist die Unterdrückung der Erdbeschleunigung gegenüber der Zentripetalbeschleunigung. Als neue Kennzahl wird, neben der Reynolds-Zahl der Flüssigkeitsströmung relativ zu den Wänden des Hydrozyklons, die Reynolds-Zahl der Relativströmung um das Korn eingeführt. Das bis heute leider noch etwas spärliche Versuchsmaterial zeigt, dass die Annahmen nicht falsch waren.

### Calculs et mesures relatifs au col de tuyères supersoniques, par B. CHAIX<sup>2)</sup> et P. HENRICI<sup>3)</sup>, (communiqué par B. CHAIX).

Le calcul et la mise en service de nouvelles tuyères supersoniques dans la soufflerie de l'Institut d'Aérodynamique ont confirmé que pour construire une tuyère assurant un écoulement uniforme dans la section de mesure, la connaissance exacte de l'écoulement transsonique au travers de la section minimum est déterminante. En effet, les perturbations dans l'écoulement supersonique ne s'amorçent pas, malgré la distance séparant les sections considérées. Les mesures et les calculs de l'écoulement dans la zone critique du col de la tuyère nous ont permis de construire des veines de mesure dans lesquelles la vitesse est uniforme à  $\pm 1,5\%$  près. Cet écart peut être considérablement réduit si l'on tient compte, en dessinant le col de la tuyère, de la variation de la couche limite: Pour le calcul de cette dernière, des mesures complémentaires en régime turbulent ont été faites.

Dans les écoulements plans, que nous considérons ici, le calcul graphique de la limite supersonique par la méthode des caractéristiques ne pose pas de problèmes particuliers. Mais il convient, eu égard à la limite de validité de cette méthode, d'amorcer le réseau non pas sur la ligne sonique, mais en aval de celle-ci, dans le domaine nettement supersonique. Comme, sous l'influence de la convexité de la paroi, le fluide atteint la vitesse du son en amont du col, il règne déjà une vitesse supersonique - à laquelle correspond un angle caractéristique  $\omega_s > 0$  - au point où la paroi a une tangente horizontale. La caractéristique partant de ce point et aboutissant plus en aval sur l'axe de symétrie, pourra donc servir de condition

<sup>1)</sup> Escher Wyss AG., Zürich.

<sup>2)</sup> Institut d'Aérodynamique, E. P. F., Zurich.

<sup>3)</sup> Actuellement: American University, Washington.



*initiale* au calcul du réseau de caractéristiques. Elle décrit l'écoulement au col d'une manière particulièrement simple: La direction de l'écoulement est la même aux deux extrémités de cette ligne – horizontale, à la paroi comme sur l'axe – et les pressions sont par conséquent aussi égales, puisque ces deux points se trouvent sur la même caractéristique. Entre les points extrêmes de cette ligne de Mach, que nous appelons  $S$  à cause de sa sinuosité, la pression varie, passant par un maximum au point d'inflexion du  $S$ . En ce point l'écoulement s'éloigne de l'axe de la tuyère, formant avec celui-ci un angle  $\phi'$ . Comme notre caractéristique  $S$  est traversée en son point d'inflexion par une caractéristique de l'autre famille partant de la limite sonique sur l'axe ( $\omega = 0$ ;  $\gamma' = 0$ ), on trouve à l'intersection  $\phi' = \omega_s/2$ . L'angle  $\omega_s$  rend donc l'essentiel du  $S$ .

A part les mesures exécutées pour déterminer les conditions initiales  $S$ , des calculs ont été faits, qui décrivent le  $S$  dans une approximation semblable à celle des formules de SAUER pour la ligne sonique. On obtient entre autres:

$$\omega_s = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{3}} \left( \frac{\gamma}{R} \right)^{3/2},$$

où  $\gamma$  est la demi-hauteur du col,  $R$  le rayon de courbure de la paroi, et  $\gamma$  l'exposant adiabatique.

Pour préciser encore les relations entre la forme de la tuyère en amont du col et les conditions initiales de l'écoulement supersonique, un développement en série contenant deux paramètres permet de tenir compte non seulement de la courbure de la paroi au col, mais encore de la tangente au point d'inflexion amont. Une tuyère dessinée en partant d'un col ainsi calculé a fait ses preuves tout aussi bien que celles qui furent dessinées à partir d'un col préalablement essayé. Ces calculs transsoniques peuvent donc remplacer les mesures préliminaires pour la détermination des conditions initiales  $S$  de l'écoulement supersonique.

### Untersuchungen über Strahlumlenkung, von K. ISELAND<sup>1)</sup>.

Das Gegenstück zum Bremspropeller bei Propellerflugzeugen würde bei Düsenflugzeugen eine «Strahlbremse» darstellen, das heisst eine Vorrichtung, die erlaubt, den Triebwerkstrahl umzukehren und dessen Schub zur Bremsung zu verwenden.

Im Hinblick auf die Entwicklung einer solchen Strahlbremse wurden im Institut für Aerodynamik der ETH. Versuche, vorerst an einem inkompressiblen Luftstrahl, durchgeführt. Auf Vorschlag von Professor ACKERET kam folgendes System zur Anwendung: Dem Strahl wird vor der Düse Drall gegeben. Beim Austritt aus der Düse spreizt er dann auseinander und wird von halbtorusförmigen Ringen aufgefangen, die ihn umlenken. Ohne Drall strömt der Strahl in der Mitte der Umlenkringe durch, deren Innendurchmesser grösser ist als der Strahldurchmesser. Ein Kranz von drehbaren Schaufeln im Schubrohr erlaubt es, dem Strahl beliebig viel oder gar keinen Drall zu erteilen, das heisst auf Brems- oder Antriebsschub einzustellen.

Messungen mit einer solchen Apparatur ergaben eine gute Umlenkung des ganzen Strahls von einem gewissen minimalen Drall an. Es entsteht jedoch vor der Düse, im Schubrohr, ein Druckanstieg, welcher am Triebwerk eine Erhöhung des Druckes nach der Turbine, das heisst Gefahr des Pumpens des Kompressors bedeutet. Um diesen zu beseitigen, wurden Düsen mit verstellbarem Querschnitt verwendet, sowohl mit Nadel- wie mit Klappenregulierung. Dadurch war es

<sup>1)</sup> Institut für Aerodynamik, ETH., Zürich.

möglich, den Druck vor der Düse bis auf 1,7–6 % (ja nach Anordnung der Ringe) konstant zu halten. Es wurden Bremsschübe von bis zu 60 % des normalen Düsen-schubes erreicht.

Über einen Teil dieser Versuche ist in der «Interavia» (Heft Nr. 3, 1953) berichtet.

### Mittel und Methodik der Literaturbearbeitung, von JAN R. DE FRIES<sup>1)</sup>.

Am Beispiel der Einflussfaktoren, die bei der konstruktiven Gestaltung von Gleitlagerungen zu berücksichtigen sind, lässt sich zeigen, welch wertvolle Dienste ein zentraler, systematisch arbeitender Literaturnachweis dem Forscher und dem Konstrukteur erweisen kann, wenn die Voraussetzungen einer harmonischen, offenen Zusammenarbeit beider Instanzen vorhanden sind. Es sind in der Praxis zu einem recht grossen Teil psychologische Hemmnisse, die einer Anpassung der Literaturnachweisteknik an den Entwicklungsstand anderer Hilfsmittel im Wege stehen. Diese Hemmnisse sind zum Teil vielleicht das Ergebnis vieler unfruchtbarer Versuche, durch eine abstrakte Titeldokumentation, welcher der so notwendige technische Realismus des Kommentars fehlt, zum Ziele zu kommen, aber auch die problematische Bereitschaft der Benützer zu einem echten «Teamwork» soll nicht unerwähnt bleiben.

Die Aufgaben der Literaturbearbeitung stellen sich nach zwei Seiten: nach der Antwort auf eine spezifische, vom Benützer gestellte Frage, die fast immer erst der analytischen Gegenfrage, Ergründung und Präzisierung des Problems, bedarf, um den Nachweis mit jener dokumentarischen Breite führen zu können, die zur Ergänzung spezialisierten Wissens so notwendig ist – und die im Prinzip ähnliche analytische Stellung der Vielzahl von Antworten potentiellen Fragen gegenüber, die der ständig gesichteten Literatur zu entnehmen sind. Durch das Bilden einer «Modellvorstellung» des beschriebenen Vorganges, durch Einteilung und Kommentar können die sehr fruchtbaren Querverbindungen der technischen Erfahrung geschaffen werden, die die dankbarste Aufgabe systematischer Literaturbearbeitung darstellen. Aber über dieses mit der Breite des Arbeitsgebietes stets etwas laienhafte Urteilen und Einteilen hinaus gestattet das System des ständigen Sichtens auch das Erfassen von Veränderungen, die fast unmerklich in einem Gebiet der Naturwissenschaft oder der angewandten Technik eintreten und dem Leser vereinzelter Artikel kaum sichtbar werden, aber für die Disposition zukünftiger Aufgaben entscheidende Bedeutung haben können.

Die Flut technischer Publikationen stieg in die Zahl von 3 Millionen pro 1950, eine Zahl, die mit aller Deutlichkeit beweist, dass die technische Dokumentation analytischer Richtung eine elementare Forderung unserer Zeit ist.

### Influence des pertes de charge sur la stabilité de la vitesse d'un groupe hydroélectrique, par L. BOREL<sup>2)</sup>.

Le but de cette étude est la recherche des conditions de stabilité du réglage d'un groupe hydroélectrique sous l'influence simultanée du coup de bélier et de la perte de charge dans la conduite d'amenée. Le calcul se fait selon les méthodes usuelles, en appliquant le critère de HURWITZ à une équation différentielle linéaire du troisième ordre.

Désignant par  $k = H_r/H_0$  la valeur relative de la perte de charge en régime permanent, par  $m$  le temps caractéristique du dosage accélérométrique, par  $\tau'$  le

<sup>1)</sup> Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt, Zürich.

<sup>2)</sup> Ateliers des Charmilles, Genève.

temps caractéristique de la promptitude de réglage, par  $T$  le temps caractéristique de l'inertie mécanique du groupe, par  $\theta$  le temps caractéristique de l'inertie hydraulique du système d'alimentation et posant:

$$\alpha = 1 - 2k, \quad \beta = \frac{2}{3} \alpha (1 + k), \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha}},$$

il est possible d'énoncer les conclusions suivantes:

1° Le système est instable, si

$$k > \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire si la perte de charge est plus élevée que la moitié de la chute nette

2° Le système est instable, si

$$\frac{m}{\theta} < \frac{1}{\beta}.$$

3° Le système est stable, si

$$\frac{\tau' T}{(3\theta/2)^2} > K = \frac{8(1+\gamma)[\alpha(1+\gamma) - \beta]}{27\beta^2\gamma}$$

et si, simultanément, le rapport  $m/\theta$  est suffisamment voisin de la valeur optimum

$$\left(\frac{m}{\theta}\right)_{opt} = \frac{1+\gamma}{\beta}.$$

Si nous admettons que cette dernière circonstance est toujours réalisée, la principale condition de stabilité est:

$$\tau' T > K \left(\frac{3}{2} \theta\right)^2.$$

Le calcul de stabilité dans lequel la perte de charge est négligée conduit à une condition de forme identique à la forme ci-dessus, mais où le coefficient  $K$  a la valeur 1,66.

Die Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft findet am 6. September 1953 in Lugano im Rahmen der Generalversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft statt.

## Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven**, Reihe «Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus», Band 1. Von L. LOCHER-ERNS (Birkhäuser, Basel 1952). 87 S., 169 Abb.; sFr. 12.50.

Das Büchlein gibt eine Einführung in die Geometrie der reellen, projektiven Ebene, wie sie vor allem von C. JUEL entwickelt wurde, und vereinigt dabei in glücklicher Weise mathematische Strenge mit einer geometrischen Anschaulichkeit, die durch eine Fülle schöner Figuren noch gesteigert wird. Der Verfasser stützt sich auf ein geschickt gewähltes Axiomensystem für eine projektive Geometrie mit Anordnung und Stetigkeit, definiert zunächst in einfacher Weise die elementaren Kurvenbogen und die geschlossene Elementarkurve so, dass pathologische Fälle von vornherein ausgeschlossen sind, und untersucht dann neben den Kurvenbogen ohne Wendepunkte und Spitzen (Spiralenbogen) in erster Linie die Elementarkurven dritter Ordnung und diejenigen dritter Klasse. Der gesamte Aufbau ist dabei in sich dual gestaltet.

Wenn auch diese Dinge den Anwendungen etwas fernerliegen, so verdient das Buch trotzdem in weitesten Kreisen Interesse wegen der Fülle an Anschauungsmaterial zur projektiven Geometrie und insbesondere zum Dualitätsprinzip, die es enthält. Es sei deshalb allen Lehrern und Studenten der Mathematik wärmstens empfohlen! Druck und Ausstattung sind vorzüglich und ansprechend.

G. Bol, Freiburg i. Br.

**Statistical Theory with Engineering Applications.** By A. HALD (John Wiley & Sons, New York, 1952). 782 pp.; \$9.00.

A. HALD, der als Professor für Statistik an der Universität Kopenhagen wirkt, hat hier ein sehr ausführliches und umfassendes Lehrbuch der mathematischen Statistik verfasst, wobei er sich in erster Linie an den Ingenieur richtet. Die mathematischen Grundlagen werden in möglichst elementarer Form geboten; an mathematischen Hilfsmitteln wird nichts vorausgesetzt, was über die übliche Differential- und Integralrechnung hinausginge. Alle theoretischen Erörterungen werden durch Beispiele von Anwendungen anschaulich gemacht.

Als Handbuch der modernen statistischen Methoden kann das Werk von HALD, vor allem auch dank seiner klaren Darstellung, lebhaft empfohlen werden.

A. Linder

**Statistical Tables and Formulas.** By A. HALD (John Wiley & Sons, New York, 1952), 97 pp., \$2.50.

Zu dem oben angezeigten Werk hat HALD eine besondere Sammlung von Tafeln zusammengestellt, die für die Durchführung statistischer Arbeiten unerlässlich sind. Vorausgeschickt sind die mathematischen Formeln und Angaben über die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der verschiedenen Tafeln.

A. Linder

**Schwerkraft und Weltall.** Von P. JORDAN (Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1952), 207 S., 4 Abb.; DM 15.80.

Kosmologie und Kosmogonie als Lehre von Struktur und Entstehung des Weltalls beschäftigen seit den Anfängen der Wissenschaft die spekulative Phantasie. Grossen Auftrieb erhielten sie nach Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie, da der hier zutage tretende Zusammenhang zwischen Raumstruktur und Materieerfüllung bestimmte Modelle für den Kosmos als Ganzes lieferte. Doch blieben diese Theorien wesentlich unbefriedigend, weil ihre Aussagen in heftigem Widerspruch zu Erfahrungstatsachen (zum Beispiel bezüglich des Alters der Welt) stehen, falls man nicht die Einsteinschen Feldgleichungen in etwas willkürlicher Art durch Addition des «kosmologischen Glieds» abändert.

Ein weiteres Problem, das erst von EDDINGTON als solches erkannt wurde und auf welches die allgemeine Relativitätstheorie keine Antwort gibt, ist die ausserordentliche Kleinheit der Gravitationskonstanten, das heisst die Tatsache, dass die Gravitationsanziehung der Teilchen etwa im Wasserstoffatom  $2 \cdot 10^{39}$ -mal kleiner ist als die elektrische Anziehung. EDDINGTON selber versuchte, diese Zahl  $2 \cdot 10^{39}$  mit der auf  $10^{79}$  geschätzten Anzahl Nukleonen im Weltall in Verbindung zu bringen und eine Deutung für diese riesigen Zahlen zu geben, die aber als misslungen zu betrachten ist. Ein neuer Gedanke wurde durch DIRAC an das Problem herangetragen: DIRAC vermutete (1937), dass jene beiden Zahlen nicht Naturkonstanten, sondern Zeitfunktionen seien, Funktionen des in Elementarteilchen gemessen etwa  $10^{80}$  betragenden Weltalters. Dies bedeutet nichts anders,



als dass die Gravitationskonstante  $f$  selbst nicht als Konstante, sondern als Feldgrösse anzusehen wäre. P. JORDAN griff diesen Gedanken auf und entwickelte eine Verallgemeinerung der allgemeinen Relativitätstheorie, in der neben den metrischen und elektrischen auch  $f$  als Feldgrösse erscheint. Einer der schönsten Zufälle in der Geschichte der Wissenschaften – sind es wirklich Zufälle? – wollte es, dass er das notwendige Werkzeug dazu fertig geschmiedet vorfand in der aus einem ganz andern Problemkreis entstandenen projektiven Relativitätstheorie.

Bekanntlich wurde bald nach EINSTEINS Entdeckung des Zusammenhangs zwischen Metrik und Gravitation verschiedentlich versucht, auch das elektromagnetische Feld zu «geometrisieren». Einer dieser Versuche war der von KALUZA (1921), die Welt durch ein *fünfdimensionales* Koordinatenkontinuum darzustellen. Es zeigte sich dann, dass die natürliche Interpretation dieser fünfdimensionalen Koordinaten war, sie als projektive Koordinaten für ein vierdimensionales Koordinatum aufzufassen, wobei aber eine quadratische Metrik in den projektiven Koordinaten selber definiert ist. Diese Metrik spaltet beim Übergang zu vierdimensionalen (affinen) Koordinaten in eine vierdimensionale Metrik  $g_{ik}$ , ein schiefes Tensorfeld  $F_{ik}$  und eine Invariante  $J$ ; die den Einsteinschen analogen fünfdimensionalen Feldgleichungen spalten bei Hinzunahme einer Nebenbedingung  $J = 1$  genau in das Einstein-Maxwellsche System von Gleichungen für die Gravitationspotentiale  $g_{ik}$  und das elektromagnetische Feld  $F_{ik}$ .

JORDANS Entdeckung bestand nun darin, dass man bei Fallenlassen der Bedingung  $J = 1$  eine erweiterte Theorie erhält, die gerade die Eigenschaft hat, die Gravitationskonstante – im Wesentlichen  $J$  – als neue Feldgrösse einzuführen. Allerdings bleibt eine gewisse Willkür in den Feldgleichungen bestehen, die sich jedoch weitgehend reduzieren lässt.

Mit dieser erweiterten Theorie erhält nun auch die kosmologische Frage eine neue Beleuchtung. Neue Modelle für den Kosmos werden möglich: insbesondere eines, das die Diracsche lineare Abnahme der Gravitationskonstanten mit der Zeit liefert, sowie ein anderes, das vielleicht die Spontanentstehung von Sternen beschreibt, ein Prozess, der in solchen Theorien nötig ist, da der Energiesatz kosmologische Modifikationen erleidet. (Gerade hier hat die Theorie allerdings eine wesentliche, von JORDAN selber betonte Lücke, indem die Neuentstehung von Materie nach den Grundgleichungen eigentlich durch stetiges Wachstum der vorhandenen Massen erfolgen sollte, was mit der Erfahrung unvereinbar zu sein scheint. JORDAN vermutet die Existenz einer in den Gleichungen nicht ausgedrückten Relaxation, welche diesen kontinuierlichen Prozess verhindert und spontane Entstehung von Sternen an seine Stelle setzt.) Dass diese Modelle in einzelnen noch ebenso unzulänglich sind wie die der bisherigen Theorie, ist nicht sehr schwerwiegend; nach der neuen Theorie existieren deren noch viele andere, die zu untersuchen eine Aufgabe der Zukunft ist.

Diese ganze, bisher in Originalarbeiten verstreute, nur mühsam überblickbare Entwicklung wird im vorliegenden Werk ihres Hauptförderers in souveräner Weise zusammenhängend dargestellt. JORDAN bringt das Meisterstück zustande in mathematisch einwandfreier und vollständiger und dennoch leicht lesbarer Form die (gewöhnliche) allgemeine Relativitätstheorie (inklusive ihrer mathematischen Grundlegung, der Riemannschen Geometrie), die projektive Verallgemeinerung samt Anwendungen und ausführlicher Diskussion in einem Band von nur 200 Seiten unterzubringen. Sicher sind die hier dargelegten Theorien noch unfertig; doch sind sie in voller Entwicklung begriffen und haben bereits einige theoretische und empirische Erfolge zu buchen. Jedenfalls ist das Buch eine an

gende, ja spannende und lohnende Lektüre für jeden Physiker und Astronomen; für den, der sich näher mit der kosmologischen Forschung befasst, bildet es eine dauernde Quelle und unentbehrliche Hilfe.

M. R. Schafroth

**Einführung in die theoretische Gasdynamik.** Von R. SAUER (Springer-Verlag, Berlin 1951). 174 S., 107 Abb.; DM 16.50.

Die 1943 erschienene ausgezeichnete *Einführung in die theoretische Gasdynamik* von Prof. SAUER ist in demselben Verlag in neuer Auflage erschienen. Diese enthält zahlreiche kleinere Erweiterungen und ist ganz allgemein auf den heutigen Stand der Technik gebracht worden. Wesentlich ist dabei die Einbeziehung des Charakteristikenverfahrens für nicht wirbelfreie Überschallströmungen und ein ganz neuer Abschnitt über dreidimensionale Probleme, insbesondere nicht rotationssymmetrische Überschallströmungen um Drehkörper mit Anstellwinkel und endliche Tragflügel. (Siehe auch Rezension der französischen Übersetzung: *Ecoulements des fluides compressibles*, ZAMP 3, Fasc. 4, 318 [1952].)

Die neue Auflage von SAUERs Buch, die sich wiederum an die Ingenieure wendet, welche sich für die mathematische Behandlung der stationären Strömungen bei hohen Geschwindigkeiten interessieren, ist durch seine klare und übersichtliche Darstellung gekennzeichnet. Es ist ein vorzügliches Buch, dessen Studium jedermann, der sich in das Gebiet der modernen Gasdynamik einarbeiten will, zur Freude gereichen wird.

R. Sängner

**An Introduction to Acoustics.** By R. H. Randall (Addison Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1951). 340 pp., 140 figs; \$6.00.

Wenn der Verfasser im Vorwort feststellt, dass sich sein Buch in theoretischer Beziehung an MORSES *Vibration and Sound* anlehnt und in praktischer Beziehung an BERANEKS *Acoustic Measurements* grenzt, so hat er es damit sehr zutreffend charakterisiert. Es ist ein Lehrbuch im besten Sinne des Wortes mit vielen modernen Beispielen, die seine Lektüre sehr lebendig und anschaulich gestalten. Gleichzeitig wird auf diese Art ein Querschnitt durch den heutigen Stand der Technik vermittelt, wobei man natürlich keine Vollständigkeit erwarten darf.

Das Buch ist in erster Linie für Studierende der Ingenieurwissenschaften und der Physik bestimmt. Es enthält deshalb, wie das bei amerikanischen Büchern häufig üblich ist, am Ende jedes Kapitels eine Anzahl typischer und gut ausgewählter Aufgaben. Die theoretischen Grundlagen sind einfach, klar und sauber dargestellt, ebenso die praktischen Beispiele, und überall ist grösster Wert auf physikalische Anschaulichkeit gelegt. Durchweg wird das cgs-Maßsystem verwendet, was erneut zeigt, dass die Einführung des Giorgi-Systems in die Akustik einigen Hemmungen begegnet, die offenbar darauf zurückzuführen sind, dass hier das cgs-System direkt als technisches Maßsystem dient. Die trotzdem gelegentlich anzutreffenden Angaben in Fuss und Zoll sind kleine Schönheitsfehler, die man anglo-sächsischen Autoren tolerieren muss.

Das Buch ist sehr sorgfältig gedruckt und hervorragend ausgestattet und ist sicherlich eines der besten Lehrbücher, die auf diesem Gebiete in den letzten Jahren erschienen sind. Aus dem reichhaltigen Inhalt seien die folgenden Punkte kurz erwähnt: Im ersten Kapitel wird ein sehr schöner Abriss über die allgemeine Schwingungslehre gegeben, wobei die Kenntnis der elementaren Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt wird. Zwei weitere Abschnitte sind den ebenen und räumlichen Wellen sowie der Strahlung gewidmet, an die sich ein sehr schöner Teil über die so wichtigen Interferenzprobleme anschliesst; hier werden einfache



Beugungsprobleme, die in der Akustik so bedeutsam sind, behandelt. Weiter folgen Abschnitte über die akustische Impedanz, von welcher zu den Hörnern und Resonatoren und schliesslich zu der Wellenausbreitung übergeleitet wird. Besondere Erwähnung verdient dabei der Abschnitt über akustische Linsen.

Diese schon an und für sich reichhaltige erste Hälfte wird durch weitere Kapitel abgerundet, von deren Inhalt die folgenden Stichworte einen Begriff vermitteln: Saiten, Membranen, Musikinstrumente; Reflexion, Absorption; Sprach- und Gehör; Messmethoden; Schallwidergabe; Raumakustik; Ultraschall, Wärmeschall, Materialprüfung.

Dieser zweite Teil des Buches ist notwendigerweise sehr summarisch gehalten und dient lediglich dazu, das Bild des Gebietes zu ergänzen und abzurunden und gegebenenfalls zum Studium der einschlägigen Spezialliteratur anzuregen.

Das Buch kann nicht nur dem Studierenden, sondern auch dem praktisch tätigen Ingenieur und Physiker, der sich mit Schallfragen in irgendeiner Form zu befassen hat, wärmstens empfohlen werden.

W. Furrer

**Antennas, Theory and Practice.** By S. A. SCHELKUNOFF and H. T. FRIS (John Wiley & Sons Inc., New York 1952). 639 pp., \$10.00.

Dieses Werk über Antennen, verfasst von zwei berufenen Fachleuten der Bell Telephone Laboratories, zerfällt in drei Teile. Der erste Teil (Kapitel 1) gibt uns in Form eines Buches im Buche einen umfassenden Überblick über das gesamte Gebiet der Antennen, der zweite Teil (Kapitel 2 bis 9) schafft ohne Verwendung der Vektoranalysis und unter Beschränkung zeitraubender Ableitungen bekannter Grundgleichungen das Fundament für die im dritten Teile behandelte Antennen und Antennensysteme. Dieser zweite Teil umfasst, neben Definitionen ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, die Probleme der ebenen und der sphärischen Wellen, die gerichtete Strahlung und die Reflexionen an der Erde, die Stromverteilung in Antennen, die Impedanzen und Äquivalenzen von Antennen und die Berechnung wirksamer Antennenflächen und des Antennengewinns. Der dritte Teil (Kapitel 10 bis 19) wendet nun die in den ersten beiden Teilen des Buches abgeleitete Theorie auf spezifische Antennen und Antennensysteme an. Kapitel 10 behandelt die sogenannten «kleinen Antennen» (Lineardimensionen der Antenne kleiner als ein Achtel der Wellenlänge), Kapitel 11 die eigenresonanten Antennen (Dipolantennen), Kapitel 12 ist einer allgemeinen Theorie linearer Antennen gewidmet. Kapitel 13 befasst sich mit der Impedanz von Dipolantennen, während das Kapitel 14 bzw. 15 die für Kurzwellenverbindungen wichtige Rhombusantennen bzw. die linearen Antennensysteme erläutert. Die letzten vier Kapitel, 16 bis 19, behandeln zur Hauptsache Mikrowellenantennen, Hornantennen, Schlitzantennen, Reflektoren und Mikrowellenlinsen.

Neben einer ausgewählten, Publikationen bis 1951 umfassenden Bibliographie enthalten eine Anzahl von Kapiteln das Selbststudium anregende Probleme neben ihren Lösungen. Eine Zusammenstellung der Bücher, welche Antennen und ihre Probleme erörtern, ferner eine für den Praktiker sehr wertvolle Zusammenfassung von Angaben und Formeln über Leitungen, Dipolantennen, Antennensysteme, Hornantennen und Linsen sowie ein nach Namen und Sachgebiet geordneter Index runden das Buch ab.

Das Werk von SCHELKUNOFF und FRIS ist jedem Leser, welcher sich mehr als nur oberflächlich mit Antennenproblemen vertraut machen will, als Lehrbuch wie auch als Nachschlagewerk sehr zu empfehlen. Ich zweifle nicht daran, dass dieses Buch innert kürzester Zeit in jeder Fachbibliothek den ihm gebührenden Ehrenplatz einnehmen wird.

H. Hagg

# Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis

Zusammenfassender Bericht

Von LOTHAR COLLATZ, Hamburg<sup>1)</sup>

In der praktischen Analysis sind in neuerer Zeit die Bestrebungen, Fehlerabschätzungen für Näherungswerte und damit exakte Einschliessungen für gesuchte Werte aufzustellen, bei weiten Klassen von Aufgaben erfolgreich gewesen. Insbesondere hat man bei nichtlinearen Aufgaben in vielen Fällen Existenz von Lösungen nachweisen und Schranken für die Lösungen gewinnen können. Die Erweiterung des Wirkungsbereiches früherer Ergebnisse beruht vielfach auf einer Anwendung funktionalanalytischer Methoden; allerdings bedürfen diese Methoden häufig noch einer Umgestaltung, und es bleibt oft viel Freiheit in der Art der Anwendung, so dass viel Erprobung notwendig ist, um die für numerische Zwecke jeweils günstigste Art festzustellen. Daher ist es vielleicht verfrüht, jetzt schon einen zusammenfassenden Bericht über dieses Gebiet zu schreiben. Wenn hier trotzdem ein solcher Versuch unternommen wird, so ist der Gedanke bestimmend, dass durch diesen Versuch weitere Kreise durch die bereits erzielten Erfolge angeregt werden sollen, mehr als bisher Fehlerabschätzungen durchzuführen, Erfahrungen zu sammeln und den Wirkungsbereich der Methoden weiter zu vergrössern.

Die Gedankengänge werden manchem Leser vielleicht etwas abstrakt erscheinen; deshalb sind Nr. 1 und 2 absichtlich sehr breit geschrieben, zugleich auch, weil eine Fassung des allgemeinen Satzes über das Iterationsverfahren gegeben werden sollte, die unmittelbar die Anwendung auch auf nichtlineare Aufgaben gestattet.

Vollständigkeit bezüglich der Anwendungen funktionalanalytischer Methoden war nicht Ziel des Aufsatzes, insbesondere sind die Anwendungen auf Eigenwertaufgaben, über die schon viel Literatur vorliegt (vgl. zum Beispiel [16], [22]<sup>2)</sup>), fortgelassen worden.

## 1. Einige Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis

Der im folgenden wiedergegebene, für das Weitere grundlegende Beweis ist im wesentlichen der Arbeit von WEISSINGER [25] entnommen, aber auf eine

<sup>1)</sup> Forschungsstelle für praktische Mathematik der Universität.

<sup>2)</sup> Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 356.

Form gebracht, bei welcher die Voraussetzungen bei Anwendungen unmittelbar nachprüfbar sind (vgl. die Zusammenfassung am Schluss der Nr. 2).

Es sei ein (abstrakter) Raum  $R$  gegeben und  $f, f_1, f_2, \dots$  Elemente von ihm. Die Elemente können zum Beispiel Zahlen, Vektoren, Funktionen sein. Für je zwei Elemente  $f_1, f_2$  des Raumes (kurz für  $f_1, f_2 \in R$ ) sei ein «Abstand»  $\|f_1 - f_2\|$  als reelle nichtnegative Zahl definiert mit den Eigenschaften

1. Symmetrie  $\|f_1 - f_2\| = \|f_2 - f_1\|$ ,
2. Definitheit: In  $\|f_1 - f_2\| \geq 0$  steht das Gleichheitszeichen genau für  $f_1 = f_2$
3. Dreiecksungleichung:

$$\|f_1 - f_2\| \leq \|f_1 - f_3\| + \|f_3 - f_2\| \quad \text{für } f_1, f_2, f_3 \in R. \quad (1)$$

Ist zum Beispiel  $R$  der Raum der im abgeschlossenen Intervall  $\langle a, b \rangle$  mit  $a < b$  eindeutigen stetigen Funktionen  $f(x)$  einer reellen Veränderlichen  $x$ , so kann man als Abstand definieren:

$$\|f_1 - f_2\| = \max_{a \leq x \leq b} \frac{|f_1(x) - f_2(x)|}{W(x)}, \quad (2)$$

wobei  $W(x)$  eine in  $\langle a, b \rangle$  festgewählte positive stetige Funktion ist.

Bei der Anwendung ist gewöhnlich eine kommutative Addition von Elementen erklärt und  $R$  bezüglich dieser Addition eine additive Gruppe; es gibt ein Nullelement  $\Theta$  in  $R$  mit  $\Theta + f = f$  für alle  $f \in R$  und zu jedem  $f$  ein Inverses  $-f$  mit  $f + (-f) = \Theta$ . Dann kann man an Stelle des Abstandes etwas bequemer eine Norm definieren:

$$\|f\| = \|f - \Theta\|. \quad (3)$$

Die Norm  $\|f\|$  eines Elementes ist der Abstand vom Nullelement.

Ein Teilraum  $F$  von  $R$  heisst vollständig, wenn zu jeder Elementenfolge  $f_1, f_2, \dots$  aus  $F$  mit

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| = 0$$

ein Grenzelement  $f$  aus  $F$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$$

existiert.

Bei dem obigen Beispiel der in  $\langle a, b \rangle$  stetigen Funktionen ist bei dem Abstandsbegriff (2) die Gesamtheit der in  $\langle a, b \rangle$  stetigen, den Ungleichungen  $u_1(x) \leq f(x) \leq u_2(x)$  genügenden Funktionen  $f(x)$  ein vollständiger Teilraum (vgl. BANACH [1]), wobei  $u_1(x), u_2(x)$  zwei festgewählte stetige Funktionen mit  $u_1(x) \leq u_2(x)$  sind.

Nun sei ein Operator  $T$  definiert, der den Elementen  $f$  von  $F$  eindeutig Elemente  $Tf$  zuordnet, die zu  $R$  gehören. Der Operator  $T$  heisst lipschitzbeschränkt, wenn es eine Lipschitz-Konstante  $K$  gibt mit

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq K \|f_1 - f_2\| \quad \text{für alle } f_1, f_2 \in F. \quad (4)$$

Bei dem Beispiel der in  $[a, b]$  stetigen Funktionen  $f(x)$ , dem Abstand (2) und dem Operator  $T$  mit

$$Tf(x) = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (5)$$

wobei  $G(x, \xi)$  eine in  $a \leq x, \xi \leq b$  gegebene stetige beschränkte Funktion ist, gilt:

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq K \|f_1 - f_2\|$$

mit

$$K = \max_{a \leq x \leq b} \frac{\int_a^b |G(x, \xi)| W(\xi) d\xi}{W(x)}. \quad (6)$$

## 2. Der allgemeine Satz über das Iterationsverfahren

Es werde unter den Voraussetzungen der vorigen Nummer nach Lösungen  $u$  der Gleichung

$$f = Tf \quad (7)$$

gefragt und das folgende Iterationsverfahren angesetzt:

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Es gehöre  $u_0$  zu  $F$ ; man kann  $u_{n+1}$  so lange bilden, als  $u_n$  in  $F$  bleibt; für  $0 < n < m$  gilt

$$\left. \begin{aligned} \|u_m - u_n\| &= \|Tu_{m-1} - Tu_{n-1}\| \leq K \|u_{m-1} - u_{n-1}\| \leq \dots \\ &\leq K^r \|u_{m-r} - u_{n-r}\| \quad \text{für } 0 \leq r \leq n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und nach (1) und (9):

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\| &= \left\| \sum_{s=n}^{m-1} (u_{s+1} - u_s) \right\| \leq \sum_{s=n}^{m-1} \|u_{s+1} - u_s\| \leq \sum_{t=1}^{m-n} K^t \|u_n - u_{n-1}\| \\ &\leq K^{n-1} \left( \sum_{t=1}^{m-n} K^t \right) \|u_1 - u_0\|. \end{aligned}$$

un sei  $K < 1$ ; dann folgt

$$\|u_m - u_n\| \leq \frac{K^n}{1-K} \|u_1 - u_0\|. \quad (10)$$

Es werde nun der Teilraum  $S$  (kurz als «Kugel»  $S$  bezeichnet) eingeführt, der alle Elemente  $h$  von  $R$  mit

$$\|h - u_1\| \leq \frac{K}{1-K} \|u_1 - u_0\| \quad (1)$$

enthält. Wenn diese Kugel  $S$  im Teilraum  $F$  enthalten ist, so liegen nach (1) (für  $n \rightarrow \infty$ ) alle  $u_n$  in  $F$ , und die Iteration ist unbeschränkt durchführbar. Aus (10) folgt wegen  $K < 1$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| = 0,$$

also wegen der Vollständigkeit von  $F$  die Existenz eines Grenzelementes  $u$  aus  $F$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0. \quad (1)$$

Nach (1) und (4) folgt dann

$$\begin{aligned} \|Tu - u\| &\leq \|Tu - Tu_n\| + \|Tu_n - u\| = \|Tu - Tu_n\| + \|u_{n+1} - u\| \\ &\leq K \|u - u_n\| + \|u_{n+1} - u\|; \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$  geht nach (12) die rechte Seite gegen Null; es ist also  $Tu - u = 0$  und damit  $Tu = u$ ; zugleich ist die Existenz einer Lösung  $u$  von (7) gezeigt.

Es sei  $v$  eine etwa vorhandene weitere Lösung von (7), also  $Tv = v$ ; dann gilt nach (4)

$$\|u - v\| = \|Tu - Tv\| \leq K \|u - v\|,$$

also wegen  $K < 1$  auch  $\|u - v\| = 0$  oder  $u = v$ ; das heisst, die Gleichung (7) besitzt in  $F$  eine und nur eine Lösung. Diese liegt sogar in der Kugel  $S$ , denn nach (1) und (10) gilt

$$\|u - u_1\| \leq \|u - u_m\| + \|u_m - u_1\| \leq \|u - u_m\| + \frac{K}{1-K} \|u_1 - u_0\|.$$

Hier strebt  $\|u - u_m\|$  nach (12) für  $m \rightarrow \infty$  gegen Null, es ist also

$$\|u - u_1\| \leq \frac{K}{1-K} \|u_1 - u_0\| \quad (1)$$

das heisst,  $u$  gehört  $S$  an.

### Zusammenfassung

In einem Raum  $R$  sei eine Gleichung (7) vorgelegt. Man definiere in  $R$  einen Abstand, der den drei in Nr. 1 gestellten Forderungen genügt, und wähle einen Teilraum  $F$  so aus, dass

1.  $F$  bei dem gewählten Abstand vollständig ist,
2.  $Tf$  für alle  $f \in F$  eindeutig erklärt ist,
3.  $T$  in  $F$  einer Lipschitz-Bedingung (4) mit  $K < 1$  genügt,
4. mit dem gewählten  $u_0$  auch  $u_1 = Tu_0$  und die ganze Kugel  $S$  nach (11) zu  $F$  gehört.

Dann gilt: Die Gleichung (7) besitzt in  $F$  eine und nur eine Lösung  $u$ . Die Iteration (8) ist unbeschränkt ausführbar, und die Folge  $u_n$  konvergiert im Sinne von (12) gegen  $u$ . Gleichung (13) liefert eine Fehlerabschätzung für die Näherung  $u_1$ , das heisst  $u$  liegt in der Kugel  $S$ .

Zusatz: In manchen Fällen (zum Beispiel in Nr.5) kann man direkt erkennen, dass alle  $u_i$  in  $F$  bleiben; dann kann die Bedingung 4 fortfallen.

### 3. Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme

Ein System von  $n$  Gleichungen für  $n$  reelle oder komplexe Unbekannte  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  sei auf die Form gebracht

$$x_{(j)} = \varphi_j(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}), \quad (j = 1, \dots, n) \quad (14)$$

wobei die  $\varphi_i$  gegebene, nach den  $x_{(j)}$  in einem Bereich  $F$  des  $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ -Raumes stetig partiell differenzierbare Funktionen seien, und es werde

$$a_{jr} = \max_{\text{in } F} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{(r)}} \right| \quad (15)$$

gesetzt. Die bekanntesten Iterationsverfahren sind die Verfahren (vgl. von MISES-GEIRINGER [14]):

1. Iteration in Gesamtschritten

$$x_{(j)k+1} = \varphi_j(x_{(1)k}, \dots, x_{(n)k}). \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (16)$$

2. Iteration in Einzelschritten

$$x_{(j)k+1} = \varphi_j(x_{(1)k+1}, \dots, x_{(j-1)k+1}, x_{(j)k}, \dots, x_{(n)k}). \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (17)$$

Es bedeutet bei  $x_{(j)k}$  der erste, eingeklammerte Index die Nummer der betreffenden Unbekannten und der zweite Index die Näherungsstufe bei der Iteration, bei der man von  $x_{(1)0}, \dots, x_{(n)0}$  ausgeht; fasst man die  $x_{(j)k}$  für  $j = 1, \dots, n$  zu einer Spaltenmatrix (oder einem Vektor)  $x_k$  zusammen, so hat man bei beiden Iterationsverfahren eine Zuordnung

$$x_{k+1} = T x_k. \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (18)$$



Nun lässt sich die Theorie von Nr. 2 anwenden, und es ordnen sich verschiedene bekannte, hinreichende Konvergenzkriterien durch geeignete Wahl einer Norm hier ein.

### A. Iterationsverfahren in Gesamtschritten

1. Norm: Es werde für die Spaltenmatrix  $x$  mit den Elementen  $x_{(j)}$  die Norm

$$\|x\| = \text{Max}_j |x_{(j)}| \quad (19)$$

gewählt.

Für zwei Spaltenmatrizen  $x$  und  $y$  mit den Elementen  $x_{(j)}$  bzw.  $y_{(j)}$  ist dann nach dem Taylorschen Satz

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \text{Max}_j |\varphi_j(x_{(r)}) - \varphi_j(y_{(r)})| \leq \text{Max}_j \sum_{r=1}^n a_{jr} |x_{(r)} - y_{(r)}| \\ &\leq \left( \text{Max}_j \sum_{r=1}^n a_{jr} \right) \left( \text{Max}_r |x_{(r)} - y_{(r)}| \right) \leq K \|x - y\|, \end{aligned}$$

wenn

$$K = \text{Max}_j \sum_{r=1}^n a_{jr} \quad (20)$$

gesetzt wird. Die Bedingung  $K < 1$  ist hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens und stellt das Zeilensummenkriterium dar.

2. Norm. Es werde

$$\|x\| = \sum_{j=1}^n |x_{(j)}| \quad (21)$$

als Norm gewählt. Jetzt ist

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \sum_{j=1}^n |\varphi_j(x_{(r)}) - \varphi_j(y_{(r)})| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n a_{jr} |x_{(r)} - y_{(r)}| \\ &= \sum_{r=1}^n |x_{(r)} - y_{(r)}| \sum_{j=1}^n a_{jr} \leq K \|x - y\| \end{aligned}$$

mit

$$K = \text{Max}_r \sum_{j=1}^n a_{jr}. \quad (22)$$

Die Bedingung  $K < 1$  ist das Spaltensummenkriterium.

3. Norm. Es werde

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_{(j)}|^2} \quad (23)$$

als Norm gewählt. Unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung wird jetzt

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &= \sum_{j=1}^n |\varphi_j(x_{(j)}) - \varphi_j(y_{(j)})|^2 \leq \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{r=1}^n a_{jr} |x_{(r)} - y_{(r)}| \right\}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{r=1}^n a_{jr}^2 \right) \left( \sum_{r=1}^n |x_{(r)} - y_{(r)}|^2 \right) = \|x - y\|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n a_{jr}^2. \end{aligned}$$

Die Bedingung  $K < 1$  mit

$$K = + \sqrt{\sum_{j,r=1}^n a_{jr}^2} \quad (24)$$

ist das Erhard-Schmidtsche Kriterium.

4. Norm. LONSETH [13] schlägt noch andere Normen vor, zum Beispiel

$$\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |x_{(j)}|^p} \quad \text{mit } p > 1, \quad (25)$$

oder MORGENSTERN [15] noch allgemeiner

$$\|x\| = P^2 \sqrt[p]{\sum_{j=1}^v |x_{(j)}|^p} + Q^2 \sqrt[q]{\sum_{j=v+1}^n |x_{(j)}|^q}$$

mit  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $1 \leq v \leq n$ ,  $P > 0$ ,  $Q > 0$ . Die Lipschitz-Konstanten lassen sich bei der Norm (25) mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n |a_k|^q} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |b_k|^p}$$

mit  $(p-1)(q-1) = 1$  berechnen. (25) enthält als Spezialfälle bzw. Grenzfälle (21) für  $p \rightarrow 1$ , (23) für  $p = 2$  und (19) für  $p \rightarrow \infty$ .

### B. Iterationsverfahren in Einzelschritten

Es wird jetzt die Vorschrift (17) und (18) verwendet, und als Norm werde (19) benutzt. Wendet man den Operator (18) auf zwei Spaltenmatrizen  $x, y$  mit den Komponenten  $x_{(j)}$  bzw.  $y_{(j)}$  an und setzt man

$$|x_{(j)} - y_{(j)}| = d_j, \quad |(Tx)_{(j)} - (Ty)_{(j)}| = e_j, \quad D = \max_j d_j \quad (26)$$

(bei  $Tx$  bzw.  $Ty$  bedeutet der eingeklammerte Index  $j$  wieder die  $j$ -te Komponente), so ist

$$e_j \leq \sum_{s=1}^{j-1} a_{js} e_s + \sum_{s=j}^n a_{js} d_s. \quad (27)$$

Nun führt man (nach SASSENFELD [19]) die Grössen ein

$$\beta_1 = \sum_{s=1}^n a_{1s}; \quad \beta_j = \sum_{s=1}^{j-1} a_{js} \beta_s + \sum_{s=j}^n a_{js} \quad (\text{für } j = 2, \dots, n); \quad K = \max_j \beta_j. \quad (28)$$

Dann beweist man  $e_j \leq D \beta_j$  leicht durch vollständige Induktion: Für  $j = 1$  ist sie nach (27) richtig; nun sei sie bereits für  $j = 1, 2, \dots, k-1$  richtig dann hat man für  $j = k$  nach (27)

$$e_k \leq \sum_{s=1}^{k-1} a_{ks} D \beta_s + \sum_{s=k}^n a_{ks} D = D \beta_k,$$

wie behauptet.

Mit der Norm (19) ist also

$$\|Tx - Ty\| = \max_j e_j \leq K D = K \|x - y\|,$$

das heisst, das nach (28) berechnete  $K$  ist als Lipschitz-Konstante verwendbar.

Wenn das Zeilensummenkriterium erfüllt ist und also nach (20)

$$\max_j \sum_{r=1}^n a_{jr} = \mu < 1 \quad (29)$$

gilt, kann man etwas gröber (dafür aber bequemer, da man die Berechnung der  $\beta_j$  spart) abschätzen, indem dann

$$\beta_1 \leq \mu; \quad \beta_j \leq \sum_{s=1}^{j-1} a_{js} + \sum_{s=j}^n a_{js} \leq \mu$$

durch Induktion beweisbar ist und damit einfach  $\mu$  als Lipschitz-Konstante  $F$  benutzt werden kann.

WEISSINGER ([25], S. 199–201) bewies die Konvergenz des Iterationsverfahrens in Einzelschritten und die Gültigkeit der Fehlerabschätzungen auch für die Fälle, in denen die in (22) und (24) gegebenen Grössen  $K < 1$  sind.

Für den vielleicht wichtigsten Fall des Kriteriums  $K < 1$  nach (20) gilt die

### Zusammenfassung

Beim nichtlinearen Gleichungssystem (14) werde ein Bereich  $F$  im  $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ -Raum gewählt und die Grössen  $a_{js}$  nach (15) ermittelt. Für das Gesamtschrittverfahren (16) berechnet man  $K$  stets nach (20), für das Einzelschrittverfahren kann man zwar  $K$  ebenfalls nach (20) bilden, genauer aber verwendet man dann (28). Ist  $K < 1$ , so ist die Kugel  $S$  mit  $x_{(j)}$  als laufenden Koordinaten gegeben durch

$$\max_j |x_{(j)} - x_{(j)k+1}| \leq \frac{K}{1-K} \max_j |x_{(j)k+1} - x_{(j)k}|. \quad (30)$$

Gehört diese Kugel  $S$  ganz zu dem gewählten Gebiet  $F$ , so konvergiert beim Iterationsverfahren  $x_{jk}$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen das einzige in  $F$  vorhandene Lösungssystem von (14), und dieses liegt sogar in  $S$ , so dass (30) zugleich eine Fehlerabschätzung darstellt.

### Spezialfall des linearen Gleichungssystems

Lautet (14)

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} x_{(k)} = r_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

mit konstantem  $x_{jk}$ , so braucht man den Bereich  $F$  nicht zu wählen; die Voraussetzung, dass die Kugel  $S$  zu  $F$  gehört, fällt fort, da in (15)

$$a_{jk} = \left| \frac{\alpha_{jk}}{x_{jf}} \right|$$

konstant werden, wobei angenommen ist, dass man das Gleichungssystem nach den Hauptdiagonalgliedern auflöst, um es in die Form (14) zu bringen. Es ergeben sich dann unmittelbar die verschiedenen Kriterien in der geläufigen Gestalt.

Zwei Beispiele sollen die bequeme Anwendbarkeit der Formeln zeigen.

### Beispiele

I. Gleichung  $1 + z = e^z$ ; Iterationsvorschrift:

$$z_{k+1} = \varphi(z_k) \quad \text{mit} \quad \varphi(z) = \ln(1 + z) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Einige Iterationen ergeben:

$z_k$	$\ln(1 + z_k)$
$2\pi i$	$1,85 + 7,70 i \quad + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$
$1,85 + 7,70 i$	$2,105 + 7,499 i \quad + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$
$2,10 + 7,50 i$	$2,094 + 7,462 i \quad + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$
$z_3 = 2,09 + 7,46 i$	$z_4 = 2,08873 + 7,46128 i + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$

Als Bereich  $F$  werde  $\operatorname{Re} z \leq 0$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 2\pi$  und dort als Wert des Logarithmus weiterhin der Zweig gewählt, der sich stetig an den Wert

$$\ln(2\pi i) = \ln 2\pi + i \frac{\pi}{2}$$

anschliesst. Dort ist

$$\left| \frac{d\varphi}{dz} \right| = \frac{1}{|1 + z|} \leq K \quad \text{mit} \quad K = (1 + 4\pi^2)^{-1/2} = 0,157;$$

als Norm werde der gewöhnliche Betrag  $|z - z_4|$  gewählt; man hat nur noch nachzuprüfen, dass die «Kugel»  $S$ , hier der Kreis  $|z - z_4| \leq r$  mit  $r = [K/(1 - K)] |z_3 - z_4| = 0,00034$  dem Bereich  $F$  angehört. Das ist der Fall, also gibt es (bei dem gewählten Zweig des Logarithmus!) genau eine Lösung der Gleichung in  $F$ , die sogar in dem Kreis  $|z - z_4| \leq 0,00034$  liegt.

II. Die beiden Gleichungen für  $x, y$ :

$$x^2 + y^2 - 2 = 0, \quad 3xy - y^3 - 1 = 0$$

werden umgeschrieben:

$$x = q_1(x, y) = \frac{y^2}{3} + \frac{1}{3y}; \quad y = q_2(x, y) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Nach kurzem Iterieren kommt man etwa zu den Werten:

$$x_k = 0,755; \quad y_k = 1,195; \quad \varphi_1(x_k, y_k) = 0,75495, \quad \varphi_2(x_k, y_k) = 1,19585.$$

Man wählt daher zum Beispiel als Gebiet  $F$

$$1,195 \leq y \leq 1,197; \quad 0,754 \leq x \leq 0,756;$$

dort ist

$$a_{11} = \max_{\text{in } F} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| = 0; \quad a_{12} = 0,322 = \beta_1;$$

$$a_{21} = 0,633; \quad a_{22} = 0; \quad \beta_2 = a_{21} \beta_1 = 0,204; \quad K = 0,322; \quad \frac{K}{1 - K} = 0,475.$$

Die maximale Änderung  $\varrho$  beträgt 0,00085. Die «Kugel»  $S$  lautet nach (30)

$$|x - 0,75495| \leq \frac{\varrho K}{1 - K} = 0,00041; \quad |y - 1,19585| \leq \frac{\varrho K}{1 - K} = 0,00041.$$

Da  $S$  ganz zu  $F$  gehört, stellen diese Ungleichungen zugleich eine Fehlerabschätzung für die einzige in  $F$  vorhandene Lösung  $x, y$  des Gleichungssystems dar.

#### 4. Das gewöhnliche und vereinfachte Newtonsche Verfahren bei nichtlinearen Gleichungssystemen

Es sei das Gleichungssystem für  $n$  (reelle oder komplexe) Unbekannte  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  vorgelegt

$$f_j(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

wobei die  $f_j$  in einem Bereich  $F$  des  $x_{(r)}$ -Raumes gegebene, nach allen Argumenten stetig differenzierbare Funktionen seien. Beim gewöhnlichen Newton-

schen Verfahren berechnet man aus der  $k$ -ten Näherung die  $(k + 1)$ -te Näherung  $x_{(r) k+1}$  durch Auflösen des linearen Gleichungssystems

$$f_j(x_{(r) k}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_j(x_{(r) k})}{\partial x_{(l) k}} [x_{(l) k+1} - x_{(l) k}] = 0 \quad (j = 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots) \quad (32)$$

oder kürzer in Matrizenschreibweise

$$G(x_k) (x_{k+1} - x_k) = -f_k \quad (33)$$

mit

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{(1) k} \\ \dots \\ x_{(n) k} \end{pmatrix}; \quad f_k = \begin{pmatrix} f_1(x_k) \\ \dots \\ f_n(x_k) \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{(n)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{(n)}} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

WILLERS [26] weist darauf hin, dass es für die Rechnung bequemer ist (und oft ebenso rasch zur gewünschten Genauigkeit führt), in (33) nicht bei jedem Iterationsschritt  $G(x_k)$  neu zu berechnen, sondern mit einer festen Matrix  $G(z)$ , etwa  $G(x_0)$ , zu arbeiten. Zudem kann man dann die reziproke Matrix  $G^{-1}$  ein für alle Male berechnen. Dieses Verfahren werde vereinfachtes Newtonsches Verfahren genannt. (Vgl. [6], dort auch eine Fehlerabschätzung für Nullstellenbestimmung bei algebraischen Gleichungen mit Hilfe des Hornerschen Schemas.)

Die folgende Berechnung der Lipschitz-Konstanten und die damit gegebene Fehlerabschätzung gilt auch für das gewöhnliche Newtonsche Verfahren, da man stets den letzten Schritt des gewöhnlichen Newtonschen Verfahrens als Anfangsschritt des vereinfachten Newtonschen Verfahrens auffassen kann.

Es ist dann

$$x_{k+1} = x_k - G^{-1}(z) f_k = T x_k. \quad (35)$$

Hierdurch ist eine Transformation  $T$  erklärt. Sind  $x_k, \tilde{x}_k$  zwei verschiedene Wertesysteme, so ist

$$T \tilde{x}_{k+1} - T x_{k+1} = [E - G^{-1}(z) G(\xi_k)] (\tilde{x}_k - x_k),$$

wobei  $E$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix und  $\xi_k$  gewisse Zwischenstellen zwischen  $x_k$  und  $\tilde{x}_k$  bedeuten. Man kann nun wieder verschiedene Normbegriffe wie in Nr.3 verwenden. Mit der einfachsten Norm (19) wird

$$\| T \tilde{x}_{k+1} - T x_{k+1} \| \leq K \| \tilde{x}_k - x_k \|,$$

wenn

$$K = \text{Max}_j \sum_{r=1}^n A_{jr} \quad (36)$$



gesetzt wird; dabei ist  $A = E + G^{-1}(z) G(\xi_k)$  eine Matrix mit den Elementen  $a_{j_r}$ , und  $A_{j_r}$  sind obere Schranken für die Beträge von  $a_{j_r}$ . Es ist  $G^{-1}(z)$  eine Matrix mit festen Zahlen, aber in  $G(\xi_k)$  hat man die  $\xi_k$  den Bereich  $F$  durchlaufen zu lassen. Bei diesem vereinfachten Newtonschen Verfahren braucht man zur Abschätzung nur die ersten partiellen Ableitungen der  $f_j$ , während man beim gewöhnlichen Newtonschen Verfahren zur Abschätzung die zweiten partiellen Ableitungen mit heranziehen muss (vgl. KANTOROVITCH [11], S. 88).

## 5. Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad (37)$$

mit dem Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  werde als Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \quad (38)$$

geschrieben und als Spezialfall der Volterraschen Integralgleichung

$$y = T y \quad \text{mit} \quad T y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s G[s, t, y(t)] dt \quad (39)$$

aufgefasst. Der Kern  $G(s, t, y)$  sei im Bereich  $H$ :

$$|s - s_0| \leq a^*, \quad |t - s_0| \leq a^*, \quad |y - y_0| \leq b$$

integrierbar, beschränkt durch  $|G| \leq M$ , und genüge dort einer Lipschitz-Bedingung

$$\frac{|G(s, t, y_1) - G(s, t, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L. \quad (40)$$

Es werde noch  $a = \min(a^*, b/M)$  gesetzt. Zur Anwendung des Satzes von Nr. 2 wird der Teilraum  $F$  als die Gesamtheit der in  $|s - s_0| \leq a$  (Intervall  $J$ ) stetigen Funktionen  $y(s)$  mit  $|y(s) - y_0| \leq b$  gewählt, der nach Nr. 1 bei dem Abstand (2) vollständig ist. Geht man bei der Iteration

$$y_{n+1}(s) = T y_n(s) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

von einer Funktion  $y_0(s)$  mit  $y_0(s_0) = y_0$  und  $|y_0(s) - y_0| \leq b$  aus, so bleiben alle  $y_n(s)$  in  $F$  (es tritt der Zusatz in Nr. 2 in Wirkung). Nun ist noch zu prüfen, ob in der Lipschitz-Beschränkung (4) des Operators  $K < 1$  ausfällt.

Es wird, wenn  $y(s)$  und  $z(s)$  zwei Funktionen aus  $F$  mit  $y(s_0) = z(s_0) = y_0$  sind:

$$\left. \begin{aligned} \|Ty - Tz\| &= \text{Max}_J \frac{|Ty - Tz|}{W(s)} \\ &\leq \text{Max}_J \frac{1}{W(s)} \int_{s_0}^s |G(s, t, y) - G(s, t, z)| dt \\ &\leq \text{Max}_J \frac{L}{W(s)} \int_{s_0}^s |y - z| dt \\ &\leq \text{Max}_J \frac{L}{W(s)} \int_{s_0}^s W(t) dt \|y - z\| = K \|y - z\| \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

mit

$$K = L \text{Max}_J \frac{\int_{s_0}^s W(t) dt}{W(s)}. \quad (42)$$

MORGENSTERN [15] verwendet als  $W(s)$  die Funktion  $e^{\lambda s}$  und zeigt, dass man für  $s > s_0$  mit  $\lambda > L$  stets  $K < 1$  erreichen kann; denn es wird

$$e^{-\lambda s} \int_{s_0}^s e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{\lambda(s_0 - s)}) < \frac{1}{\lambda}.$$

Man erkennt so zugleich die eindeutige Lösbarkeit von (37) bzw. (39) im Intervall  $J$  unter den getroffenen Voraussetzungen; für numerische Zwecke ist es aber oft günstiger, andere Funktionen  $W(s)$  zu verwenden.

Beispiel: Nur zur Erläuterung sei ein ganz grobes Beispiel genannt. Bei

$$y' = f(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad y(0) = -1$$

werde der rohe Ansatz  $y_0(x) = -1 + \alpha x$  gemacht und  $\alpha$  so gewählt, dass  $y_1 - y_0 = \delta(x)$  klein ausfällt. Hier ist

$$y_1 = -1 + \frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{1 + \alpha^2}{6} x^3$$

und es werde  $\alpha = 0,45$  gesetzt. Als Teilraum  $F$  wählen wir die in  $0 \leq x \leq 1$  stetigen Funktionen  $y(x)$  mit  $-1,02 \leq y \leq 0$ ; dort ist  $|df/dy| = |y| \leq L = 1,02$ . Für  $W(x) = 1 + 4x^2$  ist

$$\text{Max}_{\langle 0,1 \rangle} \frac{\int_0^x W(t) dt}{W(x)} = \frac{7}{15},$$

also wird nach (42)

$$K = \frac{7}{15} 1,02 = 0,476; \text{ weiter ist } \|y_1 - y_0\| = \frac{0,254}{5},$$

damit nach (13)

$$\|y - y_1\| \leq \frac{0,254}{5} \cdot \frac{K}{1-K} = 0,00462,$$

mithin hat man als «Kugel»  $S$

$$|y - y_0| \leq 0,00462 (1 + 4x^2) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Da  $S$  in  $F$  liegt, stellt diese Formel zugleich eine Fehlerabschätzung dar.

Die Übertragung auf Systeme und damit auf Differentialgleichungen höherer Ordnung ist leicht und zeigt eine grosse Analogie zu den Gleichungssystemen in Nr. 3. Die Funktionen  $y_{(1)}, \dots, y_{(n)}$  werden zu einer Matrix  $y$  zusammengefasst, ebenso die Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  zu einer Matrix  $f$  und die Anfangswerte  $y_{(j)}(x_0) = y_{(j)0}$  zu einer Matrix  $y_0$ :

$$y' = f(x, y_{(1)}, \dots, y_{(n)}) \quad (43)$$

oder

$$y = T y \quad \text{mit} \quad T y = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{(j)}(t)] dt. \quad (44)$$

Hiermit ist zugleich ein Operator  $T$  festgelegt. Die Funktionen  $f_j$  mögen in einem bezüglich der  $y_{(k)}$  konvexen Bereich  $H$  des  $(x, y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$ -Raumes Lipschitz-Bedingungen genügen:

$$|f_j(x, y_{(1)}, \dots, y_{(n)}) - f_j(x, z_{(1)}, \dots, z_{(n)})| \leq \sum_{k=1}^n L_{jk}(x) |y_{(k)} - z_{(k)}|. \quad (45)$$

1. Norm:

$$\|y\| = \text{Max}_J \left( \text{Max}_j \frac{|y_{(j)}(x)|}{W_j(x)} \right). \quad (46)$$

Dabei ist  $J$  ein den Punkt  $x_0$  enthaltendes Intervall der  $x$ -Achse und  $W_j(x)$  sind (für  $j = 1, \dots, n$ ) festgewählte, in  $J$  positive stetige Funktionen. Für zwei Matrizen  $y, z$  mit  $y(x_0) = z(x_0) = y_0$  gilt dann

$$\|T y - T z\| \leq \text{Max}_J \text{Max}_j \frac{\int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n L_{jk}(t) |y_{(k)} - z_{(k)}| dt}{W_j(x)} \leq \|y - z\| K$$

mit

$$K = \text{Max}_J \text{Max}_j \frac{\int_{x_0}^x \sum_{k=1}^{n_j} L_{jk}(t) W_k(t) dt}{W_j(x)}. \quad (47)$$

Nimmt man die  $L_{jk}$  als Konstante und alle  $W_j(x)$  einander gleich:  $W_j(x) = W(x)$ , so wird

$$K = \Phi \text{Max}_j \sum_{k=1}^n L_{jk} \quad \text{mit} \quad \Phi = \text{Max}_J \frac{\int_{x_0}^x W(t) dt}{W(x)}. \quad (48)$$

Bei  $K$  hat  $\Phi$  als Faktor die maximale Zeilensumme in der Matrix der Lipschitz-Konstanten.

2. Norm:

$$\|y\| = \text{Max}_J \left( \sum_{j=1}^n \frac{|\gamma_{(j)}(x)|}{W_j(x)} \right).$$

Jetzt wird entsprechend

$$\|Ty - Tz\| \leq \text{Max}_J \sum_{j,k=1}^n \frac{\int_{x_0}^x L_{jk}(t) |\gamma_{(k)} - z_{(k)}| dt}{W_j(x)}.$$

Setzt man die  $W_j(x) = W(x)$  einander gleich und führt die maximale Spaltensumme in der Matrix der Lipschitz-Konstanten ein:

$$S(x) = \text{Max}_k \sum_{j=1}^n L_{jk}(x),$$

so wird

$$\|Ty - Tz\| \leq \text{Max}_J \frac{\int_{x_0}^x S(t) \left[ \sum_{k=1}^n |\gamma_{(k)} - z_{(k)}| \right] dt}{W(x)} \leq K \|y - z\|$$

mit

$$K = \text{Max}_J \frac{\int_{x_0}^x S(t) W(t) dt}{W(x)}. \quad (49)$$

Wieder kann man bei beiden Normen  $W(x) = e^{\lambda x}$  mit genügend grossem  $\lambda$  setzen und damit in einem hinreichend kleinen Intervall Existenz eines Lösungssystems und Konvergenz des Iterationsverfahrens sicherstellen; für numerische Zwecke kommen oft auch andere Funktionen  $W_j(x)$  in Frage.

Es interessiert noch die Anwendung auf das System

$$y'_{(j)} = y_{(j+1)} \quad (\text{für } j = 1, 2, \dots, n-1), \quad y'_{(n)} = g(x, y_{(1)}, \dots, y_{(n)}),$$

das heisst auf die Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

$g$  genügt hier einer Lipschitz-Bedingung:

$$|g(x, y, \dots, y^{(n-1)}) - g(x, z, \dots, z^{(n-1)})| \leq \sum_{k=1}^n L_{nk} |y^{(k-1)} - z^{(k-1)}|, \quad (5)$$

während die übrigen

$$L_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j+1, \quad (j = 1, \dots, n-1) \\ 0 & \text{sonst, das heisst für } k \neq j+1, \quad (j = 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

sind. Beide Normen sind anwendbar.

## 6. Randwertaufgaben

Für eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen  $x_1, \dots, x_m$  sei einem Bereich  $B$  des  $(x_1, \dots, x_m)$ -Raumes eine Differentialgleichung

$$L[u] = \varphi(x_1, \dots, x_m, u) \quad \text{in } B \quad (5)$$

und lineare Randbedingungen

$$U_\mu[u] = \gamma_\mu(x_1, \dots, x_m) \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k) \quad (5)$$

vorgelegt. Dabei seien  $L[u]$  und  $U_\mu[u]$  lineare homogene Differentialausdrücke in  $u$  und den partiellen Ableitungen von  $u$  mit Koeffizienten, die von  $x_1, \dots, x_m$  abhängen können, und  $\varphi$  eine gegebene, etwa stetige, nach  $u$  stetig partiell differenzierbare Funktion ihrer Argumente.  $\Gamma_\mu$  sind gegebene  $(m-1)$ -dimensionale Hyperflächen, gewöhnlich Randflächen von  $B$ .

Nun werde die Annahme getroffen, dass die lineare Randwertaufgabe für eine Funktion  $w$

$$\left. \begin{aligned} L[w] &= r(x_1, \dots, x_m) \quad \text{in } B, \\ U_\mu[w] &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu (\mu = 1, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

bei beliebig vorgegebener stetiger Funktion  $r(x_1, \dots, x_m)$  stets eindeutig lösbar sei. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn eine Greensche Funktion  $G(x_j, \xi_j)$

existiert, welche die Randwertaufgabe (53) in der Form

$$w(x_j) = \int_{\tilde{B}} G(x_j, \xi_j) r(\xi_j) d\xi_j \quad (54)$$

löst. Dann ist auch die Randwertaufgabe  $L[u] = r, U_\mu[u] = \gamma_\mu$  stets eindeutig lösbar und das Iterationsverfahren

$$\left. \begin{aligned} L[u_{n+1}] &= \varphi(x_j, u_n) \quad \text{in } B \\ U_\mu[u_{n+1}] &= \gamma_\mu \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k; n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

bei der man von einer gewählten Funktion  $u_0(x_j)$  ausgeht, unbeschränkt durchführbar, vorausgesetzt, dass  $\varphi(x_j, u)$  für alle  $u = u_n$  definiert ist. Für die Überlegungen (nicht für die numerische Rechnung) werden die Randbedingungen homogen gemacht. Es sei  $\tilde{u}$  eine spezielle, die Randbedingungen (52) erfüllende Funktion, dann setzt man

$$u = \tilde{u} + \eta, \quad u_n = \tilde{u} + \eta_n \quad (56)$$

und definiert zu einer Funktion  $f$  eine Funktion  $g$  und damit einen Operator  $T$  mit  $g = Tf$ :

$$\left. \begin{aligned} L[g] &= \varphi(x_j, \tilde{u} + f) - L[\tilde{u}] \quad \text{in } B \\ U_\mu[g] &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Dann gilt

$$\eta_{n+1} = T\eta_n, \quad \eta = T\eta; \quad u - u_n = \eta - \eta_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (58)$$

Die Fehler von  $u_n$  und  $\eta_n$  sind also dieselben, man kann daher die Aufgabe für  $\eta$  weiter behandeln.

Um den Satz von Nr. 2 anwenden zu können, wird die Lipschitz-Konstante von (4) gebraucht. Seien  $f_1, f_2$  zwei Funktionen mit  $g_i = Tf_i$  ( $i = 1, 2$ ), es wird

$$L[g_1 - g_2] = \varphi(x_j, \tilde{u} + f_1) - \varphi(x_j, \tilde{u} + f_2), \quad U_\mu[g_1 - g_2] = 0. \quad (59)$$

Man wird ein Bereich  $H$  des  $(x_1, \dots, x_n, u)$ -Raumes gewählt, in welchem

$$|\varphi(x_j, u) - \varphi(x_j, u^*)| \leq N(x_j) |u - u^*| \quad (60)$$

für alle  $x_j, u, u^*$  in  $H$  gilt. (Da  $\varphi$  als nach  $u$  stetig differenzierbar vorausgesetzt



war, kann man  $N = \max_u |\partial q / \partial u|$  setzen.) Aus (54), (59) und (60) folgt daher

$$g_1 - g_2 = \int_B G(x_j, \xi_j) [\varphi(\xi_j, \tilde{u} + f_1) - \varphi(\xi_j, \tilde{u} + f_2)] d\xi_j, \quad (61)$$

$$|g_1 - g_2| \leq \int_B N(\xi_j) |G(x_j, \xi_j)| |f_1 - f_2| d\xi_j. \quad (62)$$

Wählt man als Norm einer Funktion

$$\|f\| = \text{Obere Grenze}_{\text{in } B} \frac{|f|}{W(x_j)}, \quad (63)$$

wobei  $W(x_j)$  eine in  $B$  festgewählte stetige positive (eventuell auch nicht negative) Funktion ist, so folgt

$$\|g_1 - g_2\| \leq K \|f_1 - f_2\| \quad (64)$$

mit der Lipschitz-Konstante

$$K = \text{Obere Grenze}_{\text{in } B} \frac{\int_B N(\xi_j) |G(x_j, \xi_j)| W(\xi_j) d\xi_j}{W(x_j)}. \quad (65)$$

Es sei auf einen Fall hingewiesen, bei dem man ohne Kenntnis der expliziten Form der Greenschen Funktion zu einer schnellen, aber meist nicht so genauen Ermittlung der Lipschitz-Konstanten kommen kann. Wechselt die Greensche Funktion  $G$  in  $B$  nicht das Vorzeichen, ist etwa  $G \geq 0$ , und gibt es eine ebenfalls in  $B$  das Vorzeichen nicht wechselnde Eigenfunktion  $z(x_j)$  (etwa  $z_j \geq 0$ ) von

$$L[z] = \lambda z \quad \text{in } B, \quad U_\mu[z] = 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad (66)$$

zum Eigenwert  $\lambda = \lambda_z$ , so kann man  $W(x_j) = z(x_j)$  wählen, und nach (54) gilt

$$\int_B G(x_j, \xi_j) z(\xi_j) d\xi_j = \frac{1}{\lambda_z} z(x_j);$$

es folgt einfach

$$K = \frac{N}{\lambda_z^{\max}}. \quad (67)$$

(Verschiedene Zahlenbeispiele bei [5], Z. angew. Math. Mech. 33, 116–127 [1953] und ein Beispiel hier in Nr. 11.)

## 7. Allgemeinere nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Ist die Differentialgleichung (51) nicht nur in  $u$ , sondern auch in Ableitungen von  $u$  nichtlinear, so kann man manchmal ähnlich wie in Nr. 6 vorgehen.

gehen. Das sei kurz an dem Beispiel der gewöhnlichen Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung

$$L[u(x)] = \varphi(x, u, u', \dots, u^{(s)}) \tag{68}$$

und Randbedingungen an zwei Stellen  $x = a$  und  $x = b$  ( $b > a, s < k$ )

$$U_\mu[u] = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \dots, k)$$

genannt.

$L[u]$  sei ein linearer homogener Differentialausdruck in  $u$ , die Randbedingungen seien linear.  $\varphi$  genüge einer Lipschitz-Bedingung:

$$\left. \begin{aligned} & \left| \varphi(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(s)}) - \varphi(x, u_2, u_2', \dots, u_2^{(s)}) \right| \\ & \leq \sum_{\sigma=0}^s A_\sigma(x) \left| u_1^{(\sigma)} - u_2^{(\sigma)} \right| \quad \text{mit} \quad A_\sigma(x) \geq 0. \end{aligned} \right\} \tag{69}$$

Wieder sei die Randwertaufgabe (53) durch (54) lösbar und (54) sei  $s$ -mal nach  $x$  differenzierbar:

$$u^{(\sigma)}(x) = \int_a^b G^{(\sigma)}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi \quad \text{mit} \quad G^{(\sigma)} = \frac{\partial^\sigma G(x, \xi)}{\partial x^\sigma}; \tag{70}$$

definiert man einen Operator  $T$  mit  $g = Tf$  durch

$$L[g] = \varphi(x, f, f', \dots, f^{(s)}), \quad U_\mu[g] = \gamma_\mu, \quad (\mu = 1, \dots, k),$$

so erhält man bei der Norm

$$\|f\| = \text{Obere Grenze}_{\text{in } \langle a, b \rangle} \frac{1}{W(x)} \sum_{\sigma=0}^s A_\sigma(x) \left| f^{(\sigma)}(x) \right| \tag{71}$$

nach kurzer Rechnung (genauere Durchführung bei [5], Z. angew. Math. Mech. 33, 124 [1953]) für die Lipschitz-Konstante  $K$  von  $T$

$$K = \text{Obere Grenze}_{\text{in } \langle a, b \rangle} \frac{1}{W(x)} \sum_{\sigma=0}^s A_\sigma(x) \int_a^b |G^{(\sigma)}(x, \xi)| \, W(\xi) \, d\xi. \tag{72}$$

8. Operatoren monotoner Art

Der Raum  $R$  sei nun ein reeller Raum, das heisst, seine Elemente seien reelle Größen, etwa reelle Zahlen oder Matrizen mit reellen Elementen oder reellwertige Funktionen reeller Veränderlicher. Der Raum sei halbgeordnet (vgl. zum Beispiel KANTOROVITCH [11]), das heisst, Beziehungen  $f \leq g$  oder  $f < g$

seien für gewisse Paare von Elementen erklärt und sollen die gewöhnliche Bedeutung haben. Wieder sei ein Operator  $T$  gegeben, der den Elementen  $g$  eines Teilraumes  $F$  eindeutig Elemente  $Tg$  in  $R$  zuordnet. Es sei nun  $f$  ein gegebenes Element in  $R$ , und es werde nach Lösungen  $u$  von  $Tu = f$  gefragt. Diese Aufgabe heisst «von monotoner Art», wenn aus  $Tv \leq Tw$  für beliebige Elemente  $v, w$  aus  $F$  folgt  $v \leq w$ , und  $T$  heisst dann «ein Operator monotoner Art» (genauer: die Aufgabe ist als Aufgabe «von monotoner Art» geschrieben).

*Ist eine Lösung  $u$  vorhanden, so ergibt sich die Möglichkeit einer Einschliessung. Sind  $v_1$  und  $v_2$  zwei Näherungen mit*

$$Tv_1 \leq f \leq Tv_2, \quad (73)$$

*so folgt*

$$v_1 \leq u \leq v_2. \quad (74)$$

Man kann dann zum Beispiel nach Art der Relaxation versuchen, von einer Näherung  $v$  ausgehend, den «Defekt»  $d(v) = Tv - f$  durch Anbringen kleiner Korrekturen an  $v$  dem Nullelement zu nähern; gelingt es, dabei  $d \geq 0$  zu erreichen, so weiss man  $v \geq u$ , und entsprechend gilt  $v \leq u$  bei  $d \leq 0$ . Notwendig ist aber bei dieser Methode die Kenntnis von der Existenz einer Lösung  $u$ ; man hat dafür drei Wege zur Verfügung:

1. Oft gelingt es, mit Hilfe des Iterationsverfahrens und eines eventuellen ganz groben Iterationsschrittes nach dem Satz von Nr. 2 die Existenz einer Lösung zu zeigen (vgl. hierzu auch Nr. 12 und Nr. 11, Beispiel I).

2. Die Erweiterung des Browserschen Fixpunktsatzes führt mit Hilfe allgemeiner topologisch-funktionalanalytischer Betrachtungen in weitreichenden Fällen zu Existenzaussagen (über Existenz eines Fixpunktes), so zum Beispiel bei nichtlinearen Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungen bei SCHAUDER und LERAY [20], [12], bei nichtlinearen Integralgleichungen bei ROTHE [18] und andern.

3. Bei linearen Aufgaben kommt es häufig vor, dass die Aufgabe zu einer Klasse von Aufgaben gehört, für die die Existenz einer Lösung durch besondere Sätze gesichert ist. (Das trifft auch für einige Klassen nichtlinearer Aufgaben zu.)

## 9. Gleichungssysteme monotoner Art. Einschliessung bei der Relaxation

In dem Gleichungssystem

$$Ax = r \quad (75)$$

seien die gegebene nichtsinguläre Matrix  $A = (a_{jk})$  und die gegebene Spaltenmatrix  $r = (r_j)$  reell;  $x = (x_j)$  ist die Spaltenmatrix der Unbekannten;  $A$  ist

zugleich der Operator  $T$ . Die Bestimmung von  $x$  ist eine Aufgabe von monotoner Art, wenn  $\varepsilon \geq 0$  aus  $A\varepsilon > 0$  folgt, und das gilt genau dann, wenn alle Elemente von  $A^{-1}$  nichtnegativ sind. Dann werde  $A$  eine «Matrix von monotoner Art» genannt. Ein einfaches, bei vielen Anwendungen erfülltes, hinreichendes Kriterium lautet: Die Matrix  $A$  ist von monotoner Art ([5], Arch. Math. 3, 373 [1952]), wenn gilt:

1. Es ist  $a_{jj} > 0$ ,  $a_{jk} \leq 0$  für  $j \neq k$ .

2a) Es ist das «schwache Zeilensummenkriterium» erfüllt

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } j = 1, \dots, n, \\ > 0 & \text{für mindestens einen Wert von } j. \end{cases} \quad (76)$$

2b) Die Matrix zerfällt nicht, das heisst, es ist nicht möglich, die Indizes  $1, \dots, n$  so mit  $\varrho_1, \dots, \varrho_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-m}$  (mit  $1 \leq m \leq n-1$ ) zu numerieren, dass  $a_{\varrho_\nu \sigma_\mu} = 0$  für  $\nu = 1, \dots, m, \mu = 1, \dots, n-m$  gilt. An Stelle von 2a) und 2b) kann auch

2c) das «gewöhnliche Zeilensummenkriterium» treten:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} > 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (77)$$

Dieses Kriterium ist zum Beispiel erfüllt bei den Differenzengleichungen, die der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie entsprechen, so dass man bei Anwendung der Relaxation bequem Schranken aufstellen kann (Zahlenbeispiel bei [5], Z. angew. Math. Mech. 32, 83 [1952]). Auch bei den Differenzengleichungen bei anderen komplizierteren Randwertaufgaben und auch bei gewissen Typen nichtlinearer Gleichungssysteme liegt monotone Art und damit die Möglichkeit der Einschliessung vor [5].

## 10. Randwertaufgaben monotoner Art

Es liegen wieder die Randwertaufgaben (51) und (52) vor; nun werde der Operator  $T$  durch

$$Tv = L[v] - \varphi(x_j, v) \quad (78)$$

festgelegt, wobei der Definitionsbereich  $F$  aus den Funktionen  $v$  besteht, welche die Randbedingungen (52) erfüllen und partielle Ableitungen so hoher Ordnung besitzen, wie es für  $L[v]$  und  $L[v]$  gebraucht wird. Für zwei Funktionen  $v, w$  aus  $F$  gilt dann mit  $\varepsilon = v - w$

$$Tv - Tw = L[\varepsilon] + \varepsilon A(x_j), \quad (79)$$

wobei nach dem Taylorschen Satz

$$\varphi(x_j, v) - \varphi(x_j, w) = \varepsilon \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)_{(x_j, u=\tilde{w})} = -\varepsilon A(x_j) \quad (80)$$

(mit  $\tilde{w}$  als Zwischenstelle zwischen  $v$  und  $w$ ) bei festem  $v$  und  $w$  die Funktion  $A(x_j)$  eine Ortsfunktion ist.

Jetzt sei  $H$  ein bezüglich  $u$  konvexer Bereich im  $(x_j, u)$ -Raum, der  $v, w$  und damit auch  $\tilde{w}$  enthält. In  $H$  werde  $A$  als  $\geq 0$  vorausgesetzt; man wählt oft zweckmässig  $H$  so, dass  $H$  eine Lösung  $u$  von (51) und (52) und eine Näherung  $v$  enthält; mit  $w = u$  ist  $\varepsilon$  dann der Fehler  $\zeta$  der Näherung  $v$ .

Nun kann man in vielen Fällen auf Grund spezieller Eigenschaften der Aufgabe (51) und (52) zeigen, dass aus

$$L[\varepsilon] + \varepsilon A(x_j) \geq 0 \text{ in } B, \quad U_\mu[\varepsilon] = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu \quad (81)$$

$\varepsilon \geq 0$  bei nichtnegativen  $A(x_j)$  folgt. Dann sind (51) und (52) von monotoner Art; es kommt also auf die Diskussion der linearen Aufgabe (81) mit homogenen Randbedingungen an. So sind zum Beispiel folgende Klassen von Randwertaufgaben von monotoner Art:

I. Die Aufgabe

$$- [p(x) u'(x)]' + f(x, u) = 0 \quad (82)$$

mit den Randbedingungen  $u(a) = u_a, u(b) = u_b$  oder

$$u'(a) - c u(a) = \gamma_a, \quad u'(b) + d u(b) = \gamma_b \quad (83)$$

$[p(x)$  in  $a \leq x \leq b$  stetig differenzierbar und  $> 0, u_a, u_b, \gamma_a, \gamma_b$  gegebene Konstanten,  $c \geq 0, d \geq 0]$  ist im Bereich  $H [a \leq x \leq b; u_0(x) \leq u \leq u_1(x)]$  von monotoner Art, wenn dort  $\partial f / \partial u$  existiert und in  $H$  entweder  $\partial f / \partial u > 0$  oder  $\partial f / \partial u \geq 0$  und dann  $c^2 + d^2 > 0$  ist.

II. In (51) sei

$$L[u] = - \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c u \text{ in } B. \quad (84)$$

Dabei seien  $a_{jk}, b_j, c$  gegebene, in  $B + \Gamma$  stetige Funktionen von  $x_1, \dots, x_n$ ,  $c \geq 0$  und die Matrix der  $a_{jk}$  in  $B$  durchweg symmetrisch und positiv definit.  $\Gamma$  sei als Randfläche von  $B$  eine abgeschlossene zusammenhängende  $(n-1)$ -dimensionale stückweise glatte Hyperfläche. Als Randbedingung sei entweder

$$u = \gamma \text{ auf } \Gamma \quad (85)$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - q u = \delta \text{ auf } \Gamma \quad (86)$$

gegeben, wobei  $r$  die innere Normale und  $\gamma, \varrho, \delta$  auf  $\Gamma$  gegebene stetige Ortsfunktionen mit  $\varrho > 0$  sind. Die Randwertaufgabe ist in einem bezüglich  $u$  konvexen Bereich  $H$  des  $(x, u)$ -Raumes von monotoner Art, wenn dort  $\partial\varphi/\partial u$  existiert und  $\leq 0$  ist.

III.

$$\Delta \Delta u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = r(x, y) \text{ in } B$$

$$u = \gamma_1(s), \quad \Delta u = \gamma_2(s) \text{ auf } \Gamma,$$

mit  $s$  als Bogenlänge auf der Randkurve  $\Gamma$  des ebenen, einfach zusammenhängenden Bereichs  $B$ ;  $\gamma_1, \gamma_2, r$  sind gegebene, etwa stetige Funktionen. Der Operator  $Tv = \int \Gamma v - r(x, y)$  (dabei muss  $v$  wie oben die inhomogenen Randbedingungen erfüllen) ist dann von monotoner Art.

Die Beweise für das Vorliegen der monotonen Art findet man in [5]; sie beruhen im wesentlichen auf dem Hilfssatz vom Randmaximum (vgl. zum Beispiel [5], Z. angew. Math. Mech. 32, 203 [1952]):

*Für eine nichtkonstante, mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschliesslich versehene Funktion  $w(x_1, \dots, x_n)$  sei bei dem Differentialausdruck (84) unter den in II genannten Voraussetzungen  $L[w] \leq 0$  in  $B$ . Der Grösstwert von  $w$  in  $B + \Gamma$  sei  $M$ . Dieses Maximum wird im Falle  $c = 0$  stets und im Falle  $c \geq 0$ , wenn überdies  $M \geq 0$  ist, nur auf dem Rande  $\Gamma$  angenommen.*

## 11. Rand- und Gebietsmethoden

In Nr. 10 wird stets gefordert, dass die Näherungsfunktion  $v$  die Randbedingungen (manchmal die homogenen, manchmal die inhomogenen) erfüllt. Die hier gegebene Abschätzungsart eignet sich daher besonders für die gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen man in der Regel beim Näherungsansatz die Randbedingungen erfüllen wird, und bei den partiellen Differentialgleichungen für Ansätze, die die Randbedingungen befriedigen (sogenannte Gebietsmethoden, wie zum Beispiel beim Ritzschen Verfahren).

Es sei zum Beispiel die Randwertaufgabe linear

$$L[u] = r(x_1, \dots, x_n), \quad (87)$$

wobei  $L[u]$  durch (84) gegeben ist und die Koeffizienten die dort genannten Voraussetzungen erfüllen, und die Randbedingung laute

$$U[u] = \gamma \text{ auf } \Gamma \quad (88)$$

und sei die Bedingung (85) oder (86) (ebenfalls mit den dort genannten Voraussetzungen).



Aus

$$L[\tilde{z}] \leq 0, \quad U[\tilde{z}] = 0$$

folgt dann  $\tilde{z} \leq 0$  und aus

$$|L[z_1]| \leq L[z_2], \quad U[z_1] = U[z_2] = 0$$

folgt somit  $|z_1| \leq z_2$ , da man nur den letzten Schluss auf  $\tilde{z} = z_1 - z_2$  und  $\tilde{z} = -z_1 - z_2$  anzuwenden braucht.

Nun sei  $z(x_j)$  eine Funktion mit

$$U[z] = 0 \text{ auf } \Gamma, \quad L[z] \geq A > 0 \text{ in } B, \quad (89)$$

wobei  $A$  eine Konstante ist; eine solche Funktion wird sich in vielen Fällen leicht angeben lassen. Ist nun  $v$  eine (88) erfüllende Näherung, so gilt für den Fehler  $\zeta = v - u$ :

$$L[\zeta] = L[v] - r, \quad U[\zeta] = 0,$$

also

$$|\zeta| = |v - u| \leq \frac{|z|}{A} \max_{\text{in } B} |r - L[v]|. \quad (90)$$

Bei partiellen Differentialgleichungen arbeitet man häufig auch mit Ansätzen, die die Differentialgleichung, aber nicht die Randbedingungen erfüllen und bei denen man etwaige freie Parameter zur möglichst guten Anpassung an die Randbedingungen verwendet (sogenannte Randmethoden). In diesen Fällen kommt man oft mit dem am Schlusse von Nr. 10 genannten Hilfssatz unmittelbar zum Ziel (vgl. [5]), was hier in diesem Zusammenhang genannt sei.

Bei der Randwertaufgabe (87), wobei wieder  $L[u]$  durch (84) gegeben ist und die Koeffizienten die dort genannten Voraussetzungen erfüllen, und die Randbedingung (85) sei  $v$  eine die Differentialgleichung  $L[v] = r$  erfüllende Näherungsfunktion. Von der Fehlerfunktion  $w = v - u$  sind die Randwerte  $\tilde{w} = \tilde{v} - \tilde{u} = \tilde{v} - \gamma$  bestimmbar. Nimmt  $\tilde{w}$  den Wert Null an, so gilt im ganzen Gebiet  $B$

$$\tilde{w}_{\min} \leq w \leq \tilde{w}_{\max}; \quad (91)$$

nimmt  $w$  nicht den Wert Null an, hat also  $w$  ein festes Vorzeichen, so hat auch  $w$  in  $B + \Gamma$  dasselbe Vorzeichen, und für den Betrag der Fehlerfunktion gilt

$$|w| \leq |\tilde{w}|_{\max}. \quad (92)$$

Im Falle  $c = 0$  gilt (91) unabhängig davon, ob  $\tilde{w}$  den Wert Null annimmt oder nicht; dabei bedeuten  $\tilde{w}_{\min}$ ,  $\tilde{w}_{\max}$  und  $|\tilde{w}|_{\max}$  das Minimum bzw. Maximum von  $\tilde{w}$  oder  $|\tilde{w}|$  auf dem Rande  $\Gamma$ , also bekannte Größen.

Die gleiche Aufgabe der Einschliessung der Lösung  $u$  in Schranken behandeln DIAZ, GREENBERG, SYNGE und COOPERMAN [7], [8], [10], [23] mit einer funktionalanalytischen «Hypercircle method» und verwandten Methoden.

### Beispiele

#### I. Nichtlineare Differentialgleichung:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = u + u^2 \quad \text{für} \quad r^2 = x^2 + y^2 < 1.$$

$u = 1$  am Rande  $x^2 + y^2 = 1$  (stationäre Temperaturverteilung  $u(x, y)$  in einer Kreisplatte; am Rande konstante Temperatur  $u = 1$ , im Innern Wärmeabgabe proportional  $u - u^2$ ). Es ist leicht, die Randbedingung erfüllende Funktionen  $u_0, u_1$  mit  $\Delta u_1 = u_0 = u_0^2$  anzugeben; es soll hier nur ein ganz grober Ansatz durchgeführt werden. Für

$$u_1 = 1 + (1 - r^2) \left( \alpha - \frac{1 + 2\alpha}{6} r^2 \right) \quad \text{wird} \quad \Delta u_1 = -4 \left( \alpha + \frac{1 + 2\alpha}{6} (1 - 4r^2) \right)$$

und  $u_0$  berechnet sich zu

$$u_0 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 4 \Delta u_1}).$$

1. Existenz einer Lösung: Dazu genügt es hier, die Überschlagsformel (67) zu benutzen. Eine das Vorzeichen nicht wechselnde Eigenfunktion ist

$$W(x, y) = J_0(\sqrt{\lambda} r) \quad [\text{Bessel-Funktion } J_0; \lambda = \lambda_z \approx (2,4048)^2].$$

Der Bereich  $F$  sei die Gesamtheit der in  $x^2 + y^2 \leq 1$  stetigen Funktionen  $u(x, y)$  mit  $0 \leq u \leq 1$ ; dann ist  $N_{max} = (1 + 2u)_{max} = 3$  und nach (67)  $K = 3/\lambda$ ;  $K/(1 - K) = 1,07$ . Nun werde  $\alpha$  zunächst etwa so gewählt, dass  $u_1$  und  $u_0$  für  $r = 0$  übereinstimmen; es wird  $u_1 = u_0 = 2/3$  für  $\alpha = -1/3$ ; man berechnet dann  $u_0, u_1$  nach (63):

$$\|u_0 - u_1\| = \text{Obere Grenze } \frac{|u_0 - u_1|}{W} \approx 0,15,$$

und nach (13) die «Kugel»  $S$ :

$$\|u - u_1\| \leq 0,161 \quad \text{oder} \quad |u - u_1| \leq 0,161 \cdot J_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Diese Kugel  $S$  gehört zu  $F$ , es ist also die Existenz einer Lösung in  $F$  gesichert, die sogar in  $S$  liegt.

2. Untere Schranke der Lösung: Die durch  $S$  gegebene Fehlerabschätzung liefert zum Beispiel für den Mittelpunkt  $u(0, 0) = (2/3) \pm 0,161$  und ist noch

sehr grob. Man könnte durch sorgfältigere Wahl des Ansatzes die Fehlerschranken des Iterationsverfahrens verbessern; aber da hier die Aufgabe nach Nr. 10 von monotoner Art ist, ist es viel bequemer, zur Abschätzung das Einschliessungsprinzip (73) und (74) zu benutzen und das Iterationsverfahren nur zum Existenznachweis. Da für den Wert  $\alpha = -1,3$  bereits  $u_1 \leq u_0$  ausfällt, gilt beim Operator  $Tv = -\Delta v + v + v^2$  auch

$$Tu_1 = -\Delta u_1 + u_1 + u_1^2 \leq -\Delta u_1 + u_0 + u_0^2 = 0,$$

also wegen  $Tu_1 \leq 0$  nach (74)  $u_1 \leq u$ .

3. Obere Schranke der Lösung: Es wird dazu nur noch eine Funktion  $u_1$  mit  $u_1 \geq u_0$  benötigt.

Für  $u_1 = 1 - (1 - r^2) [0,32 + 0,05 r^2 + 0,006 r^4]$  wird  $u_1 \geq u_0$  und damit  $u_1 \geq u$ ; mithin ist  $u$  in Schranken eingeschlossen; speziell für  $r = 0$  wird  $0,6666 \leq u(0, 0) \leq 0,6800$ , für  $r = 1,2$  wird  $0,7396 \leq u(1,2, 0) \leq 0,7503$ . Natürlich ist es leicht, durch genauere Ansätze engere Schranken zu erhalten.

II. Eine vielbehandelte lineare Aufgabe: Torsionsproblem für ein Quadrat  $B$  als Querschnitt.  $B$  sei in einer  $(x, y)$ -Ebene der Bereich  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$  und  $\Gamma$  der Rand des Quadrats; dann ist gegeben  $\Delta u = 0$  in  $B$ ,  $u = (x^2 + y^2)/4$  auf  $\Gamma$ ; es mögen harmonische Näherungsfunktionen  $v$  verwendet werden

$$u \approx v = \sum_{\varrho=0}^p a_{\varrho} v_{\varrho} \quad \text{mit} \quad v_{\varrho} = \operatorname{Re} (x + i y)^{4\varrho}.$$

Die  $a_{\varrho}$  bestimmt man so, dass sich  $v$  den Randwerten  $\tilde{u} = (x^2 + y^2)/4$  anpasst, was sich zum Beispiel graphisch sehr rasch durchführen lässt. Benutzt man nur  $v_0$  und  $v_1$ , so unterscheidet sich  $(1/160) (47 - 8 v_1)$  auf  $\Gamma$  von  $\tilde{u}$  um höchstens  $1/160$ , also gilt nach (91) in ganz  $B$

$$\left| u - \frac{1}{160} (47 - 8 v_1) \right| \leq \frac{1}{160},$$

zum Beispiel im Mittelpunkt  $0,2875 \leq u(0, 0) \leq 0,3000$ . Nimmt man noch hinzu, so kann man

$$v = \frac{1}{4} (1,1786 - 0,1801 v_1 + 0,006 v_2)$$

verwenden; auf  $\Gamma$  gilt dann  $|v - \tilde{u}| \leq 0,00125$ , daher in ganz  $B$   $|v - u| \leq 0,0012$ , speziell im Mittelpunkt  $0,2934 \leq u(0, 0) \leq 0,2959$ .

## 12. Das Newtonsche Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben.

Das Newtonsche Verfahren liefert bei manchen Typen von Randwertaufgaben die Möglichkeit, zugleich die Existenz von Lösungen zu sichern und die

Lösungen in Schranken einzuschliessen. Es liegen wieder die Aufgaben (51) und (52) vor. Ausgehend von einer Funktion  $u_0(x_j)$  bestimmt man  $u_1 = u_0 + \eta_0$  aus der linearisierten Randwertaufgabe:

$$\left. \begin{aligned} L[u_1] &= L[u_0] + L[\eta_0] = \varphi(x_j, u_0) + \eta_0 \varphi_u(x_j, u_0) \text{ in } B, \\ U_\mu[u_1] &= \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k), \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

wobei  $\varphi_u$  die Ableitung von  $\varphi$  nach  $u$  bezeichnet. Allgemein ermittelt man beim gewöhnlichen Newtonschen Verfahren die Folge der Iterierten  $u_n(x_j)$  mit  $u_{n+1} = u_n + \eta_n$  nach

$$L[\eta_n] - \eta_n \varphi_u(x_j, u_n) = \varphi(x_j, u_n) - L[u_n] \text{ in } B, \quad U_\mu[u_{n+1}] = \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu, \quad (94)$$

und beim vereinfachten Newtonschen Verfahren nach

$$L[\eta_n] - \eta_n \varphi_u(x_j, u_0) = \varphi(x_j, u_n) - L[u_n] \text{ in } B, \quad U_\mu[u_{n+1}] = \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu. \quad (95)$$

Die beiden Arten unterscheiden sich also nur in dem Argument bei  $\varphi_u$  (vgl. Nr. 4). Die Transformation  $g = Tj$  wird für eine stetige Funktion  $f(x_j)$  durch

$$L[g] = \varphi(x_j, f) + (g - f) \varphi_u(x_j, u_0) \text{ in } B, \quad U_\mu[g] = \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu \quad (96)$$

festgelegt, wobei wieder vorausgesetzt werde, dass die lineare Randwertaufgabe für eine Funktion  $w$

$$L[w] - w \varphi_u(x_j, u_0) = r, \quad U_\mu[w] = 0 \text{ auf } \Gamma_\mu \quad (97)$$

für beliebiges stetiges  $r$  eindeutig, eventuell mit Hilfe einer Greenschen Funktion  $G(x_j, \xi_j)$  nach (54) lösbar sei. Für zwei Funktionen  $g_j = Tf_j$  ( $j = 1, 2$ ) gilt dann mit Benutzung des Taylorschen Satzes:

$$\begin{aligned} L[g_1 - g_2] - (g_1 - g_2) \varphi_u(x_j, u_0) &= \varphi(x_j, f_1) - \varphi(x_j, f_2) - (f_1 - f_2) \varphi_u(x_j, u_0) \\ &= (f_1 - f_2) [\varphi_u(x_j, \tilde{f}) - \varphi_u(x_j, u_0)] \\ &= (f_1 - f_2) (\tilde{f} - u_0) \varphi_{uu}(x_j, \tilde{u}_0); \\ U_\mu[g_1 - g_2] &= 0. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\tilde{f}$  eine Zwischenstelle zwischen  $f_1$  und  $f_2$  und  $\tilde{u}_0$  eine Zwischenstelle zwischen  $\tilde{f}$  und  $u_0$ . Dann wird

$$g_1 - g_2 = \int_B G(x_j, \xi_j) [f_1(\xi_j) - f_2(\xi_j)] [\tilde{f}(\xi_j) - u_0(\xi_j)] \varphi_{uu}[\xi_j, \tilde{u}_0(\xi_j)] d\xi_j.$$

Mit der Norm (63) folgt (64) mit der Lipschitz-Konstante

$$\left. \begin{aligned} K = \text{Obere Grenze in } B \quad & \frac{1}{W(x_j)} \int_B |G(x_j, \xi_j)| W(\xi_j) q_{uu}[\xi_j, u_0(\xi_j)] d\xi_j \\ & \times \text{Max}_{\text{in } B} |\tilde{f}(x_j) - u_0(x_j)|. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Grundsätzlich ist  $K < 1$  erreichbar, sofern man erstens  $u_0$  hinreichend nahe bei einer Lösung gewählt hat, das heisst, sofern  $u_1 - u_0$  und damit auch  $f - \mathcal{T}u_0$  genügend klein ausfällt, und zweitens eine Greensche Funktion existiert, das heisst, die zu (97) für  $r = 0$  gehörige Eigenwertaufgabe keine Eigenlösungen besitzt, ein Ausnahmefall, der durch kleine Abänderung von  $u_0$  vermieden werden kann. Über Möglichkeiten, die Greensche Funktion bei der numerischen Rechnung zu umgehen, und ein Zahlenbeispiel vergleiche [6].

### 13. Anfangswertaufgaben bei hyperbolischen Differentialgleichungssystemen

MORGENSTERN [15] behandelt das System von Differentialgleichungen für zwei Funktionen  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a u + b v + c, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = d u + e v + f,$$

wobei  $a, \dots, f$  gegebene Funktionen von  $x, y$  sind und auf der Anfangskurve  $x + y = 0$  die Werte Null für  $u$  und  $v$  vorgegeben sind. Es wird ein Operator definiert, der einem Funktionenpaar  $\{u, v\}$  das Paar  $\mathcal{T}\{u, v\}$  zuordnet:

$$\mathcal{T}\{u, v\} = \left\{ \int_{\xi=-y}^x (a u + b v + c) d\xi, \int_{\eta=-x}^y (d u + e v + f) d\eta \right\}.$$

Als Norm eines Funktionenpaares kann man

$$\|\{u, v\}\| = \text{Max}_{\text{in } B} \left( \frac{|u(x, y)|}{W(x, y)}, \frac{|v(x, y)|}{W(x, y)} \right)$$

verwenden, wobei  $B$  etwa das Dreieck  $x \leq \beta$ ,  $y \leq -\alpha$ ,  $x + y \geq 0$  mit  $\alpha < \beta$  sei und  $W(x, y)$  in  $B$  eine festgewählte stetige positive Funktion ist. Für zwei Funktionenpaare  $u_1, v_1$  und  $u_2, v_2$  gilt dann

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\{u_1, v_1\} - \mathcal{T}\{u_2, v_2\}\| &= \text{Max}_{\text{in } B} \left( \frac{\left| \int_{\xi=-y}^x a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) d\xi \right|}{W(x, y)}, \dots \right) \\ &\leq K \|\{u_1 - u_2, v_1 - v_2\}\| \end{aligned}$$

mit

$$K \leq \text{Max}_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{W(\alpha, \beta)} \left| \int_{\xi}^{\eta} (|a(\xi, \eta)| + |b(\xi, \eta)|) W(\xi, \eta) d\xi, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{W(x, y)} \left| \int_{\eta}^{\xi} (|d(x, \eta)| + |e(x, \eta)|) W(x, \eta) d\eta \right| \right\}.$$

MORGENSTERN setzt  $W(x, y) = e^{L(x+y)}$ , dann folgt

$$K \leq \text{Max}_{\text{in } B} \left( \frac{|a| + |b|}{L}, \frac{|d| + |e|}{L} \right);$$

wählt man also  $L > \text{Max}_{\text{in } B} (|a| + |b|, |d| + |e|)$ , so wird  $K < 1$ .

#### 14. Integralgleichungen

Bei der linearen Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art

$$u(s) - \lambda \int_B G(s, t) u(t) dt = h(s)$$

mit gegebenen (etwa stetigen)  $h(s)$ ,  $G(s, t)$ , gegebenem  $\lambda$  und  $B$  als Integrationsbereich bei einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen sei der Operator  $g = Tf$  durch

$$g(s) = h(s) + \lambda \int_B G(s, t) f(t) dt$$

festgelegt. (Allgemeinere Operatoren betrachtet SCHMEIDLER [21].) Dann gilt bei der Norm (63) für zwei Funktionen  $g_j = Tf_j$  ( $j = 1, 2$ ) wieder (64) mit

$$K = |\lambda| \text{ Obere Grenze}_{\text{in } B} \frac{1}{W(s)} \int_B |G(s, t)| W(t) dt.$$

BRÜCKNER ([3], [4], S. 68ff.) gibt eine Verallgemeinerung des Iterationsverfahrens

$$u_{n+1}(s) = \vartheta_{n+1} u_n(s) + \lambda(1 - \vartheta_{n+1}) \int_B G(s, t) u_n(t) dt + (1 - \vartheta_{n+1}) h(s) \\ (n = 1, 2, \dots)$$

in, bei welcher die Folge der  $u_n(s)$ , sofern  $\lambda$  kein Eigenwert ist, bei passender Wahl der  $\vartheta_n$  stets konvergiert.



KANTOROVITCH ([11], S. 90ff.) untersucht auch Systeme von Integralgleichungen und gewisse Typen nichtlinearer Integralgleichungen; LONSETH [12] betrachtet Integralgleichungen erster Art, PICONE und FICHERA [17], [9] neben diesen auch Integrodifferentialgleichungen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ST. BANACH, *Théorie des opérations linéaires* (Warschau 1932; Neudruck: Hafner Publishing Company, New York 1949), 254 Seiten.
- [2] D. BERNSTEIN, *Existence Theorems in Partial Differential Equations*, Ann. Math. Studies 23 (1950), 228 Seiten.
- [3] H. BÜCKNER, *Die praktische Behandlung von Integralgleichungen* (Springer: Berlin, Göttingen, Heidelberg 1952), 127 Seiten (Heft 1 der «Ergebnisse der angewandten Mathematik»).
- [4] H. BÜCKNER, *Ein unbeschränkt anwendbares Iterationsverfahren für Fredholmsche Integralgleichungen*, Math. Nachr. Berlin 2, 304–313 (1949).
- [5] L. COLLATZ, *Einige Arbeiten über Fehlerabschätzungen*, Z. angew. Math. Mech. 32, 76–84 und 203–211 (1952), 33, 116–127 (1953); *Aufgaben monotoner Art*, Arch. Math. 3, 366–376 (1952); *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951), 458 Seiten.
- [6] L. COLLATZ, *Das vereinfachte Newtonsche Verfahren bei Gleichungen*, Z. angew. Math. Mech. (im Druck); *Das vereinfachte Newtonsche Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben* (soll demnächst erscheinen).
- [7] PH. COOPERMAN, *An Extension of the Method of Trefftz for Finding Local Bounds on the Solutions of Boundary Value Problems, and on Their Derivatives*, Quart. appl. Math. 10, 359–373 (1953).
- [8] J. B. DIAZ und H. J. GREENBERG, *Upper and Lower Bounds for the Solution of the First Biharmonic Boundary Value Problems*, J. Math. Phys. 27, 193–200 (1948).
- [9] G. FICHERA, *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo*, Mem. Accad. naz. Lincei [ser. VIII], 3, Sez. I, fasc. 1 (1950), 80 Seiten.
- [10] H. J. GREENBERG, *The Determination of Upper and Lower Bounds for the Solutions of the Dirichlet Problem*, J. Math. Phys. 27, 161–182 (1948).
- [11] L. KANTOROVITCH, *The Method of Successive Approximations for Functional Equations*, Acta math. 71, 63–97 (1939).
- [12] J. LERAY und J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sc. Ecole norm. sup. 51, 45–78 (1934).
- [13] A. T. LONSETH, *The Propagation of Error in Linear Problems*, Trans. Amer. math. Soc. 62, 193–212 (1947).
- [14] R. VON MISES und H. POLLACEK-GEIRINGER, *Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung*, Z. angew. Math. Mech. 9, 58–77, 152–164 (1929).
- [15] D. MORGENSTERN, *Beiträge zur nichtlinearen Funktionalanalysis*, Dissertation (Technische Universität, Berlin 1952).
- [16] B. VON SZ. NAGY, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, in: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (Springer: Berlin 1942).
- [17] M. PICONE und G. FICHERA, *Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen*, Mh. Math. 54, 188–209 (1950).

- [18] E. ROTHE, *Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen*, Comp. Math. 5, 177–197 (1938).
- [19] H. SASSENFELD, *Ein hinreichendes Konvergenzkriterium und eine Fehlerabschätzung für die Iteration in Einzelschritten bei linearen Gleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 31, 92–94 (1951).
- [20] J. SCHAUDER, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Z. 26, 47–65 (1927), und Bemerkungen dazu S. 417–431.
- [21] W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950), 611 Seiten.
- [22] J. SCHRÖDER, *Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953) (im Druck).
- [23] J. L. SYNGE, *Pointwise Bounds for the Solutions of Certain Boundary Value Problems*, Proc. Roy. Soc. [A] 208, 170 (1951).
- [24] J. WEISSINGER, *Über das Iterationsverfahren*, Z. angew. Math. Mech. 31, 245–246 (1951).
- [25] J. WEISSINGER, *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*, Math. Nachr. 8, 193–212 (1952).
- [26] FR. A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis*, 2. Aufl. (de Gruyter & Co., Berlin 1950), 410 Seiten.

### Summary

In this collection of results a formulation of the basic theorem of iteration methods is given, which is particularly suitable for practical applications since it permits testing the presumptions in a straight forward way. A uniform existence and error estimation theory results, which is valid for many various types of ordinary and partial differential equations. The well-known criteria for iteration methods for linear equations are automatically included and are extended to apply to systems of non-linear equations. Initial and boundary value problems for ordinary and partial differential equations are also treated.

For numerical calculations and especially for non-linear equations, it is rather important to choose a suitable norm. In problems of a monotone nature, a check on the accuracy may be achieved by the simultaneous application of the theorems on iteration methods and on error estimation.

(Eingegangen: 11. Juni 1953.)

# Transonic Flow Past a Wedge at Zero Angle of Attack<sup>1)</sup>

By LEON TRILLING, Cambridge, Mass., U. S. A.<sup>2)</sup>

While recent theoretical investigations of transonic flow past wedges, by J. D. COLE [1]<sup>3)</sup>, GUDERLEY and YOSHIHARA [2], MACKIE and PACK [3], VINCENTI and VAN WAGONER [4] and experiments by LIEPMANN and BRYSON [5], [6]

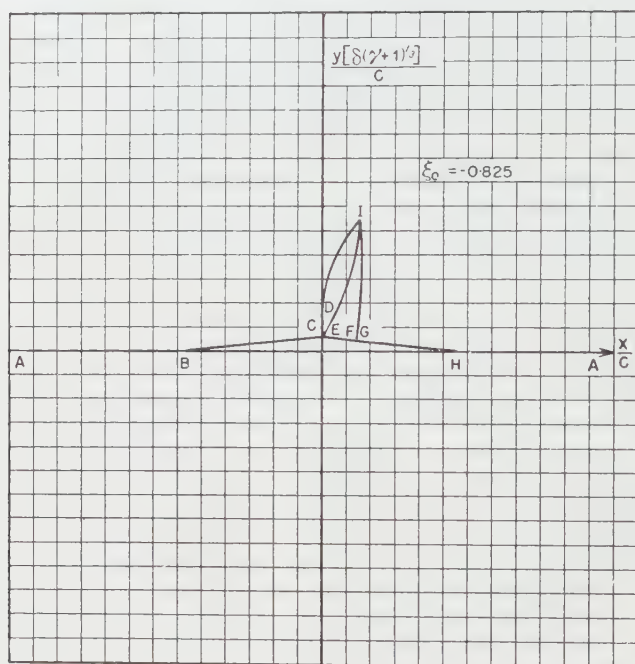


Fig. 1

Transonic flow past a symmetric wedge in physical plane.

and GRIFFITH [7], [8] have gone far to explain the structure of certain transonic flow fields, there is no published discussion of the pattern which results from a local supersonic region embedded in a subsonic field. The simplest flow of that type is past a thin symmetric closed wedge at zero angle of attack.

Let the chord of such a wedge be  $2c$ , its thickness  $2t$ , and its semiwedge angle  $\delta$  so that  $\delta \sim t/c \ll 1$ . The free stream Mach number  $M$  is just below

<sup>1)</sup> This investigation was carried out under contract AF33-(038)-22184 with the United States Air Force.

<sup>2)</sup> Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, U. S. A.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 375.

unity so that  $1 - M^2 < 1$ . The sonic line and a shock  $IG$  (Figures 1 and 2) then bound a finite supersonic region  $CIG$  as can be seen on interferograms [5], [6], [12]. Disturbances downstream of this region affect the supersonic flow through their influence on the upstream subsonic flow, so that the influence of the subsonic flow cannot be limited to part of the supersonic field.

If the velocity perturbations  $\bar{u}, \bar{v}$  from sonic velocity  $a^*$  are small ( $\bar{u}, \bar{v}/a^* \ll 1$ ), the strength of the shocks  $DE, FG$  is of order  $(\bar{u}, \bar{v}/a^*)$ , and the entropy increase

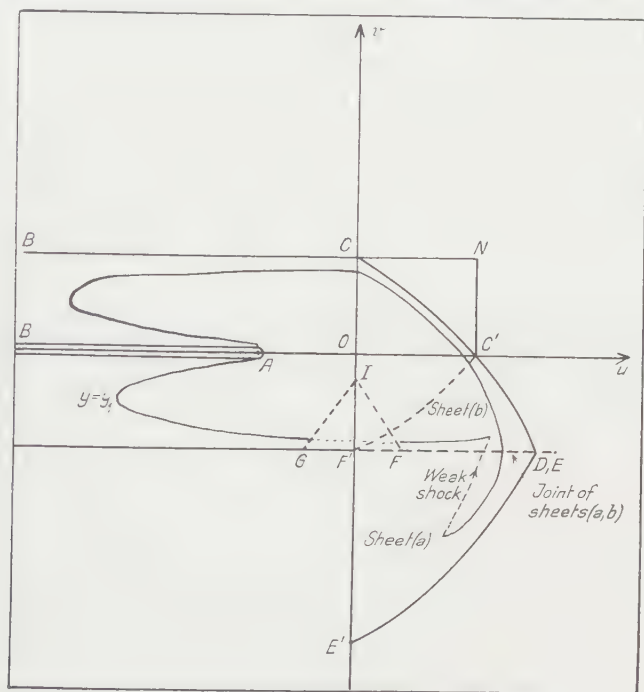


Fig. 2

Hodograph of transonic flow past a symmetric wedge.

cross them is of order  $(\bar{u}, \bar{v}/a^*)^3$ ; the flow is therefore assumed to be isentropic and irrotational, and the transonic perturbation theory may be applied. In terms of the dimensionless velocity perturbations:

$$u' = \frac{\bar{u}(\gamma + 1)}{a^*}, \quad v' = \frac{\bar{v}(\gamma + 1)}{a^*}$$

The equations of motion are:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

The Jacobian of the hodograph transformation is

$$J = \frac{\partial(u', v')}{\partial(x, y)} = u' \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2, \quad (2)$$

so that the transformation is regular and order-reversing in the subsonic domain but may have singular lines in the supersonic domain. The equations of motion in the hodograph plane are:

$$u' \frac{\partial y}{\partial v'} = \frac{\partial x}{\partial u'}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u'} = \frac{\partial x}{\partial v'}. \quad (4)$$

Equations (4) and (5) are elliptic in the subsonic region ( $u' < 0$ ) and hyperbolic in the supersonic region ( $u' > 0$ ), where their characteristics are defined by

$$v' = c \pm \frac{2}{3} u'^{3/2}. \quad (5)$$

The following boundary conditions are satisfied by the functions  $x, y(u', v')$  with the origin in the physical plane at the center of the wedge. Far from the wedge, the flow is subsonic and undisturbed, so that if  $u_1'$  denotes the free-stream velocity,

$$\lim_{\substack{u' \rightarrow u_1' \\ v' \rightarrow 0}} x, y(u, v) = \frac{C}{\sqrt{u_1' - u_1}} \quad (6)$$

as in an incompressible fluid.

This boundary condition implies that the velocity is identical far upstream and far downstream of the wedge. No inconsistencies arise since the drag is of second order, and second order velocity perturbations are neglected.

Along the streamline  $y = 0$ , from  $A$  to  $B$  (Figures 1 and 2), the velocity is parallel to the free stream and decreases from the free-stream value  $u_1'$  to the stagnation value  $u' \rightarrow -\infty$ . From  $B$  to  $C$ , the  $v'$  velocity takes the value

$$v' = v'_0 = (\gamma + 1) \delta$$

while the  $u'$  velocity increases from  $-\infty$  at  $B$  to zero at the corner  $C$ . At the corner the flow turns the corner  $CD$  through a Prandtl-Meyer expansion  $CD$ .

Because the velocity at the end of a Prandtl-Meyer expansion depends on the angle of turn, while along  $EF$  it depends on the free stream Mach number, a weak oblique shock may be necessary to adjust conditions at the corner: the flow overexpands within the supersonic region and is recompressed through an oblique shock, which is sufficiently well represented by an isentrope. The jump takes place from one sheet to another in the hodograph (Figure 2) similar to those made in supersonic wing theory.

From  $D$ , the supersonic flow decelerates to  $F$ , where a locally normal shock  $FG$  closes the supersonic region (9). From  $G$ , the subsonic flow decelerates to a rear stagnation point  $H$  where it turns back to free stream direction; it finally accelerates to free stream velocity  $u_1'$  and the line  $y = 0$  is closed at  $A$ . The variable  $x$  may reach the value  $c$  before  $P$ . The flow must then turn back to  $v' = 0$  through a weak oblique shock followed by a curved shock behind the airfoil. This more complicated case is not discussed here.

The function  $x(u', v')$  goes from  $-\infty$  to  $-c$  along the upper edge of the cut  $AB$ ; between  $B$  and  $C$ , it increases from  $-c$  to zero; it remains constant along the characteristic  $CDE$ , then  $x$  increases from  $E$  to  $F$ , remains constant across the shock  $FG$ , increases until it reaches the value  $+c$  at the rear stagnation point  $H$ , and increases from  $c$  to  $-\infty$  as it moves from  $H$  back to  $A$ . When  $v(u', v')$  is known,  $x(u', v')$  is determined from (4), (5) up to an arbitrary constant which adjusts the position of the wedge along the  $x$ -axis. The boundary conditions across the shock  $FG$  are integral relations

$$\int_F^G y \, du = \int_F^G x \, dv = 0.$$

The condition  $y = 0$  between  $F$  and  $G$  is the simplest particular solution of this integral relation.

To sum up, the following boundary conditions are satisfied by  $x, y(u, v)$ :

$$\left. \begin{array}{l} x, y \text{ have a specified singularity at } A. \\ x \text{ takes the values } \pm c \text{ as } u' \rightarrow -\infty, v \leq 0. \\ \text{On the subsonic contour } CBBAHHF', y \text{ vanishes.} \\ \text{On the characteristic } CC'D, x \text{ and } y \text{ vanish.} \end{array} \right\} \quad (8)$$

The solution in the supersonic region  $F'C'DEF'$  may be found separately by characteristic calculation with boundary conditions specified along  $C'F'$  by the previous solution and with  $x, y$  vanishing on  $C'D$ , and  $y$  vanishing on  $EF'$ .

### Construction of the Solution in Region $CBBAHHF'C'$

The solution is determined in several steps. First, the appropriate singular solution and stagnation solution are constructed. Boundary conditions on  $BC, G$  are satisfied by a system of images. Then, the solution is made to vanish approximately along  $CD$ . Finally, it is adjusted along the cut  $BAH$ .

It is convenient to introduce the following new variables

$$y = \frac{v_0^{1/3}}{c} \gamma_{phys}; \quad x = \frac{x_{phys}}{c}; \quad v = \frac{v'}{v_0'}; \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2}{3} \cdot \frac{(-u')^{3/2}}{v_0'}, \\ \tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{u'^{3/2}}{v_0'}. \end{array} \right. \quad (9)$$



The lines  $v' = \pm v'_0$  then become  $v = \pm 1$  and the flow is entirely described by the parameter

$$z_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 - M^2)^{3/2}}{(\gamma + 1) \delta} = \frac{2}{3} (-\xi_0)^{3/2}, \quad (9)$$

where  $\xi_0$  is the transonic similarity parameter.

By separation of variables, one obtains the component solutions

$$y = e^{\pm \lambda v} z^{1/3} C_{1/3}(\lambda z), \quad x = e^{\pm \lambda v} z^{2/3} C_{2/3}(\lambda z), \quad (10)$$

where  $\lambda$  is any real or complex number and  $C_r$  represents any linear combination of Bessel functions of order  $\pm r$ .

Another type of solution is found by introducing the variables

$$u = u, \quad t = \frac{z^2}{(v - B)^2} \quad (11)$$

and seeking solutions of the form

$$y = u^{-n} f_n(t), \quad x = u^{-m} g_m(t). \quad (12)$$

TOMOTIKA and TAMADA[10] point out that  $t$  can be made equal to unity at any point of the  $z$ - (or negative  $u$ -) axis by the choice of an appropriate imaginary value of  $B$ . In particular, if  $B = i z_1$ ,  $t = 1$  at the point  $(0, u_1)$  of the hodograph plane which corresponds to the point at infinity in the physical plane. The functions  $f_n(t)$ ,  $g_m(t)$  satisfy the equations:

$$\left. \begin{aligned} t(1-t)f_n'' - \left[ \frac{2}{3}(n-1) + \frac{3}{2}t \right] f_n' + \frac{n(n+1)}{9t} f_n &= 0, \\ t(1-t)g_m'' - \left[ \frac{2m-1}{3} + \frac{3}{2}t \right] g_m' + \frac{m(m+2)}{9t} g_m &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

so that two linearly independent solutions with singularities at  $t = 1$  are given by

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= u^{-n} (-t)^{n/3} F\left(\frac{2n+3}{6}, \frac{n}{3}; \frac{2}{3}; t\right), \\ y_2 &= u^{-n} (-t)^{n+1/3} F\left(\frac{2n+5}{6}, \frac{n+1}{3}; \frac{4}{3}; t\right), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u^{-m} (-t)^{m/3} F\left(\frac{2m+3}{6}, \frac{m}{3}; \frac{1}{3}; t\right), \\ x_2 &= u^{-m} (-t)^{m+2/3} F\left(\frac{2m+7}{6}, \frac{m+2}{3}; \frac{5}{3}; t\right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

These are related to the solutions (10) by the relations:

$$\left. \begin{aligned} z^{1/3} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(v+i z_1)} J_{-1/3}(\lambda z) \lambda^{\mu-1} d\lambda &= 2^{1/3} (v+i z_1)^{(1-3\mu)/3} \frac{\Gamma[(3\mu-1)/3]}{\Gamma(2/3)} \\ &\times F\left(\frac{3\mu-1}{3}, \frac{3\mu+2}{6}; \frac{2}{3}; \frac{-z^2}{(v+i z_1)^2}\right), \\ z^{1/3} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(v+i z_1)} J_{1/3}(\lambda z) \lambda^{\mu-1} d\lambda &= 2^{-1/3} (v+i z_1)^{-(1+3\mu)/3} \frac{\Gamma[(3\mu+1)/3]}{\Gamma(4/3)} \\ &\times F\left(\frac{3\mu-1}{6}, \frac{3\mu+4}{6}; \frac{4}{3}; \frac{-z^2}{(v+i z_1)^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} z^{2/3} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(v+i z_1)} J_{-2/3}(\lambda z) \lambda^{\mu-1} d\lambda &= 2^{2/3} (v+i z_1)^{(2-3\mu)/3} \frac{\Gamma[(3\mu-2)/3]}{\Gamma(1/3)} \\ &\times F\left(\frac{3\mu-2}{6}, \frac{3\mu+1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{-z^2}{(v+i z_1)^2}\right), \\ z^{2/3} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(v+i z_1)} J_{2/3}(\lambda z) \lambda^{\mu-1} d\lambda &= 2^{-2/3} (v+i z_1)^{-(2+3\mu)/3} \frac{\Gamma[(2+3\mu)/3]}{\Gamma(5/3)} \\ &\times F\left(\frac{2-3\mu}{6}, \frac{3\mu+5}{6}; \frac{5}{3}; \frac{-z^2}{(v+i z_1)^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Substitution of the integrals (15), (16) into (4) and (5) shows that a solution of the system is obtained by taking

$$m = n - \frac{1}{2}.$$

When the Fourier-Bessel integrals exist, they are convenient to satisfy analytic boundary conditions along lines  $v = \text{const}$ ; the hypergeometric functions are useful in finding the singular parts of the solution.

It is easily verified that

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t) = \lim_{u \rightarrow u_1} \frac{3}{u_1} (u - u_1), \quad (17)$$

so that the singular part of the solution behaves as  $(1-t)^{-1/2}$  near  $t=1$ . The singular part of the solution  $y_s(u, v)$  is an even function of  $v$ , and  $x_s$  is an odd function since the flow far from the wedge is similar to an incompressible flow  $y_s$  is therefore proportional to the real part of  $(1-t)^{-1,2}$  and  $x_s$  to its imaginary part. It follows from (17) that the proper singularity is found by selecting  $n=1$ ,  $m=1/2$ . After separation of real and imaginary parts, the singular

solution becomes

$$\left. \begin{aligned} y_s &= z^{1/3} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin \lambda z_1}{\sqrt[3]{3}} [J_{1/3}(\lambda z) + J_{-1/3}(\lambda z)] - \cos \lambda z_1 [J_{1/3}(\lambda z) - J_{-1/3}(\lambda z)] \right\} d\lambda \\ &= \operatorname{Re} \left\{ - \left( \frac{1}{2} \right)^{1/3} \frac{(v - i z_1)^{-2/3}}{\sqrt[3]{1-t}} F \left( -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1-t \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \pm \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} z^{2/3} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \\ &\quad \times \left\{ \cos \lambda z_1 [J_{2/3}(\lambda z) + J_{-2/3}(\lambda z)] - \frac{\sin \lambda z_1}{\sqrt[3]{3}} [J_{2/3}(\lambda z) - J_{-2/3}(\lambda z)] \right\} d\lambda \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \left( \frac{3}{4} \right)^{1/3} \frac{(v + i z_1)^{-1/3}}{\sqrt[3]{1-t}} F \left( \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1-t \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

When  $v = 0$ , the integrals (18a) and (18b) are evaluated as follows (see [11], page 405):

$$\left. \begin{aligned} y_s &= \frac{z^{1/3}}{\sqrt{z_1^2 - z^2}} \left[ \left( \frac{z}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - z^2}} \right)^{1/3} + \left( \frac{z}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - z^2}} \right)^{-1/3} \right], & (z < z_1) \\ y_s &= 0, & (z > z_1) \\ x_s &= 0, & (z < z_1) \\ x_s &= \mp \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} \frac{z^{2/3}}{\sqrt{z_1^2 - z^2}} \left[ \cos \left( \frac{2}{3} \sin^{-1} \frac{z_1}{z} \right) + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \sin \left( \frac{2}{3} \sin^{-1} \frac{z_1}{z} \right) \right], & (z > z_1) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

This solution exhibits the required singularity and symmetry properties, but does not satisfy the requirements of a stagnation point, since  $\lim_{z \rightarrow 0} x_s = 0(z^{-1/3})$ , instead of a constant value  $x_{st} = \pm c$ . To find the stagnation function, consider the solution

$$X_{st} = 2^{-2/3} \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/3)} \left[ \frac{z^2}{(v - i z_1)^2 - z^2} \right]^{2/3} F \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{z^2}{(v - i z_1)^2 - z^2} \right). \quad (20)$$

As  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $X_{st} \rightarrow [2^{-1/2} \Gamma(2/3)]$  since the hypergeometric function is finite at unity. This result holds for all values of  $v$ , as it should since at the stagnation point,  $v$  takes all values in the range  $0 < |v| < 1$ . In order to obtain the appropriate antisymmetry across the cut, one defines:

$$1^{2/3} = e^{\pm 4\pi i/3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Then,  $x_{st}$ , the imaginary part of  $X_{st}$ , has the proper behavior at infinity. On the other hand, when  $z < z_1$ ,  $x_{st}$  vanishes. In terms of Fourier-Bessel integrals:

$$x_{st} = \mp \frac{2^{1/3}}{\Gamma(2/3)} z^{2/3} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \left[ \frac{1}{2} \cos \lambda z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \lambda z_1 \right] J_{2/3}(\lambda z) \lambda^{-1/3} d\lambda, \quad (21)$$

$$y_{st} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5/6} \frac{z^{1/3}}{\Gamma(2/3)} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \left[ \frac{1}{2} \cos \lambda z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \lambda z_1 \right] J_{1/3}(\lambda z) \lambda^{-1/3} d\lambda. \quad (22)$$

In particular, along the  $z$ -axis:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{Re} e^{\pi i/3} \left[ \frac{2}{\Gamma(2/3)} \cdot \frac{\Gamma(1/6)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{1/3}}{(z^2 - z_1^2)^{7/6}} \right]. \quad (23)$$

When  $z > z_1$ , one obtains  $\partial x / \partial v = \partial y / \partial u = 0$ , so that

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{\Gamma(2/3)} \cdot \frac{\Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{4/3}}{(z^2 - z_1^2)^{7/6}}, & (z > z_1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\Gamma(2/3)} \cdot \frac{\Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{4/3}}{(z^2 - z_1^2)^{7/6}}, & (z < z_1) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

The symmetry conditions are satisfied, but  $y_{st}$  does not vanish along the cut.

To cancel the contribution of  $y_s + y_{st}$  on  $v = \pm 1$ , one now puts two singularities of the same strength and opposite sign at  $v = \pm 2 + i z_1$ ; to cancel the effect of these first correction solutions one requires solutions of identical strength and sign as  $y_s + y_{st}$  at  $v = \pm 4 + i z_1$ , and so on.

In terms of Bessel-Fourier integrals, the image correction is written as follows:

$$\left. \begin{aligned} (y_s + y_{st})_c &= \int_0^\infty \Phi(\lambda, z) \left[ e^{-\lambda|v|} + \sum_1^\infty (-)^n e^{-z\lambda n} (e^{\lambda v} + e^{-\lambda v}) \right] d\lambda \\ &= \int_0^\infty \Phi(\lambda, z) \left[ e^{-\lambda|v|} - e^{-\lambda} \frac{\cosh \lambda v}{\cosh \lambda} \right] d\lambda \\ &= \int_0^\infty \Phi(\lambda, z) \frac{\sinh \lambda (1 - |v|)}{\cosh \lambda} d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

where  $\Phi(\lambda, z)$  represents the combination of Bessel functions under the integral sign in (18), (20). Conditions along  $v = \pm 1$  are satisfied. Conditions along  $OA$  are also satisfied because of the symmetry of the images. However,  $y$  does not vanish along the cut  $BAH$ .

The corresponding relation for  $x(u, v)$  is

$$\left. \begin{aligned} (x_s + x_{st})_c &= \int_0^\infty \Psi(\lambda, z) \left[ \pm e^{-\lambda|v|} - e^{-\lambda} \frac{\sinh \lambda v}{\cosh \lambda} \right] d\lambda \\ &= \int_0^\infty \Psi(\lambda, z) \frac{\cosh \lambda (1 - |v|)}{\cosh \lambda} d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (25b)$$

where  $\Psi(\lambda, z)$  corresponds to  $\Phi(\lambda, z)$ , and the region of convergence is the same as for  $y$ .

One is then led to investigate solutions of the form

$$\left. \begin{aligned} y &= A y_{s_c} + y_{st_c} + z^{1/3} \sum_1^\infty K_{1/3}(n\pi z) [a_n \cos n\pi v + b_n \sin n\pi v] \\ &+ z^{1/3} \int_0^\infty \left[ \frac{\cosh \lambda v}{\cosh \lambda} G(\lambda) + \frac{\sinh \lambda (1 - |v|)}{\sinh \lambda} F(\lambda) \right] \\ &\times [J_{1/3}(\lambda z) + J_{-1/3}(\lambda z)] d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= A x_{s_c} + x_{st_c} + z^{2/3} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} \sum_1^\infty K_{2/3}(n\pi z) [b_n \cos n\pi v + a_n \sin n\pi v] \\ &+ z^{2/3} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} \int_0^\infty \left[ \frac{\sinh \lambda v}{\cosh \lambda} G(\lambda) \mp \frac{\cosh \lambda (1 - |v|)}{\sinh \lambda} F(\lambda) \right] \\ &\times [J_{-2/3}(\lambda z) - J_{2/3}(\lambda z)] d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

where  $(x, y)_{s_c}$  represents the singular solution,  $(x, y)_{st_c}$  the stagnation solution both corrected to satisfy conditions on  $v = \pm 1$ . The series is needed to satisfy the condition on  $CC'$ . The function  $G(\lambda)$  is used to adjust conditions along the lines  $v = \pm 1$  and the function  $F(\lambda)$  to adjust conditions along the  $z$ -axis when all other corrections have been made.

To satisfy the condition  $y = 0$  along  $CC'$ , following GUDERLEY[2], one replaces it by the equivalent conditions

$$y = 0 \text{ on } CN, \quad y = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \text{ on } NC'$$

since these conditions insure the vanishing of the solution in the entire region  $CNC'$  and in particular along  $CC'$ . In the analysis, the Bessel functions  $J_{\pm 1/3}$  are replaced by their asymptotic values.

Along  $NC'$ , one therefore has to satisfy the conditions:

$$\left. \begin{aligned} \sum \alpha_n \cos n \pi v + \beta_n \sin n \pi v &= f(v), \\ \sum \lambda_n (\alpha_n \cos n \pi v + \beta_n \sin n \pi v) &= g(v). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Here

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= a_n [J_{1/3}(n \pi) + J_{-1/3}(n \pi)]^{-1} \cong \pi a_n \sqrt{n}, \\ \beta_n &= b_n [J_{1/3}(n \pi) + J_{-1/3}(n \pi)]^{-1} \cong \pi b_n \sqrt{n}, \\ \lambda_n &= \frac{(d/du) [\xi^{1/3} J_{1/3}(n \pi \xi) + \xi^{1/2} J_{-1/3}(n \pi \xi)]}{\xi^{1/3} [J_{1/3}(n \pi \xi) + J_{-1/3}(n \pi \xi)]} \Big|_{\xi=1} \cong (-)^n n \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

and

$$\left. \begin{aligned} f(v) &= -(A y_{sc} + y_{stc})_{\xi=1} \\ &\quad + \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\cosh \lambda v}{\cosh \lambda} G + \frac{\sinh \lambda (1-v)}{\sinh \lambda} F \right) K_{1/3}(\lambda) d\lambda, \\ g(v) &= \left( A \frac{\partial y_{sc}}{\partial u} + \frac{\partial y_{stc}}{\partial u} \right)_{\xi=1} \\ &\quad - \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\cosh \lambda v}{\cosh \lambda} G + F \frac{\sinh \lambda (1-v)}{\sinh \lambda} \right) K_{2/3}(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (28b)$$

Since  $f(v)$ ,  $g(v)$  are defined only in the half-range  $0 < v < 1$ , it is convenient to continue  $f(v)$  as an odd function of  $v$  so that

$$f(v) = \sum_1^{\infty} \gamma_n \sin n \pi v, \quad (29)$$

$$\gamma_n = 2 \int_0^1 f(v) \sin n \pi v dv. \quad (29a)$$

Writing now:

$$\delta_n = \beta_n - \gamma_n, \quad (30)$$

$$g'(v) = g(v) - \sum_1^{\infty} \lambda_n \gamma_n \sin n \pi v, \quad (30a)$$

and differentiating (28) one obtains the equivalent system:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} n (\delta_n \cos n \pi v - \alpha_n \sin n \pi v) &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \lambda_n (\alpha_n \cos n \pi v + \delta_n \sin n \pi v) &= g'(v). \end{aligned} \right\} \quad (0 < v < 1) \quad (31)$$



When the function  $p(U)$  defined by:

$$n \alpha_n = \int_{-1}^0 p(U) \cos n \pi U dU, \quad n \delta_n = \int_{-1}^0 p(U) \sin n \pi U dU \quad (32)$$

is substituted into (31) and the range of the integral and  $g'(v)$  are made the same by the transformation  $\psi = v - 1$ , the system (31) can be written

$$\int_{-1}^0 p(U) \frac{\sin \pi U + \sin \pi \psi}{\cos \pi U - \cos \pi \psi} dU = 2 g''(\psi). \quad (-1 < \psi < 0) \quad (33)$$

This integral has meaning if the Cauchy principal value is taken when  $\psi = U$ . To solve this integral equation, the angles  $U, \psi$  are replaced by angles which go through a full period in the range of integration:

$$\psi = \frac{\varphi}{2}, \quad U = \frac{w}{2}, \quad g''(\psi) = \bar{g}''(\varphi), \quad p(U) = \bar{p}(w), \quad dU = \frac{dw}{2}.$$

It can then be shown by expanding  $\bar{p}$  and  $\bar{g}''$  into Fourier series and carrying out the integration, that:

$$n \alpha_n = - \int_0^1 g'(v) \cos n \pi v dv \quad (n \text{ even}), \quad n \alpha_n = 0 \quad (n \text{ odd}), \quad (34)$$

$$n \delta_n = - \int_0^1 g'(v) \sin n \pi v dv \quad (n \text{ even}), \quad n \delta_n = 0 \quad (n \text{ odd}). \quad (35)$$

Returning to the original coefficients  $a_n, b_n$ , one obtains, using the orthogonality properties once more:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= - \frac{\pi}{\sqrt{n}} \int_0^1 g(v) \cos n \pi v dv, & (n \text{ even}) \\ b_n &= - \frac{\pi}{\sqrt{n}} \int_0^1 [g(v) + n f(v)] \sin n \pi v dv, & (n \text{ even}) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

where  $f, g$  are given by equation (28).

Along  $v = \pm 1$ ,  $y$  vanishes if  $G(\lambda)$  satisfies the following integral equation:

$$\int_0^\infty G(\lambda) [J_{1/3}(\lambda z) + J_{-1/3}(\lambda z)] d\lambda = \sum_1^\infty a_{2n} K_{1/3}(2n\pi z) \quad (37)$$

or writing  $K_{1/3}(2 n \pi z)$  as a Fourier-Bessel integral ([11], page 424):

$$\int_0^{\infty} \left( G(\lambda) + \sum_1^{\infty} a_{2n} \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4 n^2 \pi^2} \right) [J_{1/3}(\lambda z) + J_{-1/3}(\lambda z)] d\lambda = 0. \quad (38)$$

This result must hold for all values of  $z$  (real and complex); therefore the integrand must vanish:

$$G(\lambda) = - \sum_1^{\infty} \frac{a_{2n} \lambda}{\lambda^2 + 4 n^2 \pi^2}. \quad (39)$$

Along  $v = 0$ ,  $x$  is continuous along  $OA$  and  $y$  vanishes along  $AB$ ,  $AH$  when  $F(\lambda)$  satisfies the integral equation set:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda \coth \lambda F(\lambda) [J_{1/3}(\lambda z) + J_{-1/3}(\lambda z)] d\lambda &= 0, & (z < z_1) \\ \int_0^{\infty} [F(\lambda) - (1 - \operatorname{sech} \lambda) G(\lambda)] [J_{1/3}(\lambda z) + J_{-1/3}(\lambda z)] d\lambda \\ &= -y_{stc} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \Phi(\lambda, z) d\lambda. & (z > z_1) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

This diffraction type integral equation is not easily solved. However, since  $F(\lambda)$  represents a correction term, equations (40) are approximated by

$$F(\lambda) \cong - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\lambda \sin \lambda z_1}{1 + \lambda^{5/2}}. \quad (41)$$

When (39) and (41) are substituted into (36), one obtains an infinite set of simultaneous equations for the coefficients  $a_n$ . But, since the  $a_n$  decrease rapidly and the integrand decreases exponentially, it is sufficiently accurate to replace (39) by

$$G(\lambda) \cong - \frac{a_2 \lambda}{\lambda^2 + 4 \pi^2}. \quad (42)$$

The integrals in (36) are then estimated as follows:

$$\left. \begin{aligned} I_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\cosh \lambda n \pi - 1}{\sinh \lambda n \pi} \left[ -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\lambda n \pi \sin \lambda n \pi z_1}{1 + (\lambda n \pi)^{5/2}} \right] \right. \\ \left. - \frac{\lambda a_2}{\lambda^2 + 4/n^2} \cdot \frac{\tanh \lambda n \pi}{n \pi} \right\} \frac{\lambda^2 K_{2/3}(\lambda n \pi)}{1 + \lambda^2} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

As  $n \pi \gg 1$ , because of the rapid convergence of the  $K_{2/3}$  function, the asymptotic

tic value of  $K_{2,3}(\lambda, n\pi)$  as  $\lambda, n\pi \rightarrow \infty$  are used and of the rest of the integrand as  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$I_n \cong \sqrt{\frac{3}{n}} \cdot \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} a_2 n^{5/2} \int_0^{\infty} \lambda^{7/2} e^{-\lambda n\pi} d\lambda \cong \frac{-0.0511 a_2}{n^{5/2}}. \quad (43b)$$

Similarly:

$$\left. \begin{aligned} J_n &= \sqrt{\frac{3}{n}} \int_0^{\infty} [F(\lambda) + G(\lambda) (\operatorname{sech} \lambda - 1)] \frac{n\pi \lambda}{\lambda^2 + n^2 \pi^2} \frac{\lambda K_{2,3}(\lambda) - n\pi K_{1,3}(\lambda)}{\pi^2} d\lambda \\ &\cong \frac{-0.286 a_2}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

The formulas (43) and (44) give the correction terms to be added in order to obtain the complete coefficients  $a_n, b_n$ . The constant  $A$  is adjusted so that  $x(0, 1)$  vanishes. The solution in the supersonic region may then be determined by the method of characteristics.

### Analysis of Results

By means of the solution constructed above, several significant features of the flow are computed. They include the size and shape of the supersonic region  $CIG$  (Figure 3) and its variation with transonic similarity parameter (Figure 4), the variation of normal shock strength at the wedge surface with similarity parameter (Figure 5) the actual pressure distribution (a typical distribution is shown on Figure 6) and the variation of drag coefficient with similarity parameter (Figure 7).

Since  $y$  grows monotonically allong  $CD$ , in the subsonic domain (9), the position of point  $I$ , the apex of the supersonic region, is given by the condition  $\partial y(0, v)/\partial v = 0$ . This occurs at the point:

$$x_0 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \frac{1}{\Gamma(1/3) \sqrt{3}} \sum_1^{\infty} \frac{b_{2n}}{n^{2/3}}, \quad (45a)$$

$$y_0 = \frac{2^{1/3} A}{z_1^{2/3}} + \frac{2^{8/3}}{3^{5/2}} \cdot \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(5/3)} \cdot \frac{1}{z_1^{1/3}} + \frac{\pi^{2/3}}{3^{1/2} 2^{1/3} \Gamma(2/3)} \sum_1^{\infty} \frac{a_{2n}}{n^{1/3}}. \quad (45b)$$

As the transonic similarity parameter vanishes,  $y_0$  grows beyond bound. Since  $A$  remains bounded when  $z_1$  approaches zero, the height  $y_0/c$  of the supersonic region becomes inversely proportional to the similarity parameter.

The width of the supersonic region is the distance from the corner to the intersection of the normal shock  $FG$  with the wedge surface. It is seen from a typical chordwise velocity distribution plot (Figure 6) that while  $x(u, +)$  increases monotonically from  $=1$  to zero as  $u$  increases from  $-\infty$  to zero

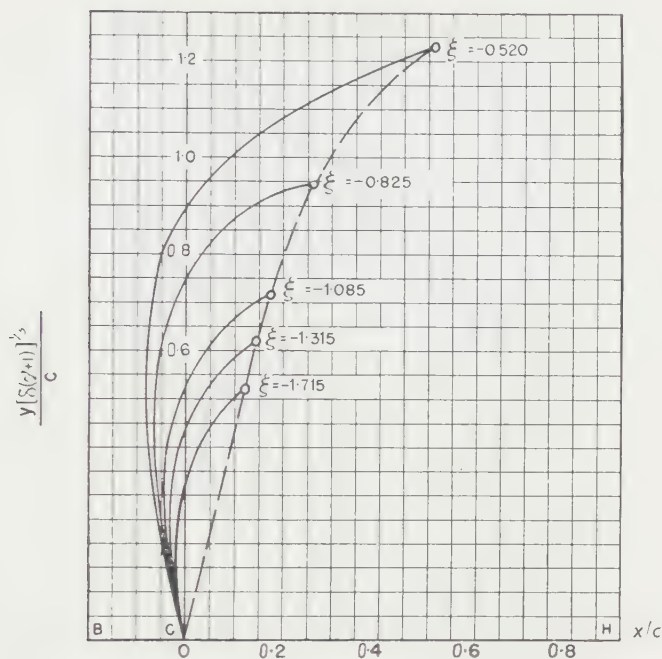


Fig. 3.—Shape of supersonic region transonic flow past symmetric wedge.

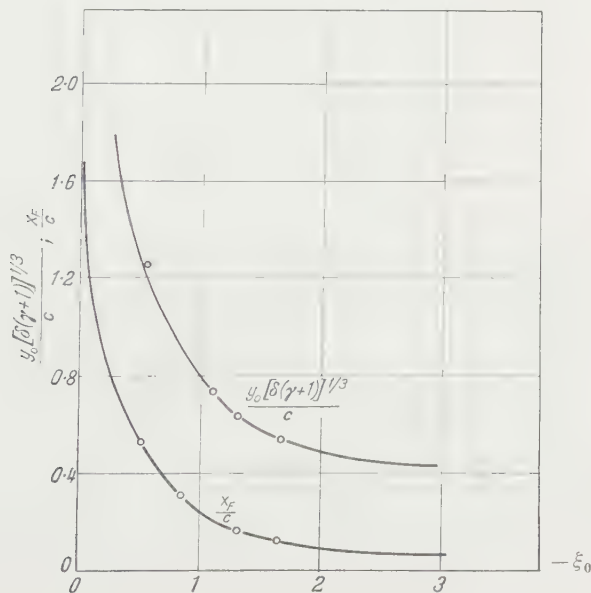


Fig. 4.—Variation of size of supersonic region in transonic flow past symmetric wedge.

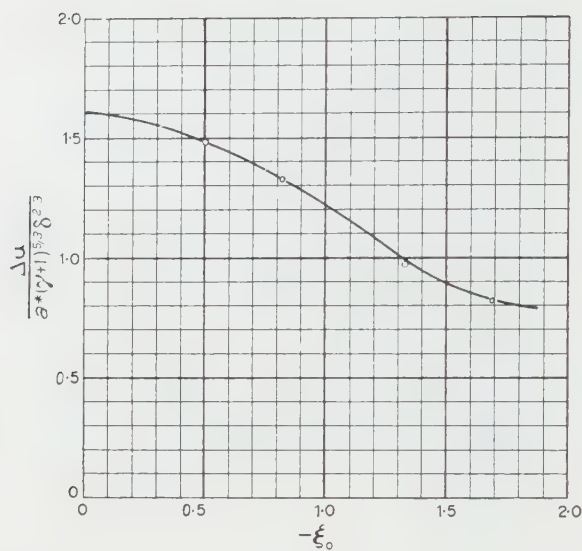


Fig. 5

Strength of normal shock which ends supersonic zone at surface of wedge in transonic flow.

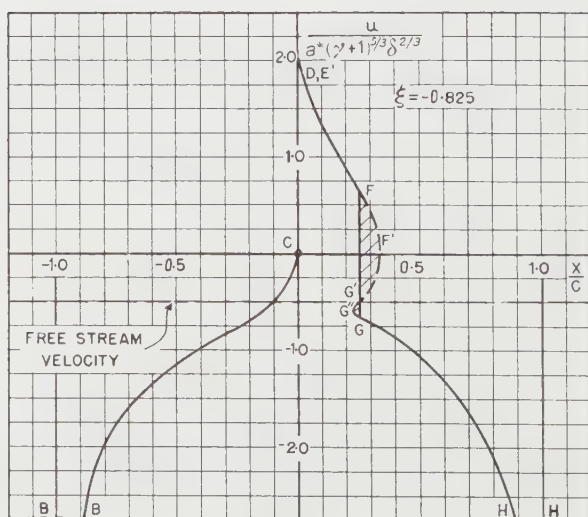


Fig. 6

Velocity distribution at the surface of a wedge in transonic flow.

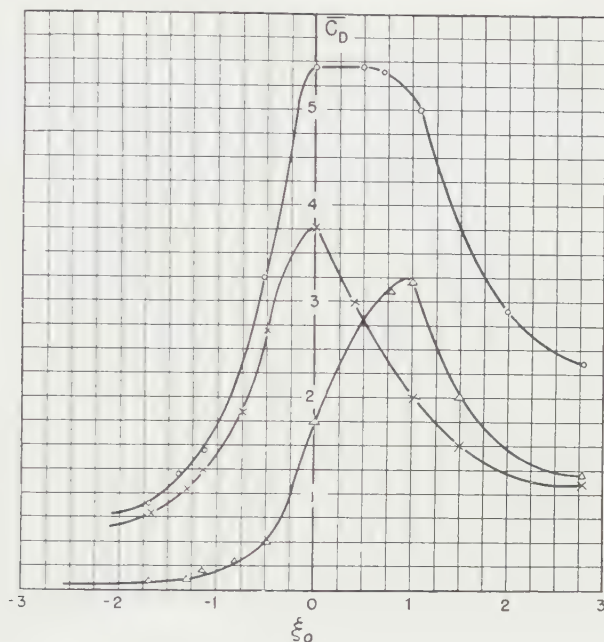


Fig. 7

Generalized drag coefficient for symmetric wedge in transonic flow.

○ Total drag, × Drag of rear half of wedge, △ Drag of front half of wedge.

$x(u, -1)$ , increases to a maximum as  $u$  decreases from  $u_D$  to  $u = 0$ :

$$x = \frac{(2\pi)^{1/3}}{3^{5/6} \Gamma(1/3)} \sum \frac{b_{2n}}{n^{2/3}}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0. \quad (46)$$

As  $u$  continues to decrease,  $x$  decreases to a minimum  $G''$ ; it then increases monotonically as  $u$  goes to negative infinity. In the region  $x_{G''} < x < x_F$ , the function  $u(x, 0)$  is triple-valued. Therefore, a shock must be placed at that value of  $x$  in the range  $x_{G''} < x < x_F$  at which the shock condition  $u(x_F) = -u(x_G)$  is satisfied. The location and strength of the shock are automatically determined by the condition that  $u(x, 0)$  and more generally  $u(x, y)$  be single-valued. If the triple-valued region starts at  $x/c > 1$ , the flow must turn at  $H$  through a weak shock (or Mach wave) and become supersonic and parallel to the free stream behind the wedge. It becomes subsonic again by going through a curved shock symmetric with respect to the  $x$ -axis and concave in the downstream direction. The shock comes off the airfoil ( $x/c = 1$  at  $F$ ) for a transonic parameter value  $-\xi_0 = 0.12$ . For the range  $|\xi_0| < 0.12$  the flow configuration is considerably more complicated than that investigated here. The position and strength of the



shock for  $\xi_0 > 0.12$  are plotted as functions of the transonic similarity parameter  $\xi_0$  on Figures 4 and 5.

The pressure drag coefficient (Figure 7) is the integral of the pressure coefficient component in the horizontal direction. Within the limits of the linearized theory, the pressure coefficient is:

$$c_P = \frac{2(\bar{u} - \bar{u}_1)}{a^*} = \frac{2 \delta^{2/3}}{(\gamma + 1)^{1/3}} (z^{2/3} - z_1^{2/3}) \quad (47a)$$

so that the drag coefficient is:

$$\left. \begin{aligned} c_D &= \frac{4 \delta^{5/3}}{(\gamma + 1)^{1/3}} \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[ \int_{-1}^0 z^{2/3} dx - \int_0^1 z^{2/3} dx \right] \\ &= \frac{4 \delta^{5/3}}{(\gamma + 1)^{1/3}} \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} \\ &\quad \times \left[ \frac{\Gamma(4/3)}{2 \pi^{1/3}} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{n^{2.3}} + \int_0^{x_F} z^{2/3} dx + \int_{z_F}^{z_G} z^{2/3} \frac{\partial x}{\partial z} dz \right] \end{aligned} \right\} \quad (47b)$$

This drag may be considered made up of two related parts. The infinite series represents the drag due to the fact that the subsonic part of the flow-field is not symmetric fore and aft. The integrals represent the suction on the rear of the airfoil, due to the supersonic region there.

The drag may also be split into drag of the front of the wedge and drag of the rear. The drag of the front of the wedge agrees quite well with the drag computed by COLE [1] and measured by BRYSON [6] for the half-wedge. The drag of the rear is much larger, and due mainly to the suction on the rear of the airfoil.

## Conclusion

The preceding pages describe a theoretical investigation of the steady plane flow of an inviscid ideal gas past a thin symmetric diamond wedge at zero angle of attack at speeds just below the speed of sound. A solution of the transonic equation which approximately satisfies all the boundary conditions, is built up in the hodograph plane from an appropriate singular solution, a stagnation solution and a series of regular solutions.

From this solution, a rather complete picture of the flow field is determined, including the variation of size and shape of the supersonic region, and the position and strength of the shock wave which bounds it on the downstream side.

The pressure drag is in good agreement with COLE's theory and BRYSON's measurements for the front of the wedge, and fits smoothly with VINCENTI's curve at  $\xi_0 = (M - 1)$ . The few available experiments on closed wedges give drags of the same order as the computed drags.

## REFERENCES

- [1] J. D. COLE, *Drag of a Finite Wedge at High Subsonic Speeds*, J. Math. Phys. 30, 79-93 (1951).
- [2] G. GUDERLEY and H. YOSHIHARA, *The Flow Over a Wedge Orofile at Mach Number One*, J. Aeron. Sci. 17, 723-736 (1950).
- [3] A. G. MACKIE and PACK, D. C., *Transonic Flow Past Finite Wedges*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 48, 178-188 (1952).
- [4] W. G. VINCENTI and C. B. VAN WAGONER, *Transonic Flow Past a Wedge Profile With Detached Bow Wave*, NACA-TN-2339 (1951).
- [5] H. W. LIEPMANN and A. E. BRYSON JR., *Transonic Flow Past Wedge Sections*, J. Aeron. Sci. 17, 745-755 (1950).
- [6] A. E. BRYSON JR., *An Experimental Investigation of Transonic Flow Past Two-Dimensional Wedge and Circular Arc Sections, Using a Mach-Zehnder Interferometer*, NACA-TN-2560 (1951).
- [7] W. GRIFFITH, *Transonic Flow*, Princeton Univ., Phys. Dept., Tech. Rep. II, 7 (1950).
- [8] W. GRIFFITH, *Shock Tube Studies of Transonic Flow over Wedge Profiles*, J. Aeron. Sci. 19, 249-257 (1952).
- [9] A. A. NIKOLSKI and G. I. TAGANOV, *Gas Motion in a Supersonic Region and Conditions of Potential Flow Breakdown*, NACA-TM-1213 (1949).
- [10] S. TOMOTIKA and K. TAMADA, *Studies on Two-Dimensional Transonic Flows of a Compressible Fluid*, Quart. Appl. Math. 7, 381-397 (1950); 8, 127-136 (1950); 9, 129-148 (1951) (3 parts).
- [11] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Edition (Cambridge University Press, London, 1948).
- [12] G. P. WOOD, *Experiments on Transonic Flow Around Wedges*, NACA-TN-2829 (1952).

## Résumé

L'écoulement stationnaire plan d'un gaz idéal, sans frottement ni conduction de chaleur autour d'un profil mince en losange à l'incidence nulle, a été examiné théoriquement à des vitesses légèrement inférieures à celle du son.

Le problème fut étudié dans le plan de l'hodographe où la coordonnée  $y(u, v)$  est une solution de l'équation de TRICOMI, et où  $x(u, v)$  satisfait à une équation semblable. Les conditions aux limites exigent que  $y(u, v)$  présente une singularité du type  $y \sim (u_1 - u)^{-1/2}$ , où  $u_1$  est la vitesse de l'écoulement infini amont;  $y$  s'annule le long des droites  $v = \pm v_0$ , qui représentent la surface du profil, et le long de la caractéristique descendante passant par  $(0, v_0)$ ; les points de stagnation amont et aval sont définis par la condition  $\lim x(-\infty \pm v_0) = \mp c$ .

Une solution a été élaborée qui satisfait approximativement à ces conditions et qui dépend uniquement du paramètre de similitude transonique  $\xi_0$ . On en déduit que l'écoulement est subsonique jusqu'à l'arête au milieu du profil, sonique sur l'arête elle-même, où s'amorce une détente locale PRANDTL-MEYER limitée par un choc oblique faible. Suit une zone d'écoulement supersonique décéléré aboutissant à un choc normal situé soit sur la moitié arrière du profil soit dans l'écoulement aval. La résistance due à la pression, la position et l'intensité des chocs, ainsi que la forme de la région supersonique, ont été calculées pour différentes valeurs de  $\xi_0$ .

Received: March 10, 1953.)

# Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten

VON HERMANN WITTING, Freiburg i. Br.<sup>1)</sup>

## § 1. Einleitende Übersicht

In der vorliegenden Arbeit wird ein Differenzenverfahren zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung ebener, stationärer, laminarer Grenzschichten inkompressibler Flüssigkeiten bei vorgegebenen Randbedingungen entwickelt. Es dürfte den bisher angegebenen überlegen sein, da es die Vorteile eines geringen Arbeitsaufwandes und einer den Anforderungen entsprechenden Genauigkeit besser in sich vereinigt. Infolge seiner einfachen Handhabung ist es zur praktischen Verwendung geeignet.

Die Entwicklungen schliessen an das Differenzenverfahren von H. GÖRTLER [1]<sup>2)</sup> an. Die vorgenommenen Änderungen zielen auf eine genauere Behandlung des wandnahen Gebiets. Die hierbei aufgewandte grössere Sorgfalt ist gerechtfertigt, da die Wand des umströmten Körpers im Rahmen des Fortsetzungsprozesses eine Linie der Unbestimmtheit darstellt. Während die finiten Ersetzungen von H. GÖRTLER eine Verschiebung der Unbestimmtheitslinie in das Innere des betrachteten Gebiets bewirken, wird bei der neuen Methode im wandnahen Gebiet eine geeignete Polynom-Approximation vorgenommen und dadurch die für die numerische Durchführung des Verfahrens besonders in der Nähe der Ablösungsstelle ungünstige Verschiebung der Linie der Unbestimmtheit vermieden. Die neuen Approximationen bedingen bei jedem Fortsetzungsschritt die Durchführung eines Iterationsprozesses, der theoretisch sehr durchsichtig und praktisch überaus einfach zu handhaben ist. Durch die Änderungen wird der Grundcharakter des ursprünglichen Verfahrens nicht geändert. Die Erhöhung des Arbeitsaufwandes – um 10 min pro Fortsetzungsschritt, während dieser bisher 1 h in Anspruch nahm – ist unwesentlich und wird durch die erzielte Genauigkeitserhöhung mehr als wettgemacht. Das Verfahren wurde an mehreren Beispielen erprobt; dabei wurden – auch in der Nähe der Ablösungsstelle – gute Erfahrungen gemacht.

Wie bei den Verfahren [1] und [2], so zeigt auch die nach dem verbesserten Differenzenverfahren errechnete Näherungslösung eine charakteristische Streuungerscheinung; in [9] wurde diese Aufspaltung der Lösung untersucht und eine zu ihrer Behebung geeignete Glättungsvorschrift angegeben.

Es sei noch bemerkt, dass das Verfahren von K. SCHRÖDER [2], welches einen grösseren Zeitaufwand erfordert, mit der gleichen Genauigkeit arbeitet.

<sup>1)</sup> Mathematisches Institut der Universität, Abteilung Angewandte Mathematik.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 397.

wie dasjenige von H. GÖRTLER [1]. Auch hierüber hat der Verfasser in [9] berichtet.

## § 2. Das Randwertproblem der Grenzschichttheorie

Die Geschwindigkeitsverteilung einer ebenen, stationären, laminaren und inkompressiblen Grenzschichtströmung genügt bekanntlich den Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. Bezeichnen  $x$  und  $y$  die Bogenlängen der angeströmten Wand bzw. der Normalen zur Wand,  $u$  und  $v$  die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten,  $p$  den Druck,  $\varrho$  die Dichte und  $\nu$  die kinematische Zähigkeit, so lauten diese Gleichungen

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1b)$$

Der Druck  $p(x)$  kann aus der als bekannt anzusehenden reibungsfreien Aussenströmung ermittelt werden<sup>1)</sup>. Bezeichnet  $u_0(x)$  die Längsgeschwindigkeit am äusseren Rande der Grenzschicht, so gilt in grenzschichttheoretischer Näherung

$$-\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} = u_0 \frac{du_0}{dx}. \quad (1c)$$

In die Gleichung (1) führen wir unter Verwendung einer charakteristischen Länge  $L$ , einer charakteristischen Geschwindigkeit  $U$  und der Reynoldsschen Zahl  $Re = UL/\nu$  dimensionslose Koordinaten ein

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, & y' &= y \frac{\sqrt{Re}}{L}, & p' &= \frac{p}{\varrho U^2}, \\ u' &= \frac{u}{U}, & v' &= v \frac{\sqrt{Re}}{U}, & u'_0 &= \frac{u_0}{U}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Da im folgenden nur diese Koordinaten benutzt werden, können die Striche wieder weggelassen werden. Nach Elimination von  $v$  mittels (1b)<sup>2)</sup> und  $p$  mittels (1c) lautet (1a)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3a)$$

Diese Gleichung lässt sich durch Differentiation nach  $y$  in eine reine Differentialgleichung überführen. Es ist aber für das folgende zweckmässig, sie in dieser integrierten Form zugrunde zu legen.

<sup>1)</sup> Praktisch geschieht dies meist durch Messung des Druckes.

<sup>2)</sup> Hierbei wird angenommen, dass die Wand undurchlässig ist:  $v(x, 0) = 0$ .

Die Funktion  $u(x, y)$  genügt gewissen Randbedingungen. Wegen des Haftens an der Wand ist

$$u(x, 0) = 0. \quad (3b)$$

Am Rande der Grenzschicht geht die Längsgeschwindigkeit stetig in die der Aussenströmung über. Diese Bedingung approximieren<sup>1)</sup> wir durch

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_0(x). \quad (3c)$$

Zur Lösung der Gleichung (3a) für  $x \leq x_0$  unter den Bedingungen (3b) und (3c) bei bekanntem  $u_0(x)$  ist noch die Kenntnis einer «Anfangsbedingung»

$$u(x_0, y) = \tilde{u}(y) \quad (3d)$$

erforderlich; dabei kann  $\tilde{u}(y)$  nicht vollständig beliebig sein<sup>2)</sup>.

Besonderes Interesse für die Praxis hat die sogenannte Ablösungsstelle  $(x_A, 0)$ , die durch  $\partial u / \partial y (x_A, 0) = 0$  definiert ist. Da es zweifelhaft erscheint, dass die durch (3) bestimmte Funktion  $u(x, y)$  die (laminare) Geschwindigkeitsverteilung auch für  $x > x_A$  in genügendem Masse approximiert, kann man sich bei der Lösung von (3) auf das Intervall  $x_0 \leq x \leq x_A$  beschränken. Wir nehmen für das Folgende an, dass die Lösung  $u(x, y)$  des Randwertproblems (3) in diesem Intervall existiert; sie ist dann nach H. GÖRTLER [4] auch eindeutig bestimmt.

Für die Lösung  $u(x, y)$  von (3) lassen sich einige weitere Bedingungen angeben, die für  $y = 0$  aus (3a) bzw. aus denjenigen Gleichungen folgen, die durch fortlaufendes Differenzieren nach  $y$  aus (3a) hervorgehen. Mit

$$a_r(x) = \frac{\partial^r u(x, y)}{\partial y^r} \Big|_{y=0} \quad (4)$$

lauten diese sogenannten Grenzschichtbindungen

$$\left. \begin{aligned} a_2(x) = p' = -u_0 u_0', \quad a_3(x) = 0, \quad a_4(x) = a_1 a_1', \\ a_5(x) = 2 a_1 a_2', \quad a_6(x) = 2 a_2 a_2', \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zur Integration von (3) hat man Näherungsverfahren anzuwenden. Liegt ein vorderer Staupunkt vor – diesem wird man dann die Koordinate  $x = 0$  zuordnen –, so kann die Lösung  $u(x, y)$  in einem Gebiet  $0 \leq x \leq x_0 < x_A$ ,  $y \geq$

<sup>1)</sup> Genauer lautet diese Übergangsbedingung  $u(x, \delta) = u_0(x)$ , wenn  $\delta$  die Grenzschichtbreite bedeutet; die Art des Verhaltens der Lösung von (3) für  $y \rightarrow \infty$  rechtfertigt jedoch nachträglich die Approximation dieser Übergangsbedingung durch (3c).

<sup>2)</sup> Die genaue Angabe der von  $\tilde{u}(y)$  zu erfüllenden Bedingungen, wie überhaupt der Randbedingungen des Problems (3), ist noch nicht möglich, da erst ein einschlägiger Existenzsatz diese Frage zu klären vermag. Sicher ist jedoch  $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(y) = u_0(x_0)$  erforderlich, wobei der Grenzübergang in physikalisch sinnvoller Weise erfolgen muss.



aus wenigen Gliedern der Blasius'schen Reihe in einfacher Weise ermittelt werden; die Grösse von  $x_0$  richtet sich dabei nach der geforderten Genauigkeit und den vorliegenden Vertafelungen<sup>1)</sup>. Dagegen hat man zur Berechnung der Lösung in  $x_0 \leq x \leq x_A$  und damit der Ablösungsstelle  $x = x_A$  - wie bei Strömungen ohne Staupunkt überhaupt - andere Verfahren anzuwenden. In § 3 soll zunächst eine allgemeine Methode zur Gewinnung einer Näherungslösung aufgezeigt werden, wie sie durch die Struktur des Randwertproblems (3) nahegelegt ist. Die weiteren Ausführungen dienen dann der Entwicklung eines speziellen Näherungsverfahrens dieser Art.

### § 3. Fortsetzungsverfahren und Entwicklung der Problemstellung

Ist für einen bestimmten Wert  $x = x^*$  das «Profil»  $u(x^*, y)$  bekannt, so lässt sich  $\partial u / \partial x (x^*, y)$  aus (3a) berechnen; unter Berücksichtigung von  $\partial u / \partial y (x^*, 0) = 0$  erhält man nach L. PRANDTL [3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{1}{u^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u_0 u'_0 \right) dy + \frac{1}{u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u_0 u'_0 \right). \quad (6)$$

Da nach (3d) das Profil  $u(x_0, y)$  bekannt ist, lässt sich  $u(x_1, y)$  für hinreichend kleines  $x_1 - x_0$  näherungsweise berechnen gemäss

$$u(x_1, y) = u(x_0, y) + (x_1 - x_0) \frac{\partial u}{\partial x} (x_0, y).$$

Ist  $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < x_A$  eine geeignete Einteilung des Intervalls  $[x_0, x_A]$ , so erhält man eine Näherungslösung von (3) durch rekursive Auswertung der Gleichungen

$$u(x_{n+1}, y) = u(x_n, y) + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial u}{\partial x} (x_n, y) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Allgemein spricht man von Fortsetzungsverfahren, wenn eine Näherungslösung von (3) durch «Fortsetzen» des für  $x = x_0$  vorgegebenen Profils  $u(x_0, y)$  mit Hilfe der Differentialgleichung (3a) unter Wahrung der Randbedingungen gewonnen wird. Für diese hat (3d) die Bedeutung einer Anfangsbedingung.

Die Gerade  $y = 0$  stellt für den Fortsetzungsausdruck (6) eine Linie der Unbestimmtheit dar; nach (3b) und (5) sind nämlich für  $y = 0$  der zweite Summand sowie der Integrand des ersten Summanden unbestimmte Ausdrücke der Form  $0/0$ . Da man beim Berechnen von Quotienten kleiner Zahlen eine ungünstige Fehlerfortpflanzung zu erwarten hat, muss man bei finiten Approximationen im wandnahen Gebiet erhöhte Sorgfalt anwenden.

<sup>1)</sup> Die Koeffizienten in dieser Reihenentwicklung nach Potenzen von  $x$  setzen sich linear aus gewissen universellen Funktionen zusammen. Vertafelungen dieser Funktionen findet man für den besonders wichtigen Fall der zur Anströmungsrichtung symmetrischen Strömungen bei A. ULRICH [5].



Unter den nach dem Fortsetzungsprinzip arbeitenden Verfahren haben sich die Differenzenverfahren bisher am besten bewährt. Bei diesen wird die Differentialgleichung (3a) in den Punkten  $(x_i, y_k)$  eines rechtwinkligen Gitternetzes der  $(x, y)$ -Ebene durch finite Näherungsgleichungen ersetzt. Diese Gleichungen löst man unter den gegebenen Randbedingungen auf, indem man die Bestimmung der Werte  $u(x_i, y_k)$  mit  $i = n + 1$  auf die der Werte mit  $i = n$  zurückführt. Deshalb liegt auch bei den Differenzenverfahren eine ungünstige Fehlerfortpflanzung im wandnahen Gebiet vor.

Da die « Unbestimmtheit » von (6) für  $y = 0$  keine Singularität des Problems (3) darstellt, ist es – etwa durch Reihenentwicklung von (6) an der Stelle  $y = 0$  – möglich, einen überall « bestimmten » Fortsetzungsausdruck anzugeben. Infolge der komplizierten Struktur der Differentialgleichung (3a) hat man jedoch bisher auf diese oder auf eine ähnliche Weise kein Fortsetzungsverfahren mit befriedigender Genauigkeit angeben können.

Es wird sich zeigen, dass die Lage der Linie der Unbestimmtheit von den vorgenommenen finiten Ersetzungen abhängt; das Gebiet einer ungünstigen Fehlerfortpflanzung kann also verschoben werden. Die bisher bekannten Approximationen, bei denen die Linie der Unbestimmtheit ausserhalb des Gebiets  $y \geq 0$  liegt, haben einen zu grossen systematischen Fehler<sup>1)</sup>. Bei den im Hinblick auf ein einfach zu handhabendes Verfahren von H. GÖRTLER eingeführten finiten Ersetzungen liegt die Linie der Unbestimmtheit im Innern  $y > 0$  des betrachteten Gebiets. Das ist für die praktische Rechnung – besonders in der Nähe der Ablösungsstelle – überaus ungünstig, da hierdurch die Fehlerfortpflanzung noch stärker wird. Es liegt deshalb nahe, die Approximationen so abzuändern, dass einerseits die Linie der Unbestimmtheit wieder nach  $y = 0$  zu liegen kommt, andererseits aber der systematische Fehler und der Arbeitsaufwand nicht vergrössert werden. Indem wir ferner die Approximation in Wandnähe möglichst genau vornehmen, tragen wir der Unbestimmtheit des neuen finiten Fortsetzungsausdrucks an der Wand Rechnung.

In § 4 sollen die für das Folgende wichtigsten Symbole eingeführt und die Haupteigenschaften des Verfahrens von H. GÖRTLER dargestellt werden.

#### § 4. Das Differenzenverfahren von H. Görtler

Zugrunde liegt ein Netz von Gitterpunkten  $(x_i, y_k)$  mit den Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 + i h, & (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; h > 0) \\ y_k &= k l & (k = 0, 1, 2, \dots; l > 0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Ein derartiger Fortsetzungsdruck wird zum Beispiel bei K. SCHRÖDER [2], Seite 456, angegeben; um die Genauigkeit der so ermittelten Werte zu erhöhen, sucht man diese Werte iterativ zu verbessern. Dieser Iterationsprozess konvergiert aber nach [9] gegen die nach H. GÖRTLER [1] errechneten Werte, so dass die Linie der Unbestimmtheit letztlich doch wieder in dem hierfür ungünstigen Bereich  $y > 0$  liegt.

und es wird zur Abkürzung

$$u_{i,k} = u(x_i, y_k) \quad (8)$$

gesetzt. Wir benutzen im folgenden die finiten Ersetzungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_k) = \frac{\Delta_{i,k}}{2h} \quad \text{mit } \Delta_{i,k} = u_{i+1,k} - u_{i-1,k}, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_k) = \frac{V_{i,k}}{2l} \quad (k \geq 1) \quad \text{mit } V_{i,k} = u_{i,k+1} - u_{i,k-1}, \quad (9b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k) = \frac{V_{i,k}^2}{4l^2} \quad (k \geq 2) \quad \text{mit } V_{i,k}^2 = V_{i,k+1} - V_{i,k-1}. \quad (9c)$$

Diese Approximation der Differentialquotienten durch Quotienten überspringender Differenzen ist im allgemeinen von grösserer Genauigkeit als die durch die üblichen Differenzenquotienten. Auch für

$$V_{i,1}^2 = 4l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_1) \quad (10a)$$

lässt sich in einfacher Weise ein Näherungswert angeben<sup>1)</sup>.

Im Anschluss an (9) definieren wir noch die Grössen

$$V_{i,0} = 2l \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, 0), \quad (10b)$$

$$V_{i,0}^2 = 4l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, 0) \quad \text{mit } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, 0) = -(u_0 u'_0)_i. \quad (10c)$$

Die Auswertung des Integrals

$$v_{i,k} = - \int_0^{y_k} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y) dy \quad (11)$$

erfolgt mit Hilfe der Trapezregel (Schrittweite  $l$ ) bei Benutzen von (9a):

$$v_{i,k} = - \left( \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\Delta_{i,r}}{2h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_{i,k}}{2h} \right) l. \quad (k \geq 1) \quad (12)$$

Damit lässt sich die Differentialgleichung (3a) in jedem Gitterpunkt  $(x_i, y_k)$  mit  $k \geq 1$  approximativ durch eine Gleichung zwischen Werten  $u_{i,z}$  ersetzen. Ist

$$u_{i,k} - \frac{1}{4} V_{i,k} \neq 0,$$

<sup>1)</sup> Vgl. H. GÖRTLER [1], Seite 175. Für das neue Differenzenverfahren werden wir in (18b) einen besseren Wert herleiten.

so kann man die Näherungsgleichung nach  $\Delta_{i,k}$  auflösen und erhält

$$\Delta_{i,k} = \frac{4h(u_0 u'_0)_i + \frac{h}{l^2} V_{i,k}^2 + V_{i,k} \sum_{r=1}^{k-1} \Delta_{i,r}}{2 \left( u_{i,k} - \frac{1}{4} V_{i,k} \right)}. \quad (k \geq 1) \quad (13)$$

Bei festem  $i = i_0$  und bekannten Werten  $u_{i_0,k}$  ( $k \geq 1$ ) lässt sich hiernach  $\Delta_{i_0,k}$  unter Benutzung von (3b) rekursiv für  $k = 1, 2, \dots$  ermitteln. Sind neben den Werten  $u_{i_0,k}$  noch die Grössen  $u_{i_0-1,k}$  ( $k \geq 1$ ) bekannt<sup>1)</sup>, so ergeben sich nach (9a) auch die Werte  $u_{i_0-1,k}$  ( $k \geq 1$ ). Jede derartige Auflösung von (13) bedeutet die Durchführung eines Fortsetzungsschritts.

Die nach (13) ermittelte Näherungslösung erfüllt auch die Randbedingung (3c). Man folgert nämlich<sup>2)</sup> aus (13)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{i,k} = 2h(u'_0)_i. \quad (14)$$

Es gilt also mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{i-1,k} = (u_0)_{i-1}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{i,k} = (u_0)_i$  auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{i-1,k} = (u_0)_{i-1}$ , falls im Rahmen der Rechengenauigkeit  $2h(u'_0)_i = (u_0)_{i+1} - (u_0)_{i-1}$  ist.

Das Auftreten des Summanden  $-V_{i,k}$  im Nenner von (13) zeigt, dass die Linie der Unbestimmtheit durch die finiten Approximationen in das Innere des Gebiets  $y \geq 0$  verschoben ist. Während der Nenner – als stetige Funktion in  $y$  aufgefasst – seine Nullstelle für  $x_i < x_A$  im allgemeinen im Intervall  $0 < y < l$  hat<sup>3)</sup>, gilt für  $x_i = x_A$

$$u_{A,1} - \frac{1}{4} V_{A,1} \approx 0.$$

Entsprechendes lässt sich über die Nullstelle des Zählers aussagen. Die Linie der Unbestimmtheit liegt also für  $x \lesssim x_A$  in der Nachbarschaft der Ge-

<sup>1)</sup> Als Anfangsbedingung verlangt dieses Näherungsverfahren also die Kenntnis zweier benachbarter Geschwindigkeitsprofile; nach den Ausführungen der §§ 2 und 3 war zu erwarten, dass nur eine solche Anfangsbedingung benötigt wird. Wir werden hierauf in § 6 kurz zurückkommen.

<sup>2)</sup> Man hat zu zeigen, dass (3c) für  $x = x_{i+1}$  erfüllt ist, falls dieses für  $x \leq x_i$  der Fall ist. Nun folgt aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{i,k} = (u_0)_i$  die Existenz einer ganzen Zahl  $M_i$  derart, dass für alle  $m \geq M_i$  im Rahmen der Rechengenauigkeit die Gleichungen  $u_{i,m} = (u_0)_i$  und somit  $V_{i,m+1} = 0$  und  $V_{i,m+2}^2 = 0$  gelten. Andererseits ist für jedes solche  $m$   $\sum_{r=1}^{m-1} \Delta_{i,r}$  endlich, also  $V_{i,m+2} \sum_{r=1}^{m-1} \Delta_{i,r} = 0$ . Damit gilt  $\Delta_{i,m+2} = 2h(u'_0)_i$  für  $m \geq M_i$ , das heisst (14).

<sup>3)</sup> Für  $x_i < x_A$  ist  $V_{i,0} > 0$  und somit  $u_{i,0} - V_{i,0}/4 < 0$ ; andererseits gilt

$$u_{i,1} - \frac{1}{4} V_{i,1} \approx u(x_i, l) - \frac{l}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, l) \approx u\left(x_i, \frac{l}{2}\right) > 0.$$

Dagegen ist für  $x_i = x_A$  nach (5):

$$u(x_A, y) = \frac{a_2}{2} y^2 + \frac{a_6}{6!} y^6, \quad \text{das heisst} \quad u_{A,1} - \frac{1}{4} V_{A,1} = 0(l^6).$$

raden  $y = l$ . Dieses erklärt die Tatsache, dass die numerische Ermittlung der wandnahen Werte  $u_{i,1}$  und auch  $u_{i,2}$  unbefriedigender verläuft als die der andern; das macht sich besonders in der Nähe der Ablösungsstelle bemerkbar.

Die Verschiebung der Linie der Unbestimmtheit wird hier durch die Auswertung (12) des Integrals (11) verursacht. Es soll deshalb in § 6 eine andere Approximation des Integrals vorgenommen werden, bei der das vermieden wird. Zuvor werden in § 5 geeignete Approximationen von  $V_{i,0}$  und  $V_{i,1}^2$  hergeleitet. Einer besonders genauen Bestimmung dieser beiden Grössen kommt grosse Bedeutung zu, da einerseits  $V_{i,0}$  im neuen Differenzenverfahren eine zentrale Stellung einnehmen wird, andererseits sich Fehler bei der Approximation von  $V_{i,1}^2$  infolge der ungünstigen Fehlerfortpflanzung in Wandnähe stark auswirken.

### § 5. Finite Ausdrücke zur Bestimmung von $V_{i,0}$ und $V_{i,1}^2$

Zur Ermittlung von Näherungswerten der Grössen  $V_{i,0}$  und  $V_{i,1}^2$  approximieren wir die Geschwindigkeitsverteilung  $u(x_i, y)$  im wandnahen Gebiet durch ein Polynom  $\hat{u}_i(y)$ , das der Randbedingung (3b) sowie den ersten beiden Grenzschichtbindungen (5) genügt:

$$\hat{u}_i(y) = b_0 y + \frac{V_{i,0}^2}{8 l^2} y^2 + \sum_{s=3}^k \frac{b_s}{s!} y^s. \quad (15)$$

Die noch freien Koeffizienten  $b_0, b_1, \dots, b_k$  legen wir derart fest, dass die Werte  $\hat{u}_i(y_r)$  ( $r = 1, \dots, n$ ) die vorgegebenen Werte  $u_{i,r}$  ( $r = 1, \dots, n$ ) – in einer noch näher festzulegenden Weise – approximieren. Dann wird auch eine befriedigende Übereinstimmung in den Ableitungen der Funktionen  $u(x_i, y)$  und  $\hat{u}_i(y)$  für kleine Werte von  $y$  vorliegen, so dass wir setzen können

$$V_{i,0} = 2 l \left. \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (16a)$$

$$V_{i,1}^2 = 4 l^2 \left. \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial y^2} \right|_{y=l}. \quad (16b)$$

Wir haben im folgenden  $k = 5$  und  $n = 5$  gewählt; es hat sich nämlich gezeigt, dass bei der für die praktischen Genauigkeitsbedürfnisse ausreichenden Festlegung eines Profils durch rund 15 Punkte dann die genaueste Bestimmung von  $V_{i,0}$  und  $V_{i,1}^2$  möglich ist.

Fordert man, dass die Koeffizienten  $b_0, b_4$  und  $b_5$  festlegenden Beziehungen zwischen den Werten  $\hat{u}_i(y_r)$  und  $u_{i,r}$  linear sind, so folgt aus (15) und (16)

$$V_{i,0} = A_0 V_{i,0}^2 + \sum_{r=1}^5 A_r u_{i,r}, \quad (17a)$$

$$V_{i,1}^2 = B_0 V_{i,0}^2 + \sum_{r=1}^5 B_r u_{i,r}. \quad (17b)$$

Die Koeffizienten  $A_r$  und  $B_r$  ( $r = 0, 1, \dots, 5$ ) sind von der Schrittweite unabhängig. Die Linearität von (17a) wird sich in § 6 bei der Entwicklung des verbesserten Differenzenverfahrens als sehr vorteilhaft erweisen.

Zur Festlegung der Koeffizienten  $A_r$  und  $B_r$  fordern wir einerseits, dass die nach (17) für Potenzen 1., 2., 4. und 5. Grades<sup>1)</sup> von  $y$  ermittelten Werte mit den aus (10) resultierenden übereinstimmen. Andererseits soll – der ungünstigen Fehlerfortpflanzung im wandnahen Gebiet wegen – der Einfluss von  $u_{i,1}$  und  $u_{i,2}$  in (17) ausgeschaltet werden. Eine einfache Rechnung liefert dann<sup>2)</sup>

$$V_{i,0} = -0,47347 V_{i,0}^2 + 1,79091 u_{i,3} - 1,13331 u_{i,4} + 0,23210 u_{i,5}, \quad (18a)$$

$$V_{i,1}^2 = 0,68972 V_{i,0}^2 - 1,43631 u_{i,3} + 1,53392 u_{i,4} - 0,36535 u_{i,5}. \quad (18b)$$

Diese Formeln haben sich bei unseren Anwendungen sehr bewährt.

## § 6. Entwicklung des verbesserten Differenzenverfahrens

Am Schluss von § 4 ergab sich die Notwendigkeit einer Approximation von (11), die keine Verschiebung der Linie der Unbestimmtheit in das Innere des betrachteten Gebiets nach sich zieht. Zu diesem Zweck ersetzen wir die Funktion  $u(x_i, y)$  in Wandnähe durch ihr Taylor-Polynom 3. Grades

$$u_i(y) = \frac{V_{i,0}}{2l} y + \frac{V_{i,0}^2}{8l^2} y^2. \quad (19)$$

Führt man die Differentiation  $\partial u / \partial x$  – gemäss (9a) – und die anschliessende Integration gliedweise durch, so ergibt sich unter Benutzung der bei dem Fortsetzungsschritt bekannten Grösse

$$L_{i,k} = V_{i-1,0} + \frac{k}{6} (V_{i-1,0}^2 - V_{i-1,0}), \quad (20)$$

$$v_{i,k} = - \int_0^{yk} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y) dy = -(V_{i-1,0} - L_{i,k}) \frac{k^2 l}{8h}. \quad (21)$$

Da die Approximation (19) nur in Wandnähe gültig ist, benutzen wir die Quadraturformel nur für  $k = 1$  und  $k = 2$ ; für  $k \geq 3$  dagegen verwenden wir weiterhin (12). Ersetzt man die Differentialquotienten wieder durch die Quotienten überspringender Differenzen (9), so ergeben sich aus (3a) die finite

<sup>1)</sup> Die Potenzen 0. und 3. Grades werden wegen (3b) und (5) nicht berücksichtigt.

<sup>2)</sup> Koeffizientenvergleich bei den genannten Potenzen in der Reihenentwicklung von (17a) bzw. (17b) an der Stelle  $y = 0$  führt auf je vier lineare Gleichungen für die sechs Unbekannten  $A_r$  bzw.  $B_r$ .  $A_1 = A_2 = 0$  bzw.  $B_1 = B_2 = 0$  liefert dann (18).

Gleichungen

$$\Delta_{i,k} = \frac{1}{2 u_{i,k}} \left\{ (V_{i+1,0} - L_{i,k}) V_{i,k} \frac{k^2}{4} + 4 h (u_0 u'_0)_i + \frac{h}{l^2} V_{i,k}^2 \right\}, \quad (k = 1, 2) \quad (22a)$$

$$\Delta_{i,k} = \frac{1}{2 (u_{i,k} - V_{i,k}/4)} \left\{ V_{i,k} \sum_{r=1}^{k-1} \Delta_{i,r} + 4 h (u_0 u'_0)_i + \frac{h}{l^2} V_{i,k}^2 \right\}. \quad (k \geq 3) \quad (22b)$$

Die in (13) auftretende Verkleinerung von Zähler und Nenner, die sich besonders bei der Berechnung von  $L_{i,1}$  und  $L_{i,2}$  unangenehm auswirkte, ist in (22) für diese beiden Werte vermieden. Andererseits hängt  $\Delta_{i,k}$  für  $k \geq 3$  von den Grössen  $L_{i,1}$  und  $L_{i,2}$  ab; hierdurch besteht, wie die Durchrechnung der Anwendungsbeispiele gezeigt hat, eine ausreichende Bindung zwischen den nach verschiedenen Vorschriften berechneten Werten  $\Delta_{i,k}$  mit  $k = 1, 2$  und  $\Delta_{i,k}$  mit  $k \geq 3$ .

Aus (22) lassen sich die Grössen  $L_{i,k}$  und damit  $u_{i-1,k}$  mit festem  $i$  berechnen, falls neben den Werten  $u_{i-1,k}$  und  $u_{i,k}$  (jeweils  $k \geq 1$ ) auch die Grösse  $V_{i+1,0}$  bekannt ist. Dieses ist aber zunächst nicht der Fall; nach (17a) ergibt sich  $V_{i+1,0}$  erst aus den Werten  $u_{i+1,k}$  gemäss

$$V_{i+1,0} = A_0 V_{i+1,0}^2 + \sum_{r=1}^5 A_r u_{i+1,r}. \quad (23)$$

Diese weitere Beziehung zwischen den unbekannten  $u_{i-1,k}$  und  $V_{i+1,0}$  neben den Gleichungen (22) ermöglicht nun, den durch den Fortsetzungsprozess festgelegten Wert  $V_{i+1,0}$  im voraus zu berechnen.

Es bestehen zwischen den sechs Grössen  $V_{i+1,0}$ ,  $\Delta_{i,1}$ , ...,  $\Delta_{i,5}$  sechs lineare Beziehungen: Die Gleichungen (23) sowie (22) für  $k = 1, \dots, 5$ . Ersetzen wir in (23)  $u_{i+1,k}$  durch  $\Delta_{i,k}$  gemäss (9a), so ergibt sich mit der Hilfsgrösse

$$K_i = A_0 (V_{i+1,0}^2 - V_{i-1,0}^2) + V_{i-1,0}, \quad (24)$$

$$V_{i+1,0} = K_i + \sum_{r=1}^5 A_r \Delta_{i,r}. \quad (25)$$

Die Gleichungen (22) sind offenbar von der Form

$$\Delta_{i,k} = P_{i,k} V_{i+1,0} + Q_{i,k}, \quad (26)$$

wobei die Grössen  $P_{i,k}$  und  $Q_{i,k}$ , wie auch schon  $K_i$ , durch die Daten des  $(i-1)$ -ten und  $i$ -ten Profils festgelegt sind. Durch Einsetzen von (26) in (25) und Verwenden der Abkürzungen

$$S_i = \sum_{r=1}^5 A_r P_{i,r}, \quad T_i = K_i + \sum_{r=1}^5 A_r Q_{i,r}, \quad (27)$$



erhält man für  $V_{i+1,0}$  die lineare Gleichung

$$V_{i+1,0} = S_i V_{i+1,0} + T_i. \quad (28a)$$

Aus dieser ergibt sich  $V_{i+1,0}$ , falls  $S_i \neq 1$  ist, zu

$$V_{i+1,0} = \frac{T_i}{1 - S_i}. \quad (28b)$$

Die Berechnung von  $P_{i,r}$  und  $Q_{i,r}$  und damit die von  $S_i$  und  $T_i$  ist sehr unständig; deshalb soll  $V_{i+1,0}$  anderweitig, und zwar mit Hilfe des Iterationsprozesses

$$J_{i,r}^{(s)} = P_{i,r} V_{i+1,0}^{(s)} + Q_{i,r}, \quad (29a)$$

$$\Gamma_{i+1,0}^{(s-1)} = K_i + \sum_{r=1}^5 A_r J_{i,r}^{(s)} \quad (29b)$$

ermittelt werden. Zur numerischen Durchführung dieser Iterationen benötigt man die Grössen  $P_{i,r}$  und  $Q_{i,r}$  nicht, da (26) nur eine das Wesentliche betonnende Schreibweise von (22) war. Um die Konvergenz von (29b) bei beliebigen  $\Gamma_{i+1,0}^{(0)}$  zu untersuchen, setzen wir (29a) in (29b) ein und erhalten

$$\Gamma_{i+1,0}^{(s-1)} = S_i V_{i+1,0}^{(s)} + T_i. \quad (30)$$

Für Zahlenfolgen mit diesem rekursiven Bildungsgesetz gilt, falls  $S_i \neq 1$  ist

$$V_{i+1,0}^{(s)} = \frac{T_i}{1 - S_i} + S_i^s \left( V_{i+1,0}^{(0)} - \frac{T_i}{1 - S_i} \right). \quad (31)$$

Somit konvergiert die Folge  $\Gamma_{i+1,0}^{(s)}$  für  $|S_i| < 1$ ; der Grenzwert ist dann unabhängig vom Ausgangswert  $V_{i+1,0}^{(0)}$ , und zwar gleich der Lösung (28b) von (28a). Umgekehrt ist auch Konvergenz von (30) nur gegen diesen Wert möglich. Aus drei aufeinanderfolgenden Werten

$$\Gamma_{i+1,0}^{(s-1)}, \quad \Gamma_{i+1,0}^{(s)} \quad \text{und} \quad \Gamma_{i+1,0}^{(s+1)}$$

ergibt sich nach (30)

$$S_i = \frac{\Gamma_{i+1,0}^{(s+1)} - \Gamma_{i+1,0}^{(s)}}{\Gamma_{i+1,0}^{(s)} - \Gamma_{i+1,0}^{(s-1)}}. \quad (32)$$

Konvergenz der Folge  $\Gamma_{i+1,0}^{(s)}$  gegen die Lösung (28b) von (28a) ist also gesichert, falls die Differenz aufeinanderfolgender Werte dem Betrage nach abnimmt. (32) zeigt ferner, dass für  $S_i > 0$  die Folge (30) monoton ist.

Vermutlich gilt für  $x_0 \leq x_i < x_A$

$$0 < S_i < 1. \quad (33)$$

Dieses war in allen durchgerechneten Anwendungsbeispielen der Fall. Ein Beweis der Gültigkeit von (33) konnte jedoch bisher nicht erbracht werden<sup>1</sup>. In folgenden wird (33) als gültig angenommen.

Da die Folge (30) unabhängig vom Ausgangswert konvergiert, können im Verlaufe des Iterationsprozesses zur Konvergenzbeschleunigung die errechneten Näherungswerte  $V_{i-1,0}^{(s-1)}$  abgeändert werden:

$$V_{i-1,0}^{(s-1)*} = V_{i-1,0}^{(s-1)} + \sigma_i (V_{i-1,0}^{(s-1)} - V_{i-1,0}^{(s)}). \quad (34a)$$

Ein Hinweis über die Wahl von  $\sigma_i$  liefert die aus (28b) und (30) folgende Beziehung

$$V_{i-1,0} = V_{i-1,0}^{(s-1)} + \frac{S_i}{1 - S_i} (V_{i-1,0}^{(s-1)} - V_{i-1,0}^{(s)}). \quad (34b)$$

, ist also von  $s$  unabhängig wählbar. Zwar ist  $S_i = (1 - S_i)$  nicht bekannt; wegen

$$1 - \frac{S_i}{S_i} \approx \frac{S_{i-1}}{1 - S_{i-1}}$$

können wir aber  $\sigma_i$  den Konvergenzverhältnissen des vorhergehenden Fortsetzungsschritts entsprechend wählen. Mit einiger Übung wird man den Grenzwert nach zwei, spätestens drei Schritten innerhalb der Rechengenauigkeit ermittelt haben.

Aus den Gleichungen (22) und (18) lässt sich bei vorgegebenem  $u_0(x)$  die Geschwindigkeitsverteilung  $u(x, y)$  angenähert berechnen, falls zwei Anfangsprofile  $u_{i-1,k}$  und  $u_{i,k}$  vorgegeben sind. Nach den Ausführungen der §§ 2 und 3 war zu erwarten, dass nur ein solches benötigt wird. Die vorliegende Erhöhung

<sup>1</sup>) Nur für hinreichend kleines  $l$  liess sich bisher eine Aussage machen. Dann kann (19) in  $0 \leq y \leq 5l$  als gültig angesehen und somit (22a) für  $k=1, \dots, 5$  verwendet werden. Nach (22a) und (26) ist

$$P_{i,k} = \frac{V_{i,k}}{2 u_{i,k}} \cdot \frac{k^2}{4}.$$

Durch Entwicklung von  $S_i = \sum_{r=1}^5 A_r P_{i,r}$  nach Potenzen von  $l$  ergibt sich für  $a_1 \neq 0$

$$S_i = \frac{1}{2} - A_0 l \frac{a_2}{a_1} + O(l^2),$$

oder  $a_1 = 0$

$$S_i = 1 + O(l^4).$$

Es zeigt sich jedoch, dass die wahren Werte von  $S_i$  – besonders infolge der speziellen Wahl der  $A_r$  (18a) – wesentlich kleiner sind, als es die ersten Reihenglieder

$$\frac{1}{2} - A_0 l \frac{a_2}{a_1} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{V_{i,0}^2}{V_{i,0}} \quad \text{bzw.} \quad 1$$

vernachlässigen lassen; somit treten auch in der Nähe der Ablösungsstelle keine Konvergenzschwierigkeiten auf.

liegt nun nicht daran, dass überhaupt finite Näherungen vorgenommen wurden, sondern daran, wie dieses geschehen ist; denn sie wird vermieden, wenn man den Differentialquotienten 1. Ordnung  $\partial u / \partial x (x_i, y_k)$  durch den Differentialquotienten 1. Ordnung  $(u_{i+1,k} - u_{i,k})/h$  und nicht gemäss (9a) durch den Differentialquotienten 2. Ordnung  $(u_{i+1,k} - u_{i-1,k})/2h$  ersetzt.

Die Approximation (9a) wurde aus Genauigkeitsgründen vorgenommen, sie birgt jedoch – das haben die praktischen Anwendungen sowohl unseres Differenzenverfahrens als auch derjenigen von H. GÖRTLER [1] und K. SCHRÖDER [2] gezeigt – in sich die Gefahr des Auftretens einer speziellen Streuungserrscheinung: Es zeigt sich nämlich, dass die beiden Folgen errechneter Werte  $u_{-1,k}, u_{1,k}, u_{3,k}, \dots$  und  $u_{0,k}, u_{2,k}, u_{4,k}, \dots$  bei festem  $k$  für sich einen glatten Verlauf haben, sich jedoch mit wachsendem erstem Index mehr und mehr voneinander entfernen. Diese «Aufspaltung der Lösung» lässt sich, wie wir in [9] gezeigt haben, durch die Fortpflanzung von Fehlern in Strömungsrichtung erklären und durch eine geeignete Glättung beheben. Wir kommen hierauf in § 7 zurück.

## § 7. Die Praxis des Differenzenverfahrens

Zur praktischen Anwendung des verbesserten Differenzenverfahrens wird man zweckmässigerweise noch die folgenden Abkürzungen einführen:

$$N_{i,k} = \begin{cases} 2 u_{i,k}, & (k = 1, 2) \\ 2 \left( u_{i,k} - \frac{1}{4} V_{i,k} \right); & (k \geq 3) \end{cases} \quad (35a)$$

$$Z_{i,k} = 4 h (u_0 u_0)_i + \frac{h}{l^2} V_{i,k}^2 = \frac{h}{l^2} (V_{i,k}^2 - V_{i,0}^2); \quad (k \geq 1) \quad (35b)$$

$$S_{i,k} = \sum_{r=1}^{k-1} A_{i,r}. \quad (k \geq 3) \quad (35c)$$

Dann haben die Gleichungen (22) die übersichtliche Gestalt

$$A_{i,1} = \frac{1}{N_{i,1}} \left\{ (V_{i-1,0} - L_{i,1}) \frac{\Gamma_{i,1}}{4} + Z_{i,1} \right\}, \quad (36a)$$

$$A_{i,2} = \frac{1}{N_{i,2}} \{ V_{i+1,0} - L_{i,2} \} V_{i,2} + Z_{i,2}, \quad (36b)$$

$$A_{i,k} = \frac{1}{N_{i,k}} \{ S_{i,k} V_{i,k} + Z_{i,k} \}. \quad (k \geq 3) \quad (36c)$$

Sind zwei Anfangsverteilungen  $u_{-1,k}$  und  $u_{0,k}$  vorgegeben, so lässt sich das System (36) nacheinander für  $i = 0, 1, \dots$  unter Benutzung der Randbedingung (3b) auflösen. Nach (14) genügt die so berechnete Näherungslösung auch der

Randbedingung (3c). Jede Auflösung des Systems (36) stellt die Ausführung eines Fortsetzungsschritts dar. Die numerische Durchführung einschliesslich der iterativen Bestimmung von  $\Gamma_{i-1,0}$  erfolgt an Hand eines Rechenschemas (vgl. das Beispiel in Tabelle 1).

Die ersten zwei Spalten enthalten die Werte der beiden Ausgangsprofile  $u_{i-1,k}$  und  $u_{i,k}$ . Die nächsten fünf Spalten dienen der Berechnung der in (36) eingehenden Hilfsgrössen  $\Gamma_{i,k}$ ,  $\Gamma_{i,k}^2$ ,  $\Gamma_{i,k} + N_{i,k}$  und  $Z_{i,k}$ . Um diese Spalten auszufüllen, bildet man zunächst aus den vorgegebenen Werten  $u_{i,k}$  die überspringenden Differenzen 1. und 2. Ordnung:  $\Gamma_{i,k}$  mit  $k \geq 1$  und  $\Gamma_{i,k}^2$  mit  $k \geq 2$  und die Grössen

$$\Gamma_{i,0}^2 = -4 l^2 (u_0 u'_0)_i, \quad (10c)$$

$$\Gamma_{i,0} = -0,47347 \Gamma_{i,0}^2 + 1,79091 u_{i,3} - 1,13331 u_{i,4} + 0,23210 u_{i,5}, \quad (18a)$$

$$\Gamma_{i,1}^2 = 0,68972 \Gamma_{i,0}^2 - 1,43631 u_{i,3} + 1,53392 u_{i,4} - 0,36535 u_{i,5}. \quad (18b)$$

Aus diesen ergeben sich  $\Gamma_{i,k} + (k-1, k \geq 3)$  und gemäss (35a) und (35b) die Werte  $N_{i,k}$  und  $Z_{i,k}$ . Ferner berechnet man nach (24) mit Hilfe von (18a) bzw. nach (21) die Grössen  $K_i$ ,  $L_{i,1}$  und  $L_{i,2}$ :

$$K_i = \Gamma_{i-1,0} - 0,47347 (\Gamma_{i+1,0}^2 - \Gamma_{i-1,0}^2), \quad (24)$$

$$L_{i,1} = \Gamma_{i-1,0} - 0,16667 (\Gamma_{i+1,0}^2 - \Gamma_{i-1,0}^2), \quad (20)$$

$$L_{i,2} = \Gamma_{i-1,0} - 0,33333 (\Gamma_{i+1,0}^2 - \Gamma_{i-1,0}^2) \quad (20)$$

und vermerkt die Ergebnisse am Kopf des Rechenblatts.

Nach diesen Vorbereitungen erfolgt die iterative Ermittlung von  $\Gamma_{i+1,0}$ . Hierfür ist die 3. Spaltengruppe vorgesehen, deren Elemente nicht vollständig den  $k$ -Werten zeilenweise entsprechen. Die Iterationsvorschrift (29) lautet in der Terminologie dieses Paragraphen

$$\Delta_{i,1}^{(s)} = \frac{1}{N_{i,1}} \left\{ (\Gamma_{i+1,0}^{(s)} - L_{i,1}) \frac{\Gamma_{i,1}}{4} + Z_{i,1} \right\}, \quad (37a)$$

$$\Delta_{i,2}^{(s)} = \frac{1}{N_{i,2}} \left\{ (\Gamma_{i+1,0}^{(s)} - L_{i,2}) \Gamma_{i,2} + Z_{i,2} \right\}, \quad (37b)$$

$$\Delta_{i,k}^{(s)} = \frac{1}{N_{i,k}} \left\{ S_{i,k}^{(s)} \Gamma_{i,k} + Z_{i,k} \right\}, \quad (k = 3, 4, 5) \quad (37c)$$

$$\text{mit} \quad S_{i,k}^{(s)} = \sum_{r=1}^{k-1} \Delta_{i,r}^{(s)}; \quad (k = 3, 4, 5)$$

$$\Gamma_{i+1,0}^{(s+1)} = K_i + 1,79091 \Delta_{i,3}^{(s)} - 1,13331 \Delta_{i,4}^{(s)} + 0,23210 \Delta_{i,5}^{(s)}. \quad (37d)$$

Die Konvergenz lässt sich durch Abänderungen der errechneten Werte  $V_{i+1}^{(s+1)}$

$$V_{i+1,0}^{(s+1)*} = V_{i+1,0}^{(s+1)} + \sigma_i (V_{i+1,0}^{(s+1)} - V_{i+1,0}^{(s)}) \quad (34a)$$

mit  $\sigma_i \approx \sigma_{i-1}$  beschleunigen. Ausgehend von einem geeigneten Näherungswert  $V_{i-1,0}^{(0)} = 1,5457$  ergibt sich nach (37) eine neue Näherung  $V_{i-1,0}^{(1)} = 1,5501$ . Dabei lassen sich die Grössen  $V_{i,1}^{(0)}, V_{i,2}^{(0)}$  in einem Arbeitsgang auf der Rechenmaschine gewinnen; dasselbe ist der Fall für  $V_{i,k}^{(0)}$  ( $k = 3, 4, 5$ ), falls zuvor die Grössen  $S_{i,k}^{(0)}$  ( $k = 3, 4, 5$ ) ermittelt ist. Es werden somit zwei Spalten benötigt, in denen die Werte  $S_{i,k}^{(0)}$  und  $V_{i,k}^{(0)}$  Aufnahme finden. Da eine Änderung von  $V_{i-1,0}^{(1)}$  gegenüber  $V_{i-1,0}^{(0)}$  vorlag, haben wir den errechneten Wert  $V_{i,1,0}^{(1)}$  gemäss (34a) korrigiert. Aus  $V_{i-1,0}^{(1)*} = 1,5516$  ergibt sich nach (37) eine neue Näherung

$$V_{i-1,0}^{(2)} = 1,5514.$$

Um das Rechenblatt besser auszunutzen, haben wir die Werte des zweiten Iterationsschrittes unter denen des ersten angeordnet. Im betrachteten Beispiel wurde  $V_{i-1,0}^{(2)}$  nochmals abgeändert und ein weiterer Iterationsschritt durchgeführt. Mit Vorteil wird man auch die Werte  $V_{i-1,0}^{(s-1)}$  und  $V_{i-1,0}^{(s)*}$  auf dem Rechenblatt vermerken; das kann in der Spalte der Grösse  $S_{i,k}^{(s)}$  geschehen, da dies für  $k = 0, 1, 2$  nicht definiert ist.

Die 4. Spaltengruppe dient der eigentlichen Berechnung der Grösse  $V_{i,k}$  nach (36). Wieder sind zwei Spalten erforderlich, je eine für die Grössen  $S_{i,k}$  und  $V_{i,k}$ . Sie sind wie die der 3. Gruppe zeilenweise auszufüllen; das soll heissen, dass man nach  $\Delta_{i,k}$  ( $k \geq 2$ ) zunächst  $S_{i,k+1} = S_{i,k} + \Delta_{i,k}$  zu berechnen hat. Erst dann lässt sich  $\Delta_{i,k+1}$  ermitteln<sup>2)</sup>.

Die letzte Spalte des Schemas nimmt die Werte  $u_{i+1,k} = u_{i-1,k} + \Delta_{i,k}$  auf. Dabei zeigt sich gegebenenfalls die Notwendigkeit, dem Schema nach unten eine Zeile anzufügen; das ist dann erforderlich, wenn der Anschluss an die äussere Geschwindigkeitsverteilung ( $u_0$ ) <sub>$i+1$</sub>  noch nicht hergestellt ist.

Jeweils nach etwa vier Schritten wird man eine Glättung der errechneten Profile durchführen, um keinen Genauigkeitsverlust durch die in § 6 erwähnte Aufspaltung der Lösung zu erleiden. Das kann nach [9] auf folgende Weise geschehen: Man bildet aus den errechneten Werten  $\Delta_{i,k}$  die Grössen

$$\delta_{i,k}^* = \frac{1}{4} (\Delta_{i,k} + \Delta_{i+1,k}) \quad (38)$$

und trägt sie bei festem  $k$  über  $i$  auf. Es zeigt sich dabei, dass die Aufspaltung

<sup>1)</sup> Diesen kann man einschätzen oder wie im Beispiel der Tabelle 1 durch lineare Extrapolation aus den Werten  $V_{i-1,0}$  und  $V_{i,0}$  gewinnen. – Hier und im folgenden geben wir des leichteren Verständnisses wegen die Zahlenwerte des in Tabelle 1 betrachteten Beispiels mit an.

<sup>2)</sup> Die Werte der fünf ersten Zeilen der 4. Gruppe kann man unmittelbar vom letzten Iterationsschritt übernehmen.

Tabelle 1: *Beispiel eines Rechenschemas*  
7. Rechenblatt, Beispiel 2, § 8:  $V_{5,0} = 1,8397_2$ ,  $K_6 = 1,7291_3$ ,  $L_{6,1} = 1,8008_9$ ,  $L_{6,2} = 1,7619_8$

$k$	$u_{5,k}$	$u_{6,k}$	$\bar{\Gamma}_{6,k}$	$\Gamma_{6,k}^2$	$\frac{1}{4} \Gamma_{6,k}$	$N_{6,k}$	$Z_{6,k}$	$S_{6,k}^{(s)}$	$A_{6,k}^{(s)}$	$S_{6,k}$	$A_{6,k}$	$u_{7,k}$
0												
1	0	0	1,6927 <sup>9</sup>	-0,2185 <sub>4</sub>	0,3907 <sub>5</sub>	1,6350	-0,08458	1,5457	-0,1127		-0,1114	0,7689
2	0,8803	0,8175	1,5630	-0,2566		3,1260	0,2390 <sub>3</sub>		0,1747		-0,1722	1,4889
3	1,6611	1,5630	1,4213	-0,3261		3,8592	-0,4390 <sub>7</sub>	-0,2874	-0,2060	-0,2836	0,2048	2,1326
4	2,3374	2,2388	1,2369	-0,4163	0,3092	3,8592	-0,3294 <sub>7</sub>	-0,4934	0,2012	0,4884	0,2002	2,6870
5	2,8872	2,7999	1,0050	-0,4568	0,2512 <sub>5</sub>	5,0973	-0,4601 <sub>4</sub>	-0,6946	-0,1643	-0,6886	-0,1636	3,1513
6	3,3149	3,2438	0,7801	-0,4256	0,1950	6,0976	-0,3370 <sub>3</sub>	1,5501		-0,8522	-0,1209	3,5093
7	3,6302	3,5800	0,5794	-0,3702	0,1448 <sub>5</sub>	6,8703	-0,1894 <sub>7</sub>	1,5516	-0,1113	-0,9731	-0,0791	3,7723
8	3,8514	3,8232	0,4099	-0,3038	0,1025	7,4414	-0,0316 <sub>9</sub>		-0,1721	-1,0522	-0,0410	3,9582
9	3,9992	3,9899	0,2756	-0,2328	0,0689	7,8420	+0,1149 <sub>7</sub>	-0,2834	-0,2047	-1,0932	-0,0097	4,0836
10	4,0933	4,0988	0,1771	-0,1668	0,0443	8,1090	+0,2343 <sub>1</sub>	-0,4881	-0,2001	-1,1029	+0,0138	4,1643
11	4,1505	4,1670	0,1088	-0,1131	0,0272	8,2796	+0,3238 <sub>6</sub>	-0,6882	-0,1635	-1,0891	+0,0303	4,2137
12	4,1834	4,2076	0,0640	-0,0728	0,0160	8,3832	+0,3865 <sub>3</sub>	1,5514		-1,0588	+0,0413	4,2432
13	4,2019	4,2310	0,0360	-0,0446	0,0090	8,4440	+0,4278 <sub>6</sub>	1,5513	-0,1114	-1,0175	+0,0481	4,2595
14	4,2114	4,2436	0,0194	-0,0260	0,0048 <sub>5</sub>	8,4775	+0,4532 <sub>0</sub>		-0,1722	-0,9694	+0,0522	4,2686
15	4,2164	4,2504	0,0100	-0,0146	0,0025	8,4958	+0,4692 <sub>0</sub>	-0,2836	-0,2048	-0,9172	+0,0547	4,2733
16	4,2186	4,2536	0,0048	-0,0074	0,0012	8,5048	+0,4778 <sub>6</sub>	-0,4884	-0,2002	-0,8625	+0,0559	4,2756
17	4,2197	4,2552	0,0026	-0,0035	0,0006 <sub>5</sub>	8,5091	+0,4805 <sub>3</sub>	-0,6886	-0,1636	-0,8066	+0,0563	4,2766
18	4,2203	4,2562	0,0013	-0,0023	0,0003	8,5118	+0,4827 <sub>5</sub>	1,5513 <sup>7</sup>		-0,7503	+0,0567	4,2772
19	4,2205	4,2565	0,0003	-0,0013	0,0001	8,5128	+0,4849 <sub>7</sub>			-0,6936	+0,0570	4,2775
20	4,2205	4,2565	0,0000	-0,0003	0,0000	8,5130	+0,4856 <sub>4</sub>			-0,6366	+0,0570	4,2775



weitgehend behoben ist. Noch vorhandene Streuungen der einzelnen Werte lassen sich nun einfach graphisch glätten. Die so ermittelten Werte<sup>1)</sup>  $u_{i,k}$  werden im allgemeinen auch bezüglich ihrer Abhängigkeit vom Index  $k$  keine Streuungen mehr haben. Das kann man durch Auftragen der Grössen

$$d_{i,k} = u_{i,k+1} - u_{i,k}$$

bei festem  $i$  über  $k$  oder durch Bildung des Differenzenschemas dieser Werte in bezug auf den zweiten Index überprüfen.

Die Wahl der Schrittweiten  $h$  und  $l$  hängt von der geforderten Genauigkeit ab. Da eine Fehlerabschätzung bisher nicht durchgeführt werden konnte, lassen sich nur schwer allgemeingültige Aussagen machen. Bei einer geforderten Genauigkeit von 1% wählt man  $l$  etwa so, dass 15 Punkte die Anfangsprofile  $u_{-1,k}$  und  $u_{0,k}$  festlegen; um einen Rechenschritt durchzuführen, benötigt man dann zirka 70 min. Zweckmässigerweise wird dieser Wert  $l$  im Laufe der Rechnung festgehalten.

Dagegen muss man die Wahl von  $h$  der Änderung der Geschwindigkeitsverteilung  $u(x, y)$  bei wachsendem  $x$  anpassen; insbesondere hat man  $h$  in der Nähe der Ablösungsstelle kleiner als sonst zu wählen. Eine zu grosse Schrittweite macht sich auch in Unregelmässigkeiten der Folgen  $\dots, u_{i-1,k}, u_{i,k}$  mit festem  $k$  bemerkbar; während die Aufspaltung bei normaler Wahl von  $h$  nach vorgenommener Glättung erst langsam wieder auftritt, bewirkt eine zu grosse Schrittweite, dass gleich der erste neu berechnete Wert  $u_{i+1,k}$  mit dem bisherigen (geglätteten) Verlauf  $\dots, u_{i-1,k}, u_{i,k}$  nicht in Einklang ist.

Bei Schrittweitenverkleinerung ist ein neues zweites Ausgangsprofil erforderlich. Soll etwa an der Stelle  $x = x_i$  die Schrittweite  $h$  durch  $h_1$  ersetzt werden, so kann durch quadratische Interpolation das benötigte Profil an der Stelle

$$x = x_i - h_1 - x_{i-1}$$

aus den (geglätteten) Profilen für

$$x = x_i - 2h = x_{i-2}, \quad x = x_i - h = x_{i-1} \quad \text{und} \quad x = x_i$$

gewonnen werden. Für  $h_1 = h/2$  ergibt sich auf diese Weise

$$u_{i-1,k} = -\frac{1}{8} u_{i-2,k} + \frac{3}{4} u_{i-1,k} + \frac{3}{8} u_{i,k}; \quad (3)$$

dabei wurde in Anlehnung an (8)  $u(x_{i-1}, y_k) = u_{i-1,k}$  gesetzt.

## § 8. Beispiele

Im folgenden sollen Ergebnisse mitgeteilt werden, die bei der praktischen Überprüfung des verbesserten Differenzenverfahrens erzielt wurden. Während das zweite und dritte Beispiel nach den in § 7 gegebenen Anweisungen durchgeführt

<sup>1)</sup> (38) liefert für das zuletzt errechnete Profil keine Korrektur; das ist nicht überraschend, da eine mechanische Glättungsvorschrift auch das weitere Verhalten einer Kurve berücksichtigt. Legt man auf grosse Genauigkeit Wert, so wird man diesen Verlust in Kauf nehmen, da gerade das letzte Profil hat als Ausgangsverteilung für die weiteren Fortsetzungsschritte besondere Bedeutung.

wurden, fanden im ersten Beispiel noch andere Ausdrücke für  $V_{i,0}$  und  $V_{i,1}^2$  sowie eine andere Glättungsvorschrift Verwendung<sup>1)</sup>.

1. *Beispiel: Grenzschicht längs einer ebenen Platte mit linearer äusserer Geschwindigkeitsverteilung  $u_0(x) = B_0 - B_1 x$*

Bei geeigneter Wahl der charakteristischen Grössen, nämlich  $L = B_0/B_1$ ,  $U = B_0$ , nimmt die äussere Geschwindigkeitsverteilung in den dimensionslosen Koordinaten (2) die Gestalt

$$u_0(x) = 1 - x \quad (40)$$

an. L. HOWARTH [6] hat für die Geschwindigkeitsverteilung der zugehörigen Grenzschicht eine exakte Lösung in Form einer unendlichen Reihe angegeben und die zur Berechnung der ersten sechs Glieder notwendigen Koeffizientenfunktionen vertafelt. Die Konvergenzgüte der Reihe gestattete jedoch keine genauere Aussage als  $0,119 \leq x_A \leq 0,129$ ; deshalb wurden bei weiteren Berechnungen von Geschwindigkeitsverteilung und Ablösungsstelle diese Werte nur bis zu einer Stelle  $x_0 < x_A$  benutzt. L. HOWARTH [6] erhält so  $x_A = 0,120$ , indem er für  $x > 0,0875$  eine dem Pohlhausen-Verfahren verwandte Näherungsmethode anwendet. H. GÖRTLER [1] benutzt für  $x > 0,050$  sein in § 4 dargestelltes Verfahren und erhält  $x_A = 0,1185$ .

Die Rechnung nach unserem Differenzenverfahren begann bei  $x = x_0 = 0,050$ . Es wurde  $l = \sqrt{0,032}$  gewählt; das entspricht der Festlegung eines Anfangsprofils durch 10 Punkte. Durch diese Wahl von  $l$  war es möglich, die Ausgangswerte

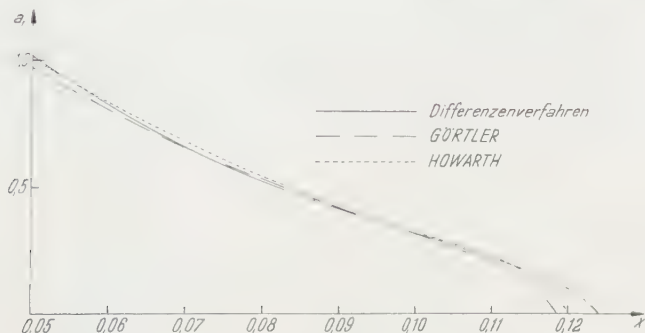


Fig. 1

Grenzschicht bei linearer äusserer Geschwindigkeitsverteilung; Kurven  $u_1(x)$ .

<sup>1)</sup> Für  $V_{i,0}$  wurde der finite Ausdruck

$$\begin{aligned} V_{i,0} = & -0,47697 V_{i,0}^2 - 0,84518 u_{i,1} + 1,35570 u_{i,2} \\ & + 0,69035 u_{i,3} - 0,67785 u_{i,4} + 0,15482 u_{i,5} \end{aligned}$$

benutzt; er ergibt sich aus dem Polynom (15) mit  $k=5$  durch die Forderung, dass die aus  $\tilde{u}_i(y)$  gebildeten Ausdrücke  $V_{i,2}$ ,  $V_{i,2}^2$  und  $V_{i,3}^2$  die vorgegebenen Werte annehmen.  $V_{i,1}^2$  wurde aus

$$V_{i,1}^2 = \frac{3}{4} V_{i,0}^2 + \frac{1}{4} V_{i,2}^2$$

ermittelt; diese Formel erhält man durch quadratische Interpolation in den Differenzen 2. Grades unter Berücksichtigung von (5). Die Glättungen wurden graphisch vorgenommen.

bequem den Howarth'schen Vertafelungen zu entnehmen. Im Intervall  $0,050 \leq x \leq 0,110$  wurde mit  $h = 0,005$  gerechnet, für  $x > 0,110$  mit  $h = 0,0025$ . Dabei ergab sich  $a_1(0,125) < 0$ . Eine genauere Auswertung lieferte  $x_A = 0,124$ , es sei aber nochmals betont, dass nicht die Formeln (18) verwendet wurden. Mit (18) hätte sich vermutlich ein etwas kleinerer Wert ergeben. In Figur 1 sind zum Vergleich die Kurven  $a_1(x)$  aufgetragen, wie sie sich aus unserem Differenzenverfahren, jenem von H. GÖRTLER bzw. nach der Howarth'schen Rechnung ergaben

## 2. Beispiel: Der Hiemenz'sche Kreiszylinder

Von K. HIEMENZ [7] wurde die Druckverteilung an einem in Wasser ( $\nu = 0,01 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) getauchten Zylinder (Durchmesser  $2R = 9,75 \text{ cm}$ ) gemessen. Die Anströmgeschwindigkeit war  $u_\infty = 19,2 \text{ cm s}^{-1}$ . Werden mit  $L = 1 \text{ cm}$   $U = 7,151 \text{ cm s}^{-1}$  dimensionslose Koordinaten (2) eingeführt, so lässt sich die Druckverteilung für  $0 \leq x \leq 7$  in befriedigendem Masse durch die äussere Geschwindigkeitsverteilung

$$u_0(x) = x - 0,006289 x^3 - 0,00004615 x^5 \quad (41)$$

wiedergeben. Die Approximation (41) kann somit zur Berechnung der Ablösungsstelle nach dem Differenzenverfahren benutzt werden, falls die Rechnung  $x_A < 7$  ergibt. Die von HIEMENZ beobachtete Ablösung lag zwischen 6,81 und 6,98.

Das Differenzenverfahren setzte bei  $x = 4,5$  ein. Es wurde  $l = 0,3$  gewählt, dieses entspricht der Verwendung von 15 Profilpunkten. Die Werte der Anfangsprofile wurden aus den ersten fünf Gliedern der Blasius-Reihe für zur Anströmungsrichtung symmetrische Strömungen berechnet; dabei wurden die Vertafelungen [5] verwendet. Es wurden zehn Schritte mit  $h = 0,2$ , dann je zwei mit  $h = 0,1$  und  $h = 0,05$  durchgeführt. Die Näherungsrechnung lieferte Ablösung unmittelbar hinter der Stelle  $x = 6,80$ . H. GÖRTLER [1] erhielt ebenfalls den Wert  $x_A = 6,80$ , während K. SCHRÖDER [2]  $x_A = 6,87$  ermittelte. Die erzielten Resultate sind in den Figuren 2, 3 und 4 veranschaulicht.

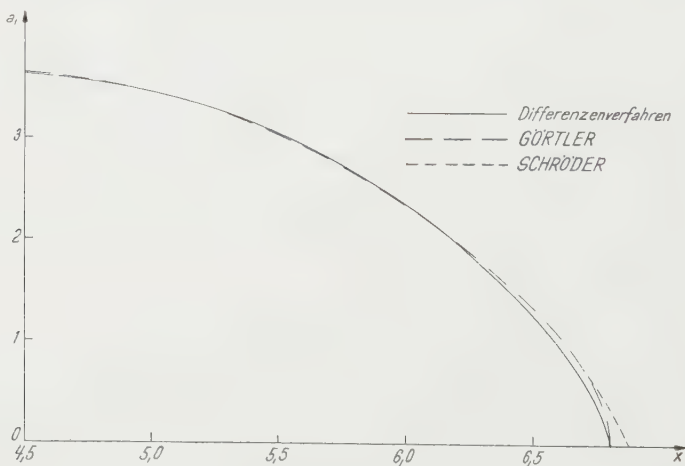


Fig. 2

Grenzschicht am Hiemenz'schen Zylinder; Kurven  $a_1(x)$ .

(Die von K. SCHRÖDER ermittelten Werte waren nur kurz vor der Ablösungsstelle bekannt.)

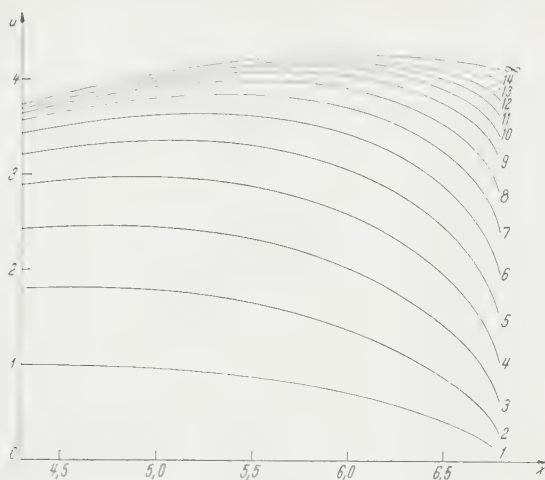


Fig. 3

Grenzschicht am Hiemenz'schen Zylinder; Geschwindigkeitsverteilung bei konstantem Wandabstand.

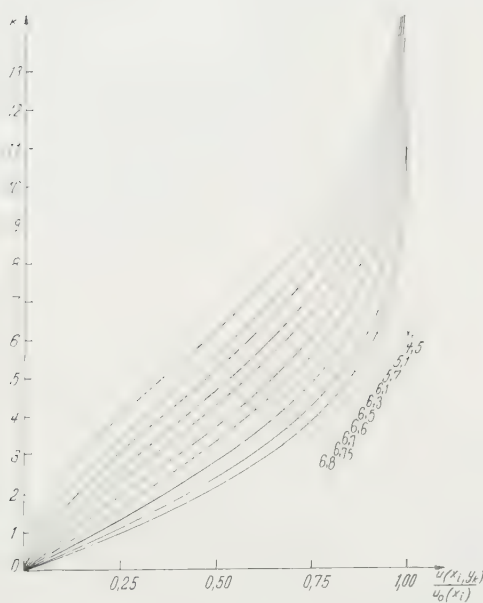


Fig. 4

Grenzschicht am Hiemenz'schen Zylinder; Auftragung einiger Profile.

### 3. Beispiel: Der Kreiszylinder mit potentialtheoretischer Druckverteilung

Die Potentialströmung zur Anströmgeschwindigkeit  $u_\infty$  um einen Kreiszylinder (Radius  $R$ ) hat längs der Wand die Geschwindigkeitsverteilung

$$u_0(x) = 2 \sin \frac{x}{2}, \quad (41)$$

falls mit  $L=R/2$ ,  $U=u_\infty$  dimensionslose Koordinaten (2) eingeführt werden. Die Geschwindigkeitsverteilung der zugehörigen Grenzschicht lässt sich für  $0 \leq x \leq x_0$  bei geeignetem  $x_0$  wieder mit Hilfe der Blasius-Reihe ausrechnen.

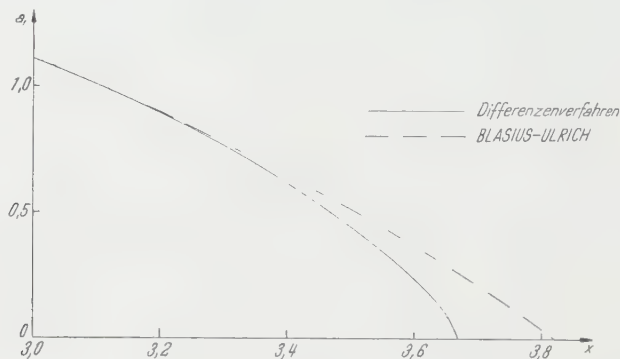


Fig. 5

Grenzschicht am Kreiszylinder bei potentialtheoretischer Druckverteilung; Kurven  $a_1(x)$ .

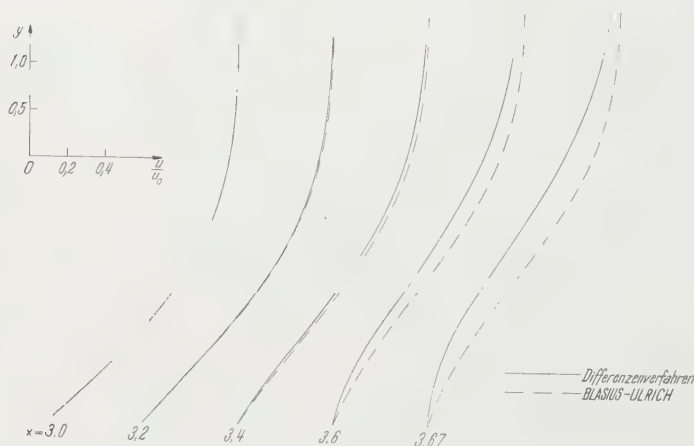


Fig. 6

Grenzschicht am Kreiszylinder bei potentialtheoretischer Druckverteilung; Vergleich einiger Profile.

man approximiert (42a) durch das Taylor-Polynom 9. Grades

$$u_0(x) = x - \frac{1}{2^2 \cdot 3!} x^3 + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} x^5 - \frac{1}{2^6 \cdot 7!} x^7 + \frac{1}{2^8 \cdot 9!} x^9, \quad (42b)$$

um die Vertafelungen von A. ULRICH [5] voll ausnutzen zu können. A. ULRICH [8] benutzte die Werte der abgebrochenen Blasius-Reihe bis zur Ablösungsstelle hin. Durch Auflösung der Gleichung  $\partial u / \partial y (x_A, 0) = 0$  mit Hilfe der Vertafelungen [5] erhielt er  $x_A = 3,84_4$ .

Die Rechnung mit unserem Differenzenverfahren setzte bei  $x = 3,0$  ein. Es wurde  $l = 0,3$  gewählt; dieses entspricht wieder der Verwendung von 15 Profilkunkten. Es wurden fünf Schritte mit  $h = 0,1$ , drei Schritte mit  $h = 0,05$  und in Schritt mit  $h = 0,025$  ausgeführt. Dabei ergab sich  $a_1(3,675) < 0$ ; eine genauere Auswertung lieferte  $x_A = 3,67$ . Die erzielten Resultate sind in den Figuren 5 und 6 aufgetragen und mit jenen verglichen, die A. ULRICH aus der Blasius-Reihe erhielt.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. GÖRTLER, *Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten*, Ing.-Arch. 16, 173 (1948).
- [2] K. SCHRÖDER, *Verwendung der Differenzenrechnung zur Berechnung der laminaren Grenzschicht*, Math. Nachr. 4, 439 (1951).
- [3] L. PRANDTL, *Zur Berechnung der Grenzschichten*, Z. angew. Math. Mech. 18, 77 (1938).
- [4] H. GÖRTLER, *Über die Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen vom Reibungsschichttypus*, Z. angew. Math. Mech. 30, 265 (1950).
- [5] A. ULRICH, *Die ebene laminare Reibungsschicht an einem Zylinder*, Arch. Math. 2, 33 (1949).
- [6] L. HOWARTH, *On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations*, Proc. Roy. Soc. London [A] 164, 547 (1938).
- [7] K. HIEMENZ, *Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder*, Dingl. Polytechn. J. 326, 32 (1911).
- [8] A. ULRICH, *Die laminare Reibungsschicht am Kreiszylinder* (1943); unveröffentlicht. Die wesentlichsten Resultate sind bei H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie* (Braun, Karlsruhe 1951), S. 128 ff., angegeben.
- [9] H. WITTING, *Über zwei Differenzenverfahren der Grenzschichttheorie*, Arch. Math. 4, 247 (1953).

## Summary

The method of differences developed by H. GÖRTLER [1] for the calculation of laminar boundary layers of plane, steady and incompressible flow functions in the neighbourhood of the point of separation hold only with a reduced degree of exactness. The same holds for the method of K. SCHRÖDER [2]. This is due to the placement of a line of indetermination of the expression for the continuation as a result of the finite approximations used. This defect is overcome by means of a polynomial approximation of the velocity distribution in the neighbourhood of the wall, and in addition the sensitivity of the method with respect to propagation of errors is generally reduced. The relatively slight increase in labour is more than offset by the increased degree of exactness. The splitting phenomena inherent in the above-mentioned methods may be avoided by means of a suitable smoothing process. The method has been tried with success on several examples. (eingegangen: 16. Februar 1953.)



## On the Equation for a Damped Pendulum under Constant Torque

By WALLACE D. HAYES, London<sup>1)</sup>

The equation for a damped pendulum under constant torque, the same as one which is of interest in the study of synchronous motor oscillations, may be expressed in the notation of SEIFERT<sup>2)</sup>

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = \beta, \quad (1)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are positive real constants. The problem of interest is to determine the conditions under which a solution may or may not exist such that the quantity

$$y = \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

is non-negative and is periodic of period  $2\pi$  in  $\theta$ . It is known<sup>2)</sup> that for  $\beta > 1$  such a solution does always exist, and that for  $0 < \beta < 1$  there exists an  $\alpha_0(\beta)$  such that the conditions  $\alpha < \alpha_0$  and  $\alpha > \alpha_0$  imply the existence and nonexistence respectively, of such a solution.

It is the purpose of this note to obtain bounds on  $\alpha_0$ . We replace  $\beta$  by  $\theta_0$  according to the relation

$$\beta = \sin \theta_0, \quad 0 > \theta_0 > \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

and replace  $\theta$  by  $\theta + \pi - \theta_0$ ; this translation does not affect the mathematical problem. The differential equation is changed to one in  $y(\theta)$ , yielding

$$y \frac{dy}{d\theta} + \alpha y + \sin(\theta + \pi - \theta_0) - \sin \theta_0 = 0. \quad (4)$$

The procedure is to pick an approximate solution  $\bar{y}(\theta)$  which is zero at  $\theta = 0, 2\pi$  and to investigate the quantity  $g(\theta)$  defined by

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} g(\theta) &= \bar{y} \frac{d\bar{y}}{d\theta} + \alpha \bar{y} - y \frac{dy}{d\theta} - \alpha y \\ &= \bar{y} \frac{d\bar{y}}{d\theta} + \alpha \bar{y} - \cos \theta_0 \sin \theta - \sin \theta_0 (1 - \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

If this quantity is zero over the range  $0$  to  $2\pi$  then  $\bar{y}(\theta)$  is the solution desired and  $\alpha = \alpha_0$ . If it is negative or zero over the whole range then for  $y(0) = 0$ ,

$$y(2\pi) - y(0) = y(2\pi) > 0.$$

<sup>1)</sup> Office of Naval Research, U.S. Embassy, London. The opinions contained in this paper are the private ones of the writer and do not necessarily reflect the views of the United States Navy.

<sup>2)</sup> GEORGE SEIFERT, *On the Existence of Certain Solutions of a Nonlinear Differential Equation* ZAMP 3, 468-471 (1952).

since it is possible to find a positive  $y'(0)$  such that

$$y'(2\pi) - y'(0) < 0$$

the solution for some intermediate value of  $y'(0)$  will be periodic. Thus,

$$g(\theta) \leq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{implies} \quad \alpha \leq \alpha_0 \quad (6)$$

with equality only if  $\bar{y}(\theta)$  is itself a solution. On the other hand, if  $g$  is positive or zero over the whole range then for  $y'(2\pi) = 0$ ,

$$y'(2\pi) - y'(0) = -y'(0) < 0.$$

consideration of the relation connecting any two solutions

$$y_1^2 - y_2^2 = C \exp \left( - \int \frac{2\alpha d\theta}{y_1 + y_2} \right) \quad (7)$$

shows that a periodic solution with  $y'(2\pi) > 0$  is impossible. Thus,

$$g(\theta) \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{implies} \quad \alpha \geq \alpha_0 \quad (8)$$

with equality only if  $\bar{y}(\theta)$  is itself a solution.

The approximate solution is taken to be of the form

$$\bar{y} = \left[ 2 \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \cos \theta_0} - \alpha f(\theta) \right] \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9)$$

where  $f(0) = 1$  and  $f$  is antisymmetric about  $\theta = \pi$ . The function  $g$  may be split into symmetric and antisymmetric parts

$$g(\theta) = g_s + g_a, \quad (10a)$$

$$g_s = 2\alpha \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \cos \theta_0} \left[ 1 - f \cos \frac{\theta}{2} - f' \sin \frac{\theta}{2} \right] - 2 \sin \theta_0 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (10b)$$

$$g_a = \frac{\alpha^2}{2} \left[ (1 + f^2) \cos \frac{\theta}{2} + 2ff' \sin \frac{\theta}{2} - 2f \right]. \quad (10c)$$

The tests on  $g$  may be carried out in the interval  $0$  to  $\pi$  if both  $g_s + g_a$  and  $g_s - g_a$  are tested.

For a lower bound on  $\alpha_0$  we choose

$$\sin \theta_0 = 2\alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} + \cos \theta_0}, \quad \alpha_1^2 = \sqrt{3 \cos^2 \theta_0 + 1} - 2 \cos \theta_0, \quad (11a)$$

$$f_1(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}, \quad (11b)$$

$$g_{s_1} = \frac{\sin \theta_0}{2} \left[ 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4 \sin \frac{\theta}{2} \right], \quad (11c)$$

$$g_{a_1} = -\frac{\alpha_1^2}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}. \quad (11d)$$

Since  $g_{a_1}$  is negative for  $0 < \theta < \pi$  the test is made on  $g_s - g_a$ . Noting that  $\alpha_1^2 < \sin \theta_0$ , we obtain

$$g_{s_1} - g_{a_1} \leq \frac{1}{2} \sin \theta_0 \sin \frac{\theta}{2} \left[ \sin \theta + 3 \sin \frac{\theta}{2} - 4 \right] \leq 0. \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (12)$$

Hence the quantity  $\alpha_1$  defined by equation (11a) is a lower bound to  $\alpha_0$ .

For an upper bound to  $\alpha_0$  we choose

$$\sin \theta_0 = \alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{4} + \cos \theta_0}, \quad \alpha_2 = 2 \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad (13a)$$

$$\left. \begin{aligned} f_2(\theta) &= 1 - \sin \frac{\theta}{2} & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ &= \sin \frac{\theta}{2} - 1, & (\pi \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

$$g_{s_2} = \sin \theta_0 \left[ 2 - 2 \cos \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right], \quad (13c)$$

$$g_{a_2} = \frac{\alpha_2^2}{2} \left[ -2 + 2 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right]. \quad (13d)$$

Since  $g_{a_2}$  takes both signs in the interval  $0 < \theta < \pi$  the test must be applied to both  $g_s + g_a$  and  $g_s - g_a$ . Noting that  $\alpha_2^2/2 < \sin \theta_0$ , we obtain

$$g_{s_2} + g_{a_2} \geq \alpha_2^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \geq 0, \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (14a)$$

$$g_{s_2} - g_{a_2} \geq \alpha_2^2 \left[ 2 \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \geq 0, \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (14b)$$

Hence the quantity  $\alpha_2$  defined by equation (13a) is an upper bound to  $\alpha_0$ . This bound is considerably better than that of SEIFERT<sup>1)</sup>.

The slope of the curve  $\alpha_0(\theta_0)$  at  $\theta_0 = 0$  may be easily calculated for comparison with the same slope for the bounding functions obtained

$$\alpha'_1(0) = \frac{1}{2}, \quad (15a)$$

$$\alpha'_0(0) = \frac{\pi}{4}, \quad (15b)$$

$$\alpha'_2(0) = 1. \quad (15c)$$

It should also be noted that  $\alpha_0(\pi/2)$  is finite, as

$$\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1, \quad (16a)$$

$$\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \sqrt{2}. \quad (16b)$$

The solution in the vicinity of the neutral point  $\theta = 0$  is always unstable, so that such a point ( $\theta = \theta_1 + 2\pi m$  in SEIFERT's notation) cannot be a limiting point for large  $t$ . The solution in the vicinity of the neutral point  $\theta = 2\theta_0 - \pi$  is always stable for  $\theta_0 < \pi/2$ , so that such a point ( $\theta = \theta_0 + 2\pi n$  in SEIFERT's notation) can always be a limiting point for large  $t$  with  $\alpha > 0$ , and will be such a limiting point with  $\alpha > \alpha_0$ .

<sup>1)</sup> GEORGE SEIFERT, *On the Existence of Certain Solutions of a Nonlinear Differential Equation* ZAMP 3, 468-471 (1952).

The case  $\beta = 1$  or  $\theta_0 = \pi/2$  has been avoided up to here, as has also the case  $\alpha = \alpha_0$ . If  $\theta_0 = \pi/2$  and  $\alpha < \alpha_0$  then the periodic solutions of the type considered do clearly exist. If  $\theta_0 = \pi/2$  and  $\alpha \geq \alpha_0$  or if  $0 < \theta_0 < \pi/2$  and  $\alpha = \alpha_0$  the periodic solutions for  $y(\theta)$  exist, but are zero at  $\theta = 0$ , and the time  $t$  given by the integral

$$t = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{v} \quad (17)$$

does not converge. Such "periodic" solutions have no meaning in terms of the original function  $\theta(t)$  and cannot be said to exist in the sense of the original intent of the problem.

The problem of interest should be restated: to determine the conditions under which a solution of equation (1) may exist such that the quantity  $d\theta/dt$  is positive and is periodic of period  $2\pi$  in  $\theta$ . Then for  $\beta > 1$  such a solution exists, and for  $0 < \beta \leq 1$  there exists an  $\alpha_0(\beta)$  such that  $\alpha < \alpha_0$  and  $\alpha \geq \alpha_0$  imply the existence and nonexistence, respectively, of such a solution. For  $\beta = 0$  and  $\alpha = \alpha_0 = 0$  any solution with  $y(0) > 0$  is of this periodic type.

### Zusammenfassung

Für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \alpha \frac{d\vartheta}{dt} - \sin \vartheta + \sin \vartheta_0 = 0 \quad \left(0 < \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

gibt es eine Funktion  $\alpha_0(\vartheta_0)$  mit den folgenden Eigenschaften: Wenn  $\alpha < \alpha_0$ , existiert eine Lösung, worin  $d\vartheta/dt$  immer positiv und in  $\vartheta$  periodisch ist. Wenn  $\alpha \geq \alpha_0$ , existiert eine solche Lösung nicht.

Man beweist, dass  $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$ , wo

$$\sin \vartheta_0 = \alpha_1 \sqrt{\alpha_1^2 + 4 \cos \vartheta_0}, \quad \alpha_1^2 = \sqrt{3 \cos^2 \vartheta_0 + 1} - 2 \cos \vartheta_0,$$

$$\sin \vartheta_0 = \frac{1}{2} \alpha_2 \sqrt{\alpha_2^2 + 4 \cos \vartheta_0}, \quad \alpha_2 = 2 \sin \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Die Grenze  $\alpha_0$  ist kleiner als die von G. SEIFERT gegebene.

Received: May 25, 1953.)

## Specific Heat of Gases at the Critical Point

By John. F. LEE<sup>1</sup>), Raleigh, North Carolina

Sonic velocity measurements have been used for some time to determine the specific heats of gases at low frequencies following the suggestion of EINSTEIN [1]<sup>2</sup>) that the reaction rates of reactive gas mixtures could be found from similar measurements. However, the equation for sonic velocity, expressed in terms of the ratio of the specific heats and the isothermal bulk modulus, becomes indeterminate when applied to the critical point. In this paper a determinate expression for the sonic velocity at the critical point is derived which permits a direct solu-

<sup>1</sup>) Department of Mechanical Engineering, North Carolina State College.

<sup>2</sup>) Numbers in brackets refer to the Bibliography, page 404.

tion for the constant volume specific heat as a function of the critical values of temperature, specific volume, sonic velocity and Joule-Thomson coefficient. The calculated values obtained from this expression are examined in comparison with existing data. Finally, the approach to the problem from the standpoint of classical thermodynamics is appraised in the light of some findings from statistical thermodynamics.

### Derivation of $C_v$ at the Critical Point

The sonic velocity at zero frequency is expressed as follows:

$$a^2 = - \frac{v^2}{m} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = - \frac{v^2}{m} \cdot \frac{C_p}{C_v} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad (1)$$

where  $a$  = sonic velocity,  $m$  = molecular weight,  $v$  = molar volume, and  $-v(\partial p/\partial v)_v$  and  $-v(\partial p/\partial v)_T$  are the isentropic and isothermal bulk moduli respectively. It can be shown that for any substance,

$$C_p - C_v = \frac{T(\partial p/\partial T)_v^2}{(\partial p/\partial v)_T}.$$

If this expression is substituted in equation (1), the following equation is obtained for the sonic velocity.

$$a^2 = \frac{T v^2}{m C_v} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2 - \frac{v^2}{m} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T. \quad (2)$$

At the critical point  $(\partial p/\partial v)_T = 0$  and equation (2) reduces to the determinate form

$$a_c^2 = \frac{T v^2}{m C_v} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_c^2 \quad (3)$$

where  $a_c$  is the sonic velocity at the critical point.

Now the Joule-Thomson coefficient is defined as

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h \quad (4)$$

which, with the aid of the second law of thermodynamics, can be shown to be equivalent to

$$\mu = \frac{1}{C_p} \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right]. \quad (5)$$

The wellknown general thermodynamic relations,

$$- \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{(\partial p/\partial T)_v}{(\partial p/\partial v)_T}$$

and

$$C_p - C_v = T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

when substituted in equation (5) yield, after simplification, the following equation

valent expression for the Joule-Thomson coefficient

$$\begin{aligned} & v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \\ & \quad - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2 - C_v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \end{aligned} \quad (6)$$

Since  $(\partial p / \partial v)_T = 0$  at the critical point, equation (6) reduces to

$$\mu_c = \frac{1}{(\partial p / \partial T)_v} \quad (7)$$

where  $\mu_c$  = the Joule-Thomson coefficient at the critical point.

When equation (7) is substituted in equation (3), the following expression for the constant volume specific heat at the critical point is obtained.

$$C_v = \frac{T}{m} \left( \frac{v}{a_r \mu_r} \right)^2. \quad (8)$$

For the purpose of comparison some calculated values of the constant volume specific heats are listed with the zero pressure (no molecular interaction in the gas) specific heats in the following table. Data for the calculations and for the zero pressure specific heats were obtained from several sources ([2] to [7]).

*Constant Volume Molar Specific Heats at the Critical Point and at Zero Pressure*

Gas	$C_c$ [from equation (8)] cal/mole degree	$C_{v\infty}$ cal/mole degree
N <sub>2</sub>	11.3	4.98
CO <sub>2</sub>	17.4	6.83
O <sub>2</sub>	13.1	5.11

The calculated values appear to be reasonable when compared with the zero pressure values of the specific heats and compare favorably with the values obtained from extrapolated  $P$ - $v$ - $T$  data. The calculated values at the critical point may be used to permit interpolation for intermediate values between the critical point and those points for which experimental data are available. It is believed that this is a more satisfactory method than that of simply extrapolating experimental specific heats to the critical point.

### Appraisal of Calculated Values of $C_v$ at the Critical Point

It is desirable to compare the calculated and calorimetric values of the specific heats at the critical point, but unfortunately published values of the specific heats at the critical point are scarce. However, a calorimetric specific heats of approximately 50 calories per mole degree has been reported for CO<sub>2</sub>[8]. The difference between the calorimetric and calculated specific heats is to be expected in view of the limitations implied by the use of equation (8). This difference, it is believed, is of the correct order of magnitude to be accounted for by several factors not anticipated by the classical thermodynamic approach employed thus far.



The sonic velocity employed in equation (8) should be the thermodynamic value; that is, complete equilibrium must be attained. There is every reason to believe that the measured value of the sonic velocity is not the thermodynamic value because of the large sound attenuation at the critical point due to (1) scattering of the sound waves, (2) the increased absorption of high frequency sound waves at the critical point, and (3) configurational relaxations.

Several investigators (9] to [12]) have produced convincing evidence of vibrational heat capacity lag due to dispersion and high absorption of sound waves when a gas is rapidly compressed. Other investigators ([13] to [15]) have established the existence of rotational heat capacity lag. It is highly probable that when a gas is rapidly condensed the extensive clustering which ensues is affected by the sound waves causing a redistribution of the molecules in the clusters and/or a redistribution of the clusters accompanied by a configurational relaxation process. It is estimated from the previously mentioned papers that a total relaxation time of the order of  $10^{-6}$  seconds is required.

From the foregoing discussion it must be concluded that  $(\partial p/\partial v)_T$  and  $(\partial p/\partial T)_v$  are dependent on time. Therefore the system behaves as though it were only slightly compressible until sufficient time has elapsed for equilibrium to be established.

### BIBLIOGRAPHY

- [1] A. EINSTEIN, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Berlin (1920).
- [2] E. JUSTI, *Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie und Dissoziation technischer Gase* (Springer, Berlin, 1938).
- [3] O. T. BLOOMER and K. N. RAO, Res. Bull. No. 18, Inst. Gas Tech., Chicago (1952).
- [4] J. K. GALT, J. Chem. Phys. 16, 505 (1948).
- [5] L. BERGMANN, *Der Ultraschall* (Hirzel, Zurich, 1949).
- [6] S. GLASSTONE, *Textbook of Physical Chemistry* (D. Van Nostrand, New York, 1946).
- [7] LANDOLT and BÖRNSTEIN, *Physikalisch-Chemische Tabellen* (Springer, Berlin, 1935).
- [8] A. MICHELS and J. C. STRIJLAND, Physica 16, 813 (1950).
- [9] A. VAN ITTERBECK, P. DE BRUYN, and P. MARIENS, Physica 6, 511 (1939).
- [10] H. O. KNESER, Ann. Physik 16, 337 (1933).
- [11] J. L. STEWART, Rev. Sci. Instr. 17, 50 (1946).
- [12] A. KANTROWITZ, J. Chem. Phys. 14, 150 (1946).
- [13] P. W. HUBER and A. KANTROWITZ, J. Chem. Phys. 15, 247 (1947).
- [14] E. S. STEWART, Phys. Rev. 69, 632 (1946).
- [15] J. E. RHODES, Phys. Rev. 69, 932 (1946).
- [16] F. O. ELLENWOOD, N. KULIK, and N. R. GAY, Bull. No. 30, Eng. Exp. Sta., Cornell Univ. (1942).
- [17] J. F. LEE, J. Chem. Phys. 21, 382 (1953).
- [18] J. F. LEE, J. Franklin Inst. (1953).

### Zusammenfassung

Es wird eine Ableitung einer bestimmbar Gleichung für die akustische Geschwindigkeit am kritischen Punkt eines Gases gegeben, die gestattet, einen Ausdruck für die spezifische Wärme zu gewinnen. Das Ergebnis wird hierauf vom Standpunkt der statistischen Thermodynamik erörtert.

(Received: February 4, 1953.)

---

 Varia – Miscellaneous – Divers
 

---

**International Union of Crystallography**

The Executive Committee (General Secretary: Dr. R. C. EVANS, Crystallographic Laboratory, Cavendish Laboratory, Cambridge, England) has accepted a kind invitation from the French Government to hold the Third General Assembly and International Congress in Paris from 21 to 28 July 1954. These dates have been chosen in consultation with the French National Committee for Crystallography and with the National Committees of all the Adhering Bodies. It is hoped that this early notice will make it possible for crystallographers throughout the world to arrange to attend.

---

**Eine neue Standardfarbenkarte**

Der Fachnormenausschuss Farbe, ein Ausschuss des Deutschen Normenausschusses, hat in Zusammenarbeit mit dem Farbforschungslaboratorium des Materialprüfungsamtes Berlin-Dahlem in mehrjähriger Arbeit die experimentellen und technischen Grundlagen zu einer neuen Standardfarbenkarte erarbeitet, die in Zukunft die einheitliche Bezugsbasis für Farbenangaben in der Normung sein soll. Sie ist auf dem Gedanken der psychologischen Gleichabständigkeit und Gleichwertigkeit der ausgewählten Farben aufgebaut. Über die wissenschaftlichen Grundlagen, die Ausführungsform und die Anwendungstechnik in allen Zweigen der Praxis unterrichten die Aufsätze, die darüber in der Zeitschrift «Die Farbe» (Verlag für angewandte Wissenschaften, Wiesbaden) in einem besonderen Heft (3/6, Bd. 1, 1953) zusammengestellt sind. Da die Arbeiten an der neuen Farbenkarte unter der Leitung des Herausgebers der Zeitschrift, Prof. Dr. M. RICHTER, entstanden haben, bietet das vorstehend erwähnte Heft Informationen aus erster Quelle.

---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Description of a Magnetic Drum Calculator.** By the Staff of the Computation Laboratory (Harvard University Press, Cambridge, U.S.A., 1952). 18 pp., 196 figs.; \$8.00.

Es muss als überaus verdienstvoll bezeichnet werden, wenn sich die Erbauer einer programmgesteuerten Rechenmaschine nach Vollendung ihres Projektes der grossen Mühe unterziehen, eine detaillierte Beschreibung des Gerätes auszuarbeiten und zu publizieren. Der Stab des Harvard University Computation Laboratory hat dies mit dem vorliegenden Band 25 der «Annals of the Computation Laboratory» zum drittenmal auf sich genommen, indem er zur elektronischen Rechenmaschine «Mark III» eine ausführliche Darlegung des technischen, logischen und mathematischen Aufbaues veröffentlicht. Das Buch umfasst die elektronischen Schaltungen, die konstruktiven Einzelheiten, die logische Anordnung (wobei auch die mit dem verwendeten Zahlssystem zusammenhängenden Eigenschaften erläutert sind), das verwendete Verfahren zur Berechnung der elementaren Funktionen, eine Anleitung zur Herstellung von Rechenplänen mit Beispielen

sowie eine Gebrauchsanweisung für das Gerät, und steht damit in seiner Art einzig da. – Gewiss verkörpert die beschriebene Rechenmaschine bezüglich ihrer elektronischen Schaltungen heute nicht mehr den neuesten Stand der Technik. Sie muss jedoch hinsichtlich ihrer Anpassung an die praktischen Bedürfnisse des Benützers als mustergültig angesehen werden. Dies gilt besonders für die Anfertigung der Zahlenstreifen und Rechenpläne, die reichhaltigen Vorrichtungen für Eingang und Ausgang sowie die Bedienungs- und Kontrollmöglichkeiten.

Erwähnung verdient schliesslich die sorgfältige Ausstattung des Buches. Die komplizierten Schaltbilder sind so aufgeteilt, dass sie nicht überladen erscheinen. ganzseitige Photographien unterstützen die Anschauung. *A. P. Speiser*

**Fouriersynthese von Kristallen.** Von W. NOWACKI (Verlag Birkhäuser Basel 1952). 248 S., 120 Abb.; sFr. 34.30.

Die Lagebestimmung der Atome in den Kristallen ist bei einfach gebauten Kristallstrukturen relativ leicht möglich. Sobald jedoch viele und auch verschiedenartige Atome in einem Kristallgitter vorkommen, wird die Ermittlung ihrer Schwerpunktslagen schwierig. In solchen Fällen wird bei der Kristallstrukturbestimmung zuerst eine Symmetrieabklärung (Raumgruppenbestimmung) durchgeführt, und zwar mittels Röntgeninterferenzsaufnahmen, wobei Lage und Auswahl der vorhandenen gegenüber den an und für sich möglichen Reflexen die Symmetriegruppe und die Metrik der Elementarzelle bestimmen lassen. Hierauf wird die Intensität der Reflexe zur Lagebestimmung der Einzelatome innerhalb der Elementarzelle benützt. Da bei Röntgen- (und Elektronenbeugungs-) Aufnahmen praktisch einzig die Elektronen des Kristalls streuend auf den Einfallstrahl wirken, kann aus der Reflexintensität einzig die Elektronenverteilung bzw. -dichte in der Elementarzelle bestimmt werden. Diese lässt dann ihrerseits die Atomlage ermitteln. Die Beziehungen zwischen der Elektronendichte in der Elementarzelle und den Reflexintensitäten lassen sich als unendliche Fourierreihe darstellen. Dabei können die Intensitäten (proportional zu den Amplituden der Streuwellen im Kristall) als Fourierkoeffizienten eingesetzt werden; die Phasen der einzelnen Streuwellen – in zentrosymmetrischen Kristallen zum mindesten die Vorzeichen der Koeffizienten – sind jedoch unbekannt. Die Methoden, welche diese Unbestimmtheit zu eliminieren gestatten, und die Rechenverfahren, welche die umfangreichen Reihenrechnungen beschleunigen können, sind in den letzten Jahren von zahlreichen Autoren erweitert worden. W. NOWACKI hat nun das in einer weitschichtigen Literatur zerstreute Material gesammelt und zusammengestellt. In seinem Buch fasst er die Rechenmethoden theoretisch zusammen und erläutert sie an Hand vieler Beispiele. Auch die den speziellen Verhältnissen der Strukturbestimmung angepassten Patterson- und Buerger-Synthesen sind eingehend behandelt. Sodann bespricht der Autor die mechanischen und elektronischen Rechenhilfsmittel, das Lochkartenverfahren und optische Methoden, welche alle dazu dienen, die umfangreiche Rechenarbeit abzukürzen bzw. zu beschleunigen. Allen Abschnitten sind sehr eingehende Literaturverzeichnisse vorangestellt, die es jederzeit erlauben, die Originalarbeiten zu Rate zu ziehen. Ein Bezugsquellennachweis für Rechenhilfsmittel ergänzt das Buch.

Das Werk von NOWACKI ist die erste eingehende Zusammenfassung der speziell für die Kristallstrukturbestimmung zugeschnittenen Fouriersynthese. Es füllt damit eine bisher in Fachkreisen stark empfundene Lücke aus. Die zahlreichen guten Figuren und drucktechnisch einwandfreien Tabellen ergänzen die Arbeit aufs beste. Für Studierende, seien es Chemiker, Mineralogen oder Physiker, die ohne sehr eingehende Kenntnisse der Kristallographie an das Buch heran-

treten, wäre eine kristallographische Einführung sehr von Nutzen gewesen. Bei der rein mathematisch gehaltenen Auseinandersetzung mit dem Stoff findet der Leser auch keinerlei Beziehung zu dem in den üblichen mineralogischen Lehrbüchern gebotenen Stoff. Es ist leider nicht dargelegt, wie man, ausgehend von einer Röntgenaufnahme, praktisch zu einer Fourierreihe gelangt, indem die Intensitätsbestimmung und -korrektur, die mit einer Reihe von kritisch zu bewertenden Messungen und Umrechnungen verbunden ist, gar nicht erwähnt wird. Der Zusammenhang des Experimentes – der Röntgenaufnahme – mit der mathematischen Behandlung ist damit für den nicht zum vorneherein Eingeweihten nicht gegeben. Stünde eingangs ein entsprechendes Kapitel, so wäre das vorliegende Buch auch eine sehr wertvolle Ergänzung zu dem in der gleichen Reihe erschienenen Werk von E. BRANDENBERGER, *Röntgenographisch-analytische Chemie*). Trotz dieser Mängel darf jedoch NOWACKIS Arbeit jedem Kristallographen und Strukturchemiker aufs wärmste empfohlen werden. *W. Epprecht*

**Magnetische Messungen an ferromagnetischen Stoffen.** Von W. ELLINGHAUS (W. de Gruyter & Co., Berlin 1952). 163 S.; DM 18.–.

Wenn ein Starkstromingenieur oder Elektrotechniker vor das Problem magnetischer Messungen an ferromagnetischen Werkstoffen gestellt wird, ist sein Griff nach diesem einführenden, klar und ausführlich geschriebenen Buch als überaus glücklich zu werten. Er findet im ersten Drittel des Bändchens einige einführende Kapitel über Maßsysteme, magnetische Grundbegriffe, Erzeugung magnetischer Felder und Feldstärkemessung. Im zweiten Drittel ist die Messung der magnetischen Induktion und der Magnetisierung in magnetischen Gleichfeldern beschrieben, und das letzte Drittel enthält die Messmethoden mit niederfrequenten magnetischen Wechselfeldern. Die Wirkungsweise und Handhabung der industriell genutzten Eisenmessgeräte ist überall sorgfältig dargestellt.

Hingegen hat der Autor bewusst die für die Schwachstrom- und Hochfrequenztechnik ausserordentlich wichtigen Methoden der Permeabilitäts- und Verlustmessung im Ton- und Radiofrequenzgebiet nur andeutungsweise erörtert. Die Behandlung der physikalisch aufschlussreichen Untersuchung der ferromagnetischen Resonanzeffekte sowie der gyromagnetischen Effekte fehlt vollständig. Diese Wünsche der Fernmeldetechniker und Physiker ebenfalls zu erfüllen, ist bei dem Umfang dieses Buches unmöglich. Nichtsdestoweniger ist erfreulich, dass ein grosses und wichtiges Teilgebiet der ferromagnetischen Messtechnik eine leichtverständliche, korrekte Darstellung gefunden hat, und es steht zu hoffen, dass dereinst auch die hier unbehandelten Untersuchungsmethoden ebenso glücklich zusammengefasst werden. *H. Labhart*

**Finite Deformation of an Elastic Solid.** By F. D. MURNAGHAN (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951). 140 pp.; \$4.00.

Das Buch, das in der von I. S. SOKOLNIKOFF herausgegebenen «Applied Mathematics Series» erschienen ist, behandelt die Elastizitätstheorie fester Körper unter Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung in den Verzerrungsössen.

Da sich der Verfasser konsequent der für diesen Zweck hervorragend geeigneten Matrizenrechnung bedient, entwickelt er in einem ersten Abschnitt die später benötigten Grundformeln dieses Kalküls.

Der Aufbau der Theorie beginnt mit einer eingehenden Analyse der endlichen Verzerrungen, des zugehörigen Tensors und seiner Invarianten. Sodann wird der



auf die verzerrten Flächenelemente bezogene Spannungstensor eingeführt und aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit am deformierten Körper die allgemeine (auch für nichtisotrope Medien gültige) Spannungs-Dehnungs-Beziehung hergeleitet, wobei die Massendichte der Formänderungsenergie als eindeutige Funktion des Verzerrungstensors angesetzt wird.

Die Entwicklung dieser Funktion nach Potenzen der Verzerrungsgrößen bis zur dritten Ordnung führt für den Spezialfall des isotropen Mediums, das zuerst untersucht wird, auf fünf Elastizitätskonstanten, die ihrerseits noch von einem hydrostatischen Ausgangs-Spannungszustand abhängen können. Hierbei zeigt es sich, dass im Bereich der endlichen Verzerrungen ein isotropes Medium, das anfänglich unter einem nichthydrostatischen Spannungszustand steht, bei einer weiteren Beanspruchung seine Isotropieeigenschaft verlieren muss. Die Theorie, die nun speziell auf die Verzerrung eines isotropen Körpers unter hydrostatischem Druck angewandt wird, liefert eine im Rahmen der experimentellen Genauigkeit vollkommene Bestätigung der Versuche, die 1948 von BRIDGMAN an Natrium unter Drücken bis zu 100 000 Atmosphären ausgeführt worden sind.

Die nichtisotropen Medien werden in einem besonderen Abschnitt behandelt, wobei sich der Verfasser im wesentlichen darauf beschränkt, die ersten drei Glieder für die Reihenentwicklung der Formänderungsenergie bei verschiedenen Formen kristalliner Medien zu ermitteln.

Die beiden letzten Abschnitte sind weiteren Anwendungen gewidmet, und zwar der Scherung (wobei die auf den Ausgangszustand bezogenen Spannungen eingeführt werden), dem einfachen Zug, der unter Aussen- und Innendruck stehenden Kugelschale, dem entsprechend belasteten Rohr und der Torsion der Kreiszylinder.

Das zum Teil aus Vorlesungen entstandene Werk ist in Form eines Lehrbuchs (mit zahlreichen Übungsaufgaben) geschrieben und straff gegliedert. Es fordert vom Leser strenge Mitarbeit, zumal da ihm die Beweise für zahlreiche Einzelheiten selbst überlassen werden.

Die vom Verfasser angewandte Schreibweise der Matrizen kann bisweilen Missverständnisse verursachen; auch wäre es wünschenswert, den Tensorbegriff im Rahmen der Matrizenrechnung klarer herauszuarbeiten. Zu bedauern ist das fast völlige Fehlen von Literaturangaben.

Nach Ansicht des Referenten erfüllt das Buch drei wichtige Aufgaben in hervorragender Weise, nämlich erstens, dass es ein klares Urteil über Tragweite und Grenzen der klassischen Elastizitätstheorie ermöglicht, zweitens, dass es einen wesentlichen Beitrag zu einer einheitlichen Auffassung darüber liefert, wie die klassische Theorie auf eine solche endlicher Verzerrungen zu erweitern ist, und drittens, dass es dazu anregt, diese Theorie endlicher Verzerrungen nunmehr auch experimentell zu unterbauen.

H. Kauderer

**Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione.** Di M. PICONE e T. VIOLA. (Edizioni scientifiche Einaudi, Torino, 1952) 403 p.; Lit. 5000.—.

Les auteurs se sont proposé de donner dans cet ouvrage une exposition systématique de la théorie moderne de l'intégrale en l'édifiant sur les notions de fonction additive d'intervalles et de fonction quasi-continue dans l'espace euclidien à un nombre fini de dimensions. L'ouvrage s'adresse donc en premier lieu aux mathématiciens qui désirent approfondir leurs connaissances sur l'intégrale de STIELTJES-LEBESGUE. Bien que sa lecture ne suppose que quelques connaissances préliminaires (résumées au chapitre I) sur les ensembles de points et sur les ensembles «ordonnés» d'opérations et qu'en général la démonstration des thé-

èmes soit faite en détail, l'ouvrage sera surtout apprécié par un lecteur qui connaît déjà la théorie classique de LEBESGUE et est, par suite, à même de constater l'originalité de l'exposition en le comparant aux traités existants sur cette matière. Ci-dessous le résumé de son contenu:

Table des matières. Introduction (p. 1 à 26). I. Ensembles de points et ensembles ordonnés d'opérations (p. 27 à 46). II. Variation des fonctions d'intervalle (p. 47 à 66). III. Intégrale de RIEMANN-STIELTJES (p. 67 à 93). IV. Concept plus général d'intégration (p. 94 à 100). V. Masse lebesguienne des ensembles de points. Ensembles lebesguiens (p. 101 à 123). VI. Fonctions quasi-continues (p. 124 à 151). VII. Intégrale des fonctions quasi-continues et sommables (p. 152 à 181). VIII. Suites de fonctions sommables (p. 182 à 203). IX. Fonctions complexes. Convergence en moyenne. Applications à l'espace de HILBERT (p. 204 à 244). X. Réduction des intégrales multiples (p. 245 à 274). XI. Intégrale de LEBESGUE-STIELTJES relativement à une fonction de point (p. 275 à 314). XII. Fonctions additives d'ensemble (p. 315 à 340). XIII. Décomposition canonique des fonctions additives (p. 341 à 367). XIV. La dérivation des fonctions additives (p. 368 à 396). Index des notations, des exemples, des auteurs; indexe analytique (p. 397 à 402).

*M. Plancherel*

**Hydrodynamische Grundlagen zur Berechnung der Schiffsschrauben.** Von M. STRSCHELETZKY (Verlag G. Braun, Karlsruhe 1950). 257 S., 57 Abb.; DM 12.—.

Die Schiffsschraube ist in ihrem üblichen Aufbau mit wenigen, relativ breiten Flügeln ein hydrodynamisch sehr viel schwierigeres Objekt als etwa der Luftpropeller. Während man im letzteren Falle eine im ganzen befriedigende Theorie hat, ist dies bei der Schiffsschraube noch nicht der Fall. Der Verfasser hat sich nun bemüht, die komplizierten Vorgänge der Rechnung zugänglich zu machen, und zwar geht er so vor, dass er das System der gebundenen und freien Wirbel passend approximiert und nun im Prinzip einfach, in der Durchführung recht mühsam nach BIOT-SAVART die Störungsgeschwindigkeiten ausrechnet. Leider konnte er die daraus entstandenen Zahlentafeln nur zum kleineren Teil dem Buche beilegen. Es ist klar, dass auch dann noch sehr vieles durch Zwischenannahmen ergänzt werden muss; aber es ist befriedigend, zu sehen, dass er diese möglichst vernünftig zu wählen versucht. Insbesondere legt er grosses Gewicht auf Annäherung an die Minimalverteilungen. Die Flügel werden als gebundene Wirbelflächen eingeführt, ihre Dicke durch passende Quellen- und Senkensysteme. Es wäre zu wünschen, dass die Ergebnisse einer solchen Rechnung mit Druckverteilungsmessungen an derart entworfenen Schrauben verglichen werden könnten. Erst dann könnte man sich ein Urteil über den praktischen Wert der Theorie bilden. Auf alle Fälle handelt es sich um einen ernst zu nehmenden Versuch, und man muss dem Verfasser für die ausserordentliche Mühe, die er sich genommen hat, volle Anerkennung zollen.

*J. Ackeret*

**Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik.** Von A. PRÖLL. (Springer-Verlag, Wien 1951). 632 S., 278 Abb.; sFr. 49.50.

Der Verfasser, der lange Zeit Professor in Hannover war, hatte kurz nach dem Ersten Weltkrieg eine «Flugtechnik» herausgegeben, die sich als ein recht letzliches Buch erwies. Heute legt er uns ein ziemlich umfangreiches Werk vor, das ungefähr dasselbe Stoffgebiet behandelt. – Was aber ist alles in den dreissig Jahren zwischen diesen beiden Ausgaben geschehen! Man versteht, dass auch auf



600 Seiten der ungeheuer angewachsene Stoff nur bruchstückweise behandelt werden kann. Es war zweifellos richtig, sich nunmehr nur auf die *Grundlagen* zu beschränken. Aber selbst dies ist nicht leicht, da heute eine Armee von Forscher und Ingenieuren an der Entwicklung des Flugzeuges arbeitet und man jetzt Dinge zu den Grundlagen rechnen muss, die vor 10 oder 15 Jahren beinahe Terra incognita waren. Trotz redlichstem Bemühen des Verfassers liegt über dem Buch der matte Schimmer der guten alten Zeit, in der PRÖLL selbst ja sehr aktiv war. Manches, was heute in den Flugzeugfabriken zur Routine gehört, ist nur knapp angedeutet, oder es wird von vorneherein auf die Literatur verwiesen (allgemeine Profile, Flügelschwingungen, neue Grundrissformen, Grenzschichtumschlag, Rauigkeitseinflüsse usw.).

Das Buch gliedert sich, wie im Titel angedeutet, in zwei ungefähr gleich grosse Teile. Im ersten kommen die Grundlagen der Aerodynamik, konforme Abbildung, Profiltheorie und Grenzschichten und einiges aus der Gasdynamik zur Sprache, im zweiten Teil in recht ausführlicher, meist elementarer Form die Berechnung von Flugleistungen, Propellertheorie und Flugeigenschaften. Leider beschränkt sich der Verfasser hier ganz auf die Flugzeuge mit kleinen Geschwindigkeiten und Motor-Propeller-Antrieb, so dass Mach-Einflüsse und die doch recht verschiedenen Eigenschaften des Strahlantriebes überhaupt nicht zur Behandlung kommen.

Der Studierende wird gut tun, das Buch als eine nützliche Zusammenfassung der schon klassisch gewordenen Teile der Flugwissenschaft zu betrachten, wobei ihm die sehr zahlreichen Beispiele zweifellos von Nutzen sein werden. Aber es wird nicht umhin können, wesentliche Dinge aus anderen, heute ja ziemlich zahlreichen Lehrbüchern diesen Grundlagen hinzuzufügen.

Ausstattung und Druck sind in gewohnter Weise vorzüglich. J. Ackermann

«Die Farbe». Zeitschrift. (Verlag für Angewandte Wissenschaften GmbH, Wiesbaden). Einzelheft DM 7.80, Band (6 Hefte) DM 42.—.

Die vierteljährlich erscheinende Zeitschrift «Die Farbe», von der die ersten zwei Hefte vorliegen, veröffentlicht Originalarbeiten und zusammenfassende Artikel, die sich mit der Farbe als optischer Erscheinung befassen. Als Herausgeber zeichnet Dr. MANFRED RICHTER, der durch seine zahlreichen Arbeiten auf dem Farbengebiet bestens bekannt ist und dessen Übersicht über die Farbenlehre noch immer als deutschsprachiges Standardwerk auf diesem Gebiet gelten kann.

Eine Arbeit von S. RÖSCH im ersten Heft der Zeitschrift befasst sich mit farimetrischen Versuchen zur Papierchromatographie, wobei an Chromatogrammen einiger Aminosäuren exakte Farbmessungen vorgenommen wurden und dabei vor allem der zeitliche Verlauf der Farbbänderung registriert wurde. Ein Aufsatz von A. KÖHLRAUSCH über das Arbeiten mit dem Helmholtz-Königschen Spektralfarbmischapparat wird vor allem die Physiker oder Physiologen interessieren, die selbst mit einem solchen Instrument arbeiten.

F. BORN referiert über die amerikanischen Normblätter über Farbmessung, wobei vor allem die Unterschiede zu den entsprechenden deutschen Normen diskutiert werden. In zwei weiteren Artikeln werden die Entwürfe zu neuen Normen besprochen. Die erste Arbeit von W. TOELDT befasst sich mit der Jodfarbskala, die durch Vergleich zur Kennzeichnung der Färbung von Lacken, Harzlösungen und dergleichen dienen kann, deren Farbe der einer Jod-Jodkalium-Lösung ähnlich ist. Als Masszahl wird dann die Jodmenge in 100 ml einer wässrigen Jod-Jodkalium-Lösung angegeben, die, unter genau vorgeschriebenen Bedingungen mit der zu untersuchenden Flüssigkeit verglichen, gleich hell erscheint. Von Vort

st dabei die genaue Reproduzierbarkeit der Vergleichslösungen; aber es können natürlich nur Färbungen bewertet werden, die nicht allzustark vom Farbton der Jodlösung abweichen. – Ein Artikel von F. Born bespricht den Entwurf zu einem neuen deutschen Normblatt über Farben und Farbgrößen für optische Signale im Verkehr.

Die Zeitschrift wird ergänzt durch Buchbesprechungen und Nachrichten aus der Fachwelt. Hoffen wir, dass sie dazu beitrage, die moderne Farbenlehre, die ihre heutige festumrissene Gestalt erst in den letzten zwanzig Jahren gewonnen hat, immer mehr zum Allgemeingut zu machen.

W. Grossmann

**Angewandte Radioaktivität.** Von K. E. ZIMEN (Springer-Verlag, Berlin 1952). 124 S., 45 Abb.; DM. 18.80.

Die Anwendung der natürlichen und künstlichen Radioaktivität hat in den letzten Jahren einen ausserordentlich starken Aufschwung genommen. Radioaktive Isotope werden heute in der Medizin zur Bekämpfung von Krankheiten sehr häufig angewandt, und die Zahl der Probleme, welche mit Leitisotopen in Chemie, Biologie, Physik, Technik usw. untersucht werden, ist in ständigem Steigen begriffen. So ist es sehr zu begrüßen, dass K. E. ZIMEN in gedrängter und für den Nichtphysiker doch sehr leichtfasslicher Art die Grundlagen der Radioaktivität sowie ihre Anwendung zusammengestellt hat. Mediziner, Techniker und Naturwissenschaftler finden im ersten Teil eine übersichtliche Erläuterung der Begriffe und Erscheinungen der Kernumwandlungen und -reaktionen und der dabei entstehenden Strahlungsarten. Im zweiten Teil ist eine grosse Zahl von Anwendungsbeispielen nach Fachgebieten gesondert zusammengestellt, so dass man eine Fülle von Anregungen erhält. Dieses Kapitel gibt auch dem Kernphysiker einen guten Überblick über die heutige Verwendung der Isotope. Viele Literaturzitate ermöglichen es dem Interessenten, sich weiter in die theoretischen Arbeiten oder Anwendungsbeispiele zu vertiefen. Eine Reihe von Tabellen und Angaben über Strahlenschutz ergänzen das Buch aufs wertvollste, so dass es jedermann empfohlen werden kann, der sich mit angewandter Radioaktivität beschäftigt oder sich über deren Stand informieren möchte.

W. Epprecht

**Theorie der geometrischen Konstruktionen.** Von L. BIEBERBACH (Verlag Birkhäuser, Basel 1952). 162 S., 102 Abb.; sFr. 18.70.

Die Theorie der geometrischen Konstruktionen befasst sich mit der Frage nach den Konstruktionsaufgaben, welche mit gegebenen Hilfsmitteln (zum Beispiel mit Zirkel und Lineal) lösbar sind, oder etwa auch, welche Instrumente zur Lösung einer vorgegebenen Konstruktionsaufgabe erforderlich sind. Der sich scheinbar keiner klaren Methodik unterordnenden Eigenart des Stoffes entsprechend, war bis heute eine eigentliche Theorie der geometrischen Konstruktionen ausgeblieben. Die in zahlreichen Lehrbüchern der Algebra eingeflochtenen Betrachtungen über Konstruktionen beschränken sich in der Regel auf die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Im vorliegenden Buche führt der Verfasser die typischen Fragestellungen der Theorie der geometrischen Konstruktionen in ihrer Wechselwirkung mit andern weigen der Mathematik vor. Insbesondere sind zahlreiche Brücken zur Algebra, zur Funktionentheorie und zur Zahlentheorie geschlagen. Das Hauptgewicht des Buches liegt weniger in der Behandlung von Einzelproblemen; das Ziel des Verfassers besteht vielmehr in einer Schilderung der Tragweite der verschiedenen Konstruktionshilfsmittel. Aus der Fülle der behandelten Konstruktionen mit vorgegebenen Hilfsmitteln seien genannt: Konstruktionen mit dem Lineal allein,

Konstruktionen mit dem Lineal allein nach Vorgabe eines gezeichneten regulären Polygons bzw. eines gezeichneten Kreises (Steinersche Konstruktionen), Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Konstruktionen mit dem Einschiebelineal, Konstruktionen mit dem Rechtwinkelhaken und schliesslich Konstruktionen mit dem Stechzirkel.

Von den zahlreichen in die Theorie eingeflochtenen Einzelproblemen nehmen insbesondere die Winkeldreiteilung, die Konstruktion der regulären Vielecke und die Kreisbogenrektifikation breiteren Raum ein. Im Zusammenhang mit dem Fragenkreis der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal wartet der Verfasser mit einer Reihe von sehr netten und verfeinernden Resultaten auf. Die parallel mit der Bekanntgabe dieser neuen Ergebnisse laufende Polemik gegen einen bekannten Algebraiker wirkt allerdings nicht sehr verfeinernd. Nachdem BIEBERBACH – wie er selbst schreibt – mit seinem Buche am bewährten Standpunkt festhalten will, dass jede Fragestellung und Meinung erlaubt sei, wirkt dieser Angriff etwas inkonsequent. Der in Verbindung mit der Diskussion des Kreisbogenrektifikation wiedergegebene funktionentheoretische Beweis der Transzendenz von  $e$  und  $\pi$  nach GELFOND und SIEGEL dürfte noch nicht sehr verbreitet sein.

BIEBERBACHS temperamentvoll geschriebene *Theorie der geometrischen Konstruktionen* vermittelt einen ausgezeichneten Einblick in die Vielfalt der Probleme und Methoden dieses Zweiges der Geometrie. Ganz besonders werden sich durch das vorliegende Werk die Lehrer der Mathematik angesprochen fühlen, gibt es ihnen doch unzählige Gelegenheiten zur Bereicherung und Belebung des Unterrichtes. Es bleibt nur zu wünschen, dass auch die nie aussterbenden chronischen Winkeldreiteiler und Kreisquadrierer daraus ihren Nutzen ziehen könnten. Das Buch ist als Band 13 der mathematischen Reihe der Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften herausgekommen und ist vorzüglich ausgestattet.

M. Jegen

**Advanced Statistical Methods in Biometric Research.** By C. RADHA KRISHNA RAO (John Wiley & Sons, New York, 1952). 390 pp.; \$7.50.

Dieses Werk enthält zunächst eine knappe Zusammenfassung der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel: Vektoren, Matrizen, Determinanten, quadratische Formen. Hierauf werden die üblichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen angegeben und ihre hauptsächlichsten Eigenschaften hergeleitet. Der weitere Inhalt beschlägt die folgenden drei Gebiete: 1. Probleme betreffend das Schätzen von Parametern und das Prüfen von Hypothesen; 2. Probleme mit mehreren Variablen; 3. Probleme der Klassifikation. Zu jedem dieser Gebiete hat RAO in den letzten zehn Jahren wesentliche Beiträge geleistet.

Das ausgezeichnete Buch von RAO kann jedermann empfohlen werden, der eine mathematisch strenge Begründung der üblichen statistischen Verfahren durcharbeiten und gleichzeitig einige der wichtigsten allerneuesten Entwicklungen kennenlernen will. Das Werk ist im Geiste von R. A. FISHER geschrieben; der Verfasser begnügt sich nicht damit, die mathematische Theorie zu erörtern, er widmet auch der numerischen Auswertung besondere Sorgfalt, indem er ein insbesondere für mehrdimensionale Probleme äusserst wertvolles Rechenverfahren an verschiedenen Beispielen ausführlich darstellt.

Die von RAO gegebenen Methoden lassen sich nicht nur auf biometrische Fragen anwenden, wie man aus den von ihm gewählten Beispielen und aus dem Titel des Buches schliessen könnte; sie gelten ganz allgemein und werden zweifellos in den verschiedensten Gebieten Anwendung finden, so insbesondere in der Industrie, wofür übrigens schon jetzt in der Schweiz Belege vorliegen. A. Lindner

## GEDENKHEFT

## PAUL NIGGLI

*Die Redaktions-Kommission und die Redaktion haben beschlossen, die vorliegende Nummer der ZAMP als Gedenkheft für den am Anfang dieses Jahres verstorbenen Prof. Dr. Paul Niggli herauszugeben aus dem Bedürfnis heraus, dem Verstorbenen für seine Verdienste um die Gründung der Zeitschrift und Herausgabe der ersten Jahrgänge ihre Dankbarkeit zu bezeugen. Kollegen und Schüler Paul Niggli's haben sich zur grossen Freude der Kommission gerne bereit gefunden, zu diesem Gedenkheft beizutragen. Ihnen allen sei für ihre Mitarbeit verbindlichst gedankt; sie haben durch ihren Beitrag in eindrucklicher Weise auch Zeugnis gegeben von der grossen Persönlichkeit des Verstorbenen und seinen unvergänglichen Leistungen als Lehrer und Forscher.*





*Niggi*





# PAUL NIGGLI

(1888 – 1953)

## Seine Verdienste um die Lehre des festen Körpers

Wenn an dieser Stelle Rückschau gehalten werden soll auf das Viele und Wesentliche, mit dem PAUL NIGGLI während seiner unermüdlichen, mehr als vier Jahrzehnte umspannenden Forschertätigkeit die Lehre des festen Körpers immer wieder neu bereicherte, so nicht, um beim einzelnen zu verweilen, sondern weit mehr um noch einmal jener besonderen und einzigartigen Leistungen zu gedenken, mit denen er unsere Einsicht in das Wesen des festen Zustandes und die Wege, diese Erkenntnis zu mehren und zu vertiefen, so nachhaltig gefördert hat.

Eine ihrer grössten steht bemerkenswerterweise gleich am Anfang jener Epoche, da sich NIGGLI, angeregt durch die von-Lauesche Entdeckung der Röntgeninterferenzen und die ersten Kristallstrukturbestimmungen durch W. H. und W. L. BRAGG, eingehender mit der Struktur der Kristalle auseinanderzusetzen begann: seine 1918/19 erschienene, im Manuskript bereits 1917 fertiggestellte *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums*. Bedeutung und Tragweite dieses Werkes erneut aufzurufen, legt sich heute besonders nahe, seit die auf dem Boden internationaler Gemeinschaftsarbeit erfolgte Herausgabe *Internationaler Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen* oder der neuerlings erschienenen *International Tables for X-Ray Crystallography* mancherorts vergessen lässt, dass es seinerzeit die *persönliche* Leistung NIGGLIS war, welche für alles das die erste sichere Grundlage geschaffen. Wohl hatte bereits zwei Jahrzehnte vor der Entdeckung der Röntgeninterferenzen A. SCHOENFLIES in seinem Buch *Kristallsysteme und Kristallstruktur* eine gruppentheoretisch erschöpfende Herleitung der 230 möglichen Symmetriefälle dreidimensionaler, periodisch gebauter Diskontinua gegeben, aber *erst* die von NIGGLI unternommene, in verblüffend kurzer Zeit vollendete, explizite Darstellung der analytisch-geometrischen Eigenschaften aller 230 Raumsysteme hat aus der Kristallstrukturtheorie jenes Instrument gemacht, das bei der experimentellen Bestimmung von Kristallstrukturen unschätzbare Dienste zu leisten vermag und denn auch seither allerorts erfolgreiche Anwendung findet. Stets hat es ihn dabei mit besonderer (und fürwahr berechtigter) Genugtuung erfüllen können, dass bei den unzähligen Koordinatentripeln, die es für die verschiedenen Punktlagen sämtlicher 230 Raumgruppen zu berechnen galt, ihm nur eine verschwindend kleine Zahl von Versehen unterlaufen war, seine Darstellung der analytischen Geometrie dreidimensionaler Diskontinua nicht nur die erste, sondern auch die *endgültige* gewesen. Zugleich hat er damals der Strukturtheorie

zu jenem System von Begriffen verholten, wie sie – so etwa als Gitterkomplex, Punktlage, Zähligkeit, Freiheitsgrad, Symmetriebedingung und weitere mehr – zur rationellen Beschreibung der Raumsysteme, aber auch der Kristallstrukturen selber notwendig sind und heute in einem Masse Allgemeingut geworden, dass darob ihr Schöpfer nur allzuoft übersehen wird.

Endlich war es ihm vergönnt, in seinem «Diskontinuum» *erstmal*s den Weg aufzuzeigen, welcher die experimentelle Bestimmung der Raumgruppe einer Kristallstruktur gestattet und in Form bestimmter Auslöschungsgesetze (der Auswahlregeln, wie er sie damals nannte) jene Kriterien zu formulieren, die seitdem die Grundlage jeder *Raumgruppenbestimmung* bilden. Es bleibt sein Verdienst, später eine noch allgemeinere Behandlung dieses Kapitels der Strukturtheorie angeregt zu haben, wie er im Anschluss an sein grundlegendes Werk auch selber immer wieder strukturtheoretische Probleme aufgegriffen, um sie alle mit besonderem Erfolg zu bearbeiten.

In den abschliessenden Kapiteln des «Diskontinuums» findet sich bereits angeschnitten, was NIGGLI fortan stets von neuem beschäftigen sollte: die Erkenntnis unmittelbarer Beziehungen zwischen der Struktur einer Kristallart und ihrem makroskopisch- oder mikroskopisch-phänomenologischen Verhalten, wobei ihn bei seiner spezifischen Begabung und Vorliebe für die Behandlung morphologischer Fragestellungen die Relation zwischen der Morphologie der Kristalle und ihrer Struktur besonders lockte, unter demselben Aspekt aber auch das Kristallwachstum als solches wie die Geometrie der Kristallplastizität beschäftigten.

Die in den zwanziger Jahren rasch anwachsende Zahl exakter Kristallstrukturbestimmungen führte bekanntlich zu zwei Feststellungen, die zunächst überraschend, an den klassischen Vorstellungen über den Aufbau der festen Materie gemessen, gar durchaus unerwartet wirken mussten und welche beide nicht von ungefähr die Arbeitsrichtung, welche NIGGLI während seiner ganzen Zürcher Tätigkeit auf dem Gebiete der Kristallkunde eingeschlagen, entscheidend mitbestimmten:

Zum ersten die Tatsache, dass zahlreiche Kristallarten grundsätzlich gleiche Atomanordnung besitzen, sich voneinander nur durch die absolute Grösse der Abstände unter ihren Atomen unterscheiden, und andererseits die Einsicht, dass im festen Zustand lediglich eine beschränkte Gruppe von Elementen und Verbindungen aus eigentlichen Molekülen besteht, bei der Mehrzahl der festen Körper vielmehr der klassische Molekülbegriff durch jenen des an sich unbegrenzten (makromolekularen) Atomverbandes ersetzt werden muss.

Je grösser die Zahl bekannter Kristallstrukturen, desto augenscheinlicher wurde, wie es offenbar *ausgezeichnete* Strukturtypen gibt, welche bevorzugt auftreten, und NIGGLI stellte daher sehr bald die Frage nach den Kriterien, welche eine Kristallstruktur besonders qualifizieren und daher besonders häufig real-

erbar machen, dann aber auch die weitere nach jenen Gesetzen, wie sie für die Verteilung der einzelnen Strukturtypen auf die Mannigfaltigkeit der Elemente und chemischen Verbindungen massgebend sind. Beiden Aufgaben waren jene elf Mitteilungen gewidmet, welche NIGGLI in den Jahren 1930 bis 1933 – im Anschluss an seine Studien über eine topologische Strukturanalyse – unter dem Titel *Stereochemie der Kristallverbindungen* veröffentlichte, dabei von den einfach zusammengesetzten Verbindungen (wie  $AB$ ,  $AB_2$ ,  $AB_3$  und  $A_2B_3$  usw.) ausgehend, nach jenen Merkmalen suchend, welche die wenigen, tatsächlich existierenden Strukturtypen unter der Vielzahl an sich denkbarer auszeichnen. Wie erschöpfend die hierfür von NIGGLI als massgebend erwiesenen Prinzipien Symmetrie, einparametrische Zusammenhänge, Dichte der Packung usw.) den Gegenstand erfassten, beweist wohl am überzeugendsten, dass er in jenen Arbeiten eine ganze Reihe damals noch nicht bekannter Strukturtypen voraussagen konnte und diese bei gewissen Verbindungen seither tatsächlich gefunden wurden. Aber auch die Frage nach dem Existenzbereich der einzelnen Strukturtypen in Abhängigkeit von den Eigenschaften der an ihrem Aufbau beteiligten Atome erfuhr mit diesen Untersuchungen wesentliche Klärung, wobei NIGGLI die kürzesten Bindungsabstände unter den Atomen als jene Grösse erkannte, welche in erster Linie über den zu erwartenden Strukturtyp entscheidet (er zog diese Betrachtungsweise der von V. M. GOLDSCHMIDT vertretenen, auf der Einführung von Ionenradien basierenden mit Entschiedenheit vor, weil er in den Bindungsabständen als den direkt ermittelten Grössen das zuverlässigere Kriterium erblickte als in den Ionenradien, deren Ableitung ja damals, mindestens in gewissen Fällen, noch reichlich hypothetisch war).

Mit alledem wurde – wohl weitgehend unbewusst – vorbereitet, was später in zwei grundlegenden Buchdarstellungen seinen Niederschlag fand: eine allgemeine Stereochemie, die in der Lage sein sollte, Molekül- und Kristallverbindungen in gleich erschöpfender Weise zu behandeln, und eine neuzeitliche Übersicht über die chemische und strukturelle Mannigfaltigkeit der Kristallarten, vorab der als natürliche Mineralien vorkommenden. Die erste Absicht hat NIGGLI 1945 in seinen *Grundlagen der Stereochemie* verwirklicht, der zweiten war der 3. Teil: «Kristallchemie, Geochemie und Mineralchemie» der dritten Auflage eines *Lehrbuches der Mineralogie und Kristallchemie* gewidmet, der (an die 1000 Seiten umfassend) 1944 zwar gedruckt vorlag, indessen nach dem Druck durch die Kriegsereignisse der Zerstörung anheimfiel. Gerade das zweite Thema hatte dazu geführt, den Begriff der Kristallart von Grund auf zur Diskussion zu stellen und neu zu formulieren, so dass es besonders erfreulich war, dass später wenigstens diese Betrachtungen als *Probleme der Naturwissenschaften, erläutert im Begriff der Mineralart* gesondert veröffentlicht wurden.

So sehr NIGGLI – und zwar nicht nur auf dem hier näher betrachteten Sektor seiner wissenschaftlichen Tätigkeit – stets am Anschluss seiner Arbeiten an die neuere Entwicklung von Physik und Chemie gelegen war, so beruhen dennoch

Wesen und Stärke seiner Beiträge zur Lehre der festen Körper auf der von ihm mit so überlegener Meisterschaft gepflegten, *geometrisch-morphologischen* Betrachtungsweise, und es gelang ihm gerade dadurch, das Eigenständige und Spezifische der Kristallkunde gegenüber ihren zahlreichen Nachbarwissenschaften voll zu wahren. Mochte dem Physiker dann und wann der Einwand nahe liegen, es sollte die geometrische Behandlung zu einer dynamisch-energetischer ausgeweitet oder gar völlig durch eine solche ersetzt werden, so darf eines nicht übersehen werden: dass in den letzten drei Jahrzehnten und auch heute noch für manche Erscheinungen eine geometrische Deutung oder doch mindestens eine Ordnung unter geometrischen Gesichtspunkten weitgehend möglich, ihre dynamisch-energetische Behandlung dagegen noch völlig ausgeschlossen ist es aber bevorzugt eben derartige Fragen waren, denen NIGGLI mit einem besonderen Interesse begegnete.

Dazu kommt, dass Probleme des festen Zustandes ihn während seiner ganzen Forschertätigkeit im Grunde genommen nie allein um ihrer selbst willen beschäftigten. Wenn einst das Verhalten der festen Körper als Bausteine der äusseren Erdrinde für ihn der Ausgangspunkt zu einem vertieften Eindringen in das Wesen der festen Materie gewesen, so hat er sich allezeit immer wieder neu darum bemüht, Fortschritte in der Lehre vom festen Körper auf das Studium *naturgegebener* Systeme, vorab der Mineralien und Gesteine, anzuwenden, damit aber in seltener Vollkommenheit die Synthese zwischen exakten und beschreibenden Naturwissenschaften vollzogen. E. BRANDENBERGER

(Eingegangen: 2. September 1953.)

## Zur Theorie und Praxis der Drehkompensatoren nach Berek und Ehringhaus

Von CONRAD BURRI, Zürich<sup>1)</sup>

*Zusammenfassung.* Es wird eine einfache Ableitung der Kompensatorfunktion für den Kalkspatkompensator nach BEREK (Leitz) und den Kombinationsquarzplatten-Kompensator nach EHRLINGHAUS (Winkel-Zeiss) gegeben und gezeigt, dass sich die beiden Ausdrücke nur in einer Konstanten unterscheiden. Die praktische Auswertung der Funktion wird diskutiert.

### A. Allgemeines

In doppelbrechenden Medien pflanzen sich im allgemeinen die Lichtschwingungen in Gestalt von zwei Wellen mit verschiedener Normalengeschwindigkeit

<sup>1)</sup> Mineralogisch-Petrographisches Institut der ETH.



bzw. Lichtbrechung fort, welche senkrecht zueinander polarisiert sind. Brechung und Schwingungsrichtung der beiden Wellen sind dabei durch das bekannte Gesetz von FRESNEL (Fundamentalsatz der Kristalloptik) bestimmt.

Liegt das doppelbrechende Medium in Gestalt einer planparallelen Platte vor, so weisen bei normaler Inzidenz die beiden Wellen gemeinsame Normalenrichtung auf, und der beim Austritt aus der Platte vorhandene Gangunterschied  $R$  berechnet sich aus der Plattenstärke  $d$  und den Brechungsindizes  $n_2 > n_1$  der beiden Wellen zu

$$R = d (n_2 - n_1) . \quad (1)$$

Bei schiefer Inzidenz (Figur 1) unter einem Winkel  $i$  zur Plattennormalen gilt die Beziehung

$$R = d (n_2 \operatorname{ctg} r_2 - n_1 \operatorname{ctg} r_1) \quad (2)$$

oder, mit Hilfe des Brechungsgesetzes umgeformt,

$$R = \sin i (\operatorname{ctg} r_2 - \operatorname{ctg} r_1) , \quad (2a)$$

wobei  $r_1 > r_2$  die Brechungswinkel der beiden Wellennormalen mit den Brechungsindizes  $n_1 < n_2$  sind. In diesem Falle verlaufen somit die beiden Wellennormalen im Kristall getrennt, da für sie das Brechungsgesetz gilt.

Die Messung von Gangunterschieden an planparallelen Kristallplatten bei normaler Inzidenz spielt bei mineralogisch-petrographischen Untersuchungen eine grosse Rolle, wie auch bei photoelastischen, wobei bei diesen die an den in und für sich isotropen Probekörpern künstlich erzeugte Spannungs Doppelbrechung betrachtet wird.

Lange Zeit hindurch wurde der bekannte, von BABINET schon 1850 angegebene Quarzkeilkompensator, teilweise etwas modifiziert, für derartige Messungen fast ausschliesslich benützt. Seit etwa 30 Jahren wurde er jedoch für mineralogisch-petrographische Zwecke durch die einfacher gebauten Drehkompensatoren nach BEREK und EHRLINGHAUS verdrängt. Diese sind bei gleicher oder sogar grösserer Messgenauigkeit bedeutend einfacher zu handhaben, da sie einen Aufsatzanalysator benötigen. Methodisch wichtige Beiträge zu ihrer Handhabung, insbesondere zur Erhöhung der Messgenauigkeit, wurden in neuerer Zeit von R. MOSEBACH veröffentlicht (R. MOSEBACH, 1948, 1949a, 1949b).

Das Prinzip dieser Drehkompensatoren, welches schon von BIOT und NIKITIN (NIKITIN, 1910) angewandt wurde, beruht darin, dass eine anisotrope Kristallplatte bzw. Plattenkombination um eine senkrecht zum Strahlengang

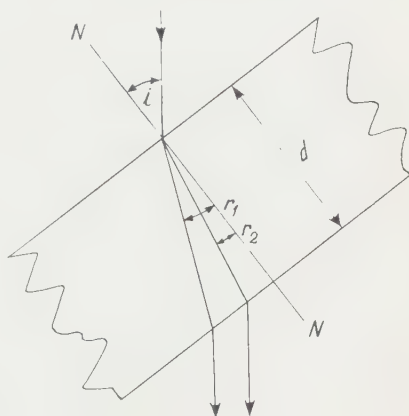


Fig. 1



des Systems angeordnete Achse drehbar ist. Durch ihre Neigung wird ein variabler Gangunterschied erzeugt, welcher zur Kompensation des zu messenden Gangunterschiedes benutzt wird. Die sogenannte Kompensatorfunktion liefert den erzeugten Gangunterschied in Funktion des messbaren Neigungswinkels. Als Ausgangslage des Instrumentes wird die Horizontalstellung der Platte genommen, für welche der Gangunterschied Null herrscht. Zur Eliminierung des Nullpunktfehlers wird die Kompensation durch Neigung der Platte nach beiden Seiten durchgeführt und der Mittelwert genommen.

Beim Kompensator nach BEREK (Leitz) (BEREK, 1913, 1924) dient als Kompensatorplatte eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene, etwa 0,1 mm dicke Kalzitplatte, bei demjenigen nach EHRLINGHAUS (Winkel-Zeiss) (EHRLINGHAUS, 1931, 1938, 1939) eine Kombination von zwei je 1 mm dicken, parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatten in Subtraktionsstellung. Die Drehachse liegt in beiden Fällen in der Plattenebene, bei der Quarzplattenkombination zudem parallel einer Schwingungsrichtung. Die für mineralogisch-petrographische Zwecke gelieferte Normalausführung weist beim Berek-Kompensator für  $D$ -Licht einen Messbereich von 4 bis 5  $\lambda$ , bei demjenigen nach EHRLINGHAUS einen solchen von 7  $\lambda$  auf. Für Spezialzwecke sind jedoch Ausführungen mit grösserem Messbereich erhältlich. Der Kompensator nach EHRLINGHAUS wird auch mit einer Kalzitplatten-Kombination geliefert und erreicht auf diese Weise einen Messbereich bis 133 Ordnungen (EHRLINGHAUS, 1939).

Von beiden Autoren wurde die Kompensatorfunktion auf ganz verschiedenem, zum Teil unnötig kompliziertem Wege abgeleitet, so dass die grosse Analogie der beiden Instrumente, welche ihnen trotz ihres verschiedenen Aufbaus eigen ist, nicht in Erscheinung tritt. Es soll daher im folgenden gezeigt werden, wie dies auf einfachem und für beide Systeme gleicherweise gültigem Wege geschehen kann, sowie dass die Resultate in einheitlicher Schreibweise formal durchaus analog ausfallen.

## B. Ableitung der Kompensatorfunktion

### 1. Kompensator nach Berek (Leitz, Wetzlar)

Die hier gegebene Ableitung erfolgt unter Benützung des Ausdrucks (2a) für den Gangunterschied einer planparallelen Kristallplatte bei schiefer Incidenz. Der Einfallswinkel  $i$  entspricht dabei dem variablen Neigungswinkel der Kompensatorplatte. Bezeichnet man den Brechungsindex der ordentlichen Welle mit  $\omega$ , den extremen Wert desjenigen der ausserordentlichen mit  $\varepsilon$  bzw. seinen relativen Wert mit  $\varepsilon'$ , so gilt in Anbetracht des optisch negativen Charakters des benutzten Kalzites  $\omega > \varepsilon$  und  $r_1 = r_{\varepsilon'} > r_2 = r_{\omega}$ . Um (2a) anwenden zu können, müssen  $\text{ctgr}_1$  und  $\text{ctgr}_2$  durch die bekannten bzw. messbaren  $\omega$ ,  $\varepsilon$  und  $i$  ausgedrückt werden. Für die ordentliche Welle gilt nach dem

Brechungsgesetz  $\sin i = \omega \sin r_2$ , woraus folgt

$$\operatorname{ctg} r_2 = \frac{\omega^2 - \sin^2 i}{\sin i}.$$

Für die außerordentliche Welle folgt einerseits aus dem Brechungsgesetz  $\varepsilon' \sin r_1 = \sin i$  und anderseits aus den geometrischen Eigenschaften der Indizesmatrix (Indexellipsoid)  $\varepsilon' = \omega \varepsilon / \sqrt{\omega^2 \sin^2 r_1 + \varepsilon^2 \cos^2 r_1}$ . Durch Elimination von  $\varepsilon'$  erhält man

$$\operatorname{ctg} r_1 = \frac{\omega}{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 i}}{\sin i}.$$

In (2a) eingesetzt erhält man, wenn  $R$  in  $\lambda$  ausgedrückt wird, nach leichter Umformung als Kompensatorfunktion den Berek'schen Ausdruck

$$R = \frac{d}{\lambda} \omega \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} \right). \quad (3)$$

Für einen analog gebauten Kompensator, jedoch mit einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Platte eines optisch positiv-einachsigen Kristalls, zum Beispiel Quarz, ergäbe sich ein entsprechender Ausdruck, jedoch mit vertauschten Vorzeichen der Wurzeln. Die Kompensatorfunktion kann daher allgemein geschrieben werden

$$R = \frac{d}{\lambda} \omega \left( \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} \right), \quad (3a)$$

wobei die oberen Zeichen für optisch negative, die unteren für optisch positive Kompensatorplatten gelten.

## 2. Kompensator nach Ehrlinghaus (Winkel-Zeiss, Göttingen)

Von den beiden in Subtraktionsstellung miteinander kombinierten Quarzplatten sei diejenige mit der optischen Achse parallel der Drehachse mit I, diejenige mit der optischen Achse senkrecht zur Drehachse mit II bezeichnet.

Für Platte I ergibt sich in prinzipiell analoger Weise zur soeben gegebenen Ableitung für den Berek Kompensator, jedoch unter Berücksichtigung des optisch positiven Charakters von Quarz,  $\omega = \varepsilon' = \varepsilon$  und, wenn wiederum  $r_1 > r_2$  gesetzt wird, dass  $r_1 = r_m < r_2 = r'_e$  und

$$\operatorname{ctg} r_1 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 i}}{\sin i}, \quad \operatorname{ctg} r_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \sin^2 i}}{\sin i}$$

in (2a) eingesetzt, folgt für den Gangunterschied von Platte I in Funktion des Neigungswinkels  $i$

$$R_I = d \left( \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 i} - \sqrt{\omega^2 - \sin^2 i} \right).$$

Für Platte II erhält man auf analoge Weise

$$\operatorname{ctg} r_1 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 i}}{\sin i}, \quad \operatorname{ctg} r_2 = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 \sin^2 i}}{\sin i}$$

und, ebenfalls unter Berücksichtigung von (2a),

$$R_{II} = d \left( \frac{\varepsilon}{\omega} \sqrt{\omega^2 \sin^2 i} - \sqrt{\omega^2 \sin^2 i} \right).$$

Da die beiden Platten zueinander in Subtraktionsstellung stehen, wird der Gangunterschied der Kombination  $R = R_I - R_{II}$ . Drückt man  $R$  wiederum in  $\lambda$  aus, so erhält man in Übereinstimmung mit EHRINGHAUS<sup>1)</sup>

$$R = \frac{d}{\lambda} \left( \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 i} - \frac{\varepsilon}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \sin^2 i} \right). \quad (4)$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf die gleiche Form bringen wie (3):

$$R = \frac{d}{\lambda} \varepsilon \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} \right). \quad (4a)$$

Der Unterschied gegenüber (3) besteht, abgesehen vom verschiedenen Vorzeichen der Wurzeln, wie es durch den verschiedenen optischen Charakter von Kalzit und Quarz bedingt ist, nur darin, dass einmal vor der Klammer  $\varepsilon$  steht, das andere Mal  $\omega$ .

Auch hier lässt sich eine allgemeine Schreibweise geben, bei welcher die oberen Zeichen für einen Kombinationsplatten-Kompensator mit optisch positiven, die unteren für einen solchen mit optisch negativen gelten:

$$R = \frac{d}{\lambda} \varepsilon \left( \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\varepsilon^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\omega^2}} \right). \quad (4b)$$

Da die in den Ausdrücken (3) bzw. (4) vor den Klammern stehenden Brechungsindizes für bestimmte  $\lambda$  Konstanten darstellen, so ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, dass sich Basisplatten und Kombinationen aus achsenparallelen Platten einachsiger Kristalle in Subtraktionsstellung in bezug auf ihre Verwendung als Kompensatorplatten für Drehkompensatoren prinzipiell analog verhalten.

### C. Auswertung der Kompensatorfunktion

Die abgeleiteten Kompensatorfunktionen sind zur Berechnung der Gangunterschiede weder auf direktem noch auf logarithmischem Wege ohne weiteres

<sup>1)</sup> Bei EHRINGHAUS (1937, S. 318) stehen die beiden Glieder in der Klammer von (4) in umgekehrter Reihenfolge und mit vertauschten Vorzeichen, was zum optisch-positiven Charakter des Quarzes in Widerspruch steht. In einer späteren Mitteilung (EHRINGHAUS, 1938) ist das Versehen berichtigt.

geeignet. BEREK hat daher vorgeschlagen, die beiden Wurzeln nach dem binomischen Satze zu entwickeln und die Glieder gleicher Potenzen von  $\sin i$  zusammenzufassen. Dabei lässt sich ein Faktor

$$C_{\lambda} = \frac{d\omega}{2\lambda} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (5)$$

ausklammern, so dass sich  $R$  wie folgt ergibt

$$R = C_{\lambda} \sin^2 i \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \sin^2 i + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{1}{\varepsilon^2 \omega^2} + \frac{1}{\omega^4} \right) \sin^4 i + \dots \right\}. \quad (6)$$

Dabei spielen die Glieder innerhalb der geschweiften Klammer, wie BEREK zeigen konnte, nur die Rolle von Korrektionsgliedern, für welche  $\omega$  und  $\varepsilon$  als unabhängig von  $\lambda$  angesehen werden können.  $C_{\lambda}$  kommt somit die Rolle einer von  $\lambda$  abhängigen Kompensationskonstante zu, und die Gangunterschiede ergeben sich zum Beispiel für  $D$ -Licht, wenn man  $\omega_D = 1,6584$  und  $\varepsilon_D = 1,4865$  einsetzt, zu

$$R_D = C_D \sin^2 i (1 + 0,2040 \sin^2 i + 0,0627 \sin^4 i) = C_D f(i). \quad (7)$$

Bei bekannter Konstante  $C_{\lambda}$  lässt sich somit für jedes gemessene  $i$  das zugehörige  $R$  berechnen. Eine tabellarische Zusammenstellung der Werte von  $f(i)$  bzw.  $\log f(i)$  für Intervalle von 0,1° wird von der Herstellerfirma jedem Instrument beigegeben. Sie befindet sich auch bei BEREK (1924). Eine Neuberechnung von  $\log f(i)$  auf vier Stellen gibt MOSEBACH (1948, S. 527). Die Kompensatorkonstante liesse sich nach (5) prinzipiell berechnen. Wegen der Schwierigkeit der genauen Dickenbestimmung des Kalzitplättchens ist jedoch die experimentelle Bestimmung vorzuziehen. Für die Linien  $C, D, F$  und den konventionellen Schwerpunkt des weissen Lichtes werden die Werte dem Instrument beigegeben.

In ganz gleicher Weise lassen sich die Wurzeln der Ehringhausschen Kompensatorfunktion (4) entwickeln, wobei sich wegen des optisch positiven Charakters des Quarzes die Kompensatorkonstante zu

$$C_{\lambda} = \frac{d\varepsilon}{2\lambda} \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \quad (8)$$

ergibt. Setzt man die Brechungsindizes für Quarz  $\varepsilon_D = 1,5534$  und  $\omega_D = 1,5443$  ein, so erhält man für die Gangunterschiede für  $D$ -Licht

$$R_D = C_D \sin^2 i (1 + 0,2084 \sin^2 i + 0,0652 \sin^4 i). \quad (9)$$

Die Kompensatorkonstante kann wie im Falle des Berek-Kompensators experimentell bestimmt werden. Da jedoch von der Herstellerfirma alle Kompen-

satoren der Normalausführung mit Quarzplatten von der gleichen Dicke  $d = 1$  mm (Dicke der Kombination somit 2 mm) ausgerüstet werden, kann sie für beliebige  $\lambda$  auch berechnet werden. Für die  $D$ -Linie ergibt sich so zum Beispiel

$$C_D = 6,4633.$$

Es liessen sich somit, wie oben angegeben, die Gangunterschiede aus den gemessenen Winkeln  $i$  berechnen, wobei für den praktischen Gebrauch die Werte für  $f(i)$  bzw.  $\log f(i)$  zu tabellieren wären. Da jedoch alle Kompensatoren der Normalausführung Quarzplatten gleicher Dicke aufweisen, was infolge der ausgezeichneten schleiftechnischen Eigenschaften des Quarzes keine Schwierigkeit macht, hat es die Herstellerfirma vorgezogen, ihren Instrumenten eine Tabelle beizugeben, aus welcher die Gangunterschiede für Intervalle von 0,1° für die  $C$ -,  $D$ - und  $F$ -Linie direkt entnommen werden können. Für andere Winkel muss interpoliert werden, was linear geschehen darf. Dieses Vorgehen ist jedoch für orientierende Messungen, im weissen Licht, wie sie bei petrographischen Untersuchungen oft vorkommen, sehr lästig. Für diesen Fall ist eine experimentelle Bestimmung der Konstanten für weisses Licht bzw. deren Berechnung für dessen konventionellen Schwerpunkt  $\lambda = 550 \mu\mu$  und die Auswertung mit einer Funktionstabelle entschieden vorzuziehen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- M. BEREK, Cbl. Min. 388–396, 437–445, 464–470 u. Nachtr. 580–582 (1913).  
 M. BEREK, *Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmethoden* (Borntreger, Berlin 1924), S. 27–28, 40–46, 133–137.  
 A. EHRLINGHAUS, Z. Kristallogr. 76, 315–321 (1931).  
 A. EHRLINGHAUS, Z. Kristallogr. 98, 394–406 (1938).  
 A. EHRLINGHAUS, Z. Kristallogr. 102, 85–111 (1939).  
 R. MOSEBACH, Heidelberger Beitr. Min. Petr. Krist. 1, 515–528 (1948).  
 R. MOSEBACH, Heidelberger Beitr. Min. Petr. Krist. 2, 167–171 (1949a).  
 R. MOSEBACH, Heidelberger Beitr. Min. Petr. Krist. 2, 172–175 (1949b).  
 W. NIKITIN, Z. Kristallogr. 47, 378–379 (1910).

#### Summary

A simple derivation of the compensator formulas for the rotating compensators after BEREK and EHRLINGHAUS is given and their virtual identity is shown. Suggestions for the calculation of path differences from the measurements are made.

(Eingegangen: 27. Juni 1953.)

# Messung des Hall-Effekts in Zylindern ohne äusseres Magnetfeld

Von GEORG BUSCH und RUDOLF JAGGI, Zürich<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Im Anschluss an die Entwicklung einer ballistischen Methode zur Messung des Hall-Effektes mit induzierten Strömen<sup>2)</sup> wurden wir auf die Möglichkeit aufmerksam, den Hall-Effekt ohne äusseres Magnetfeld lediglich mit Hilfe des Primärstromes allein zu messen<sup>3)</sup>. Es wird davon Gebrauch gemacht, dass im Innern eines stromdurchflossenen Leiters das stets vorhandene Eigenmagnetfeld auf den Strom wirkt und so einen Hall-Effekt erzeugt. Diese Erscheinung wollen wir kurz «Eigen-Hall-Effekt» nennen. Besonders übersichtliche Verhältnisse bestehen in einem axial durchströmten Kreiszyylinder, bei dem die magnetischen Kraftlinien konzentrische Kreise bilden.

## 2. Prinzip des Eigen-Hall-Effekts

### a) Von Gleichstrom durchflossener Vollzyylinder

In einem gegen seinen Radius  $r_a$  bzw. Durchmesser  $d$  langen Vollzyylinder der Permeabilität  $\mu = 1$  fliesst in axialer Richtung ein Gleichstrom  $J$  der Dichte  $j_z$ . An jedem Ort vom Radius  $r \leq r_a$  entsteht unter dem Einfluss des tangential gerichteten Eigenmagnetfeldes  $H_\varphi$  auf den Strom eine radiale elektrische Hall-Feldstärke  $E_r$  (Figur 1). Diese ist, ausgedrückt im Giorgi-System,

$$E_r = \mu_0 R j_z H_\varphi, \quad (1)$$

wenn  $\mu_0$  die Induktionskonstante und  $R$  die Hall-Konstante bedeuten. Letztere wird wie üblich als feldunabhängig vorausgesetzt.

Das Eigenmagnetfeld des Stromes beträgt

$$H_\varphi(r) = \frac{1}{2} j_z r. \quad (2)$$

Damit wird (1)

$$E_r(r) = \frac{\mu_0 R}{2} j_z^2 r \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> G. BUSCH, R. JAGGI und P. BRAUNSCHWEIG, Helv. Phys. Acta 26, 392 (1953).

<sup>3)</sup> W. VAN B. ROBERTS, Phys. Rev. 24, 532 (1924).



und die Hall-Spannung zwischen der Achse und der Oberfläche des Zylinders

$$V = - \int_{r=0}^{r_a} E_r(r) dr = - \frac{\mu_0 R}{4} j_z^2 r_a^2. \quad (4)$$

Führt man den Strom  $J$  ein, so wird

$$V = - \frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J^2}{r_a^2} = - \mu_0 R \left( \frac{J}{\pi d} \right)^2. \quad (5)$$

Die Feldstärke im Zylindermantel ist nach (2)

$$H_a = \frac{1}{2} j_z r_a = \frac{J}{\pi d}, \quad (6)$$

so dass man auch schreiben kann

$$V = - \mu_0 R H_a^2. \quad (7)$$

Das Vorzeichen gibt an, dass bei Stoffen mit positiver Hall-Konstante (anomaler Hall-Effekt) der Zylindermantel negativ wird.

Eine Abschätzung soll die Grössenordnung des Eigen-Hall-Effektes zeigen: Mit

$$d = 0,1 \text{ cm}, \quad J = 10 \text{ A}, \quad R = -1 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}$$

berechnet sich eine Feldstärke

$$H_a = 31,8 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$

und eine Hall-Spannung

$$V = 1,27 \cdot 10^{-5} \text{ V},$$

die sich mit den bei anderen Methoden erreichbaren Werten durchaus vergleichen lässt. Demgegenüber bleibt im allgemeinen die Widerstandsänderung durch das Eigenmagnetfeld unmessbar klein.

#### b) Wechselstrom als Primärstrom

Gemäss Gleichung (5) ist die Eigen-Hall-Spannung  $V$  proportional dem Quadrat des Stromes  $J$  und daher unabhängig von der Stromrichtung. Fliesst durch die Probe der Wechselstrom

$$J(t) = J_0 \sin \omega t,$$

so bleibt bei einer niedrigen Frequenz  $\nu$  bzw. Kreisfrequenz  $\omega$  der Skin-Effekt

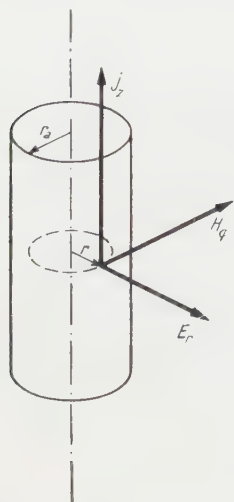


Fig. 1  
Prinzip des  
Eigen-Hall-Effekts.

vernachlässigbar (vgl. Abschnitt 4b), und (5) liefert

$$V(t) = - \frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J_0^2}{r_a^2} \sin^2 \omega t,$$

oder, umgeformt,

$$V(t) = - \frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J_{eff}^2}{r_a^2} (1 - \cos 2 \omega t). \quad (8)$$

Es entsteht eine Hall-Gleichspannung, die mit einer Hall-Wechselspannung derselben Amplitude und der doppelten Primärfrequenz überlagert ist. Bei einem Effektivwert des Wechselstromes  $J_{eff}$  sind diese Spannungen von derselben Grösse wie die Eigen-Hall-Spannung bei einem Gleichstrom  $J$ .

### c) Stromdurchflossener Hohlzylinder

Das Eigenmagnetfeld in einem Hohlzylinder vom Innenradius  $r_i$  beträgt

$$H_\varphi(r) = \frac{1}{2} j_z \frac{r^2}{r} \frac{r_i^2}{r}. \quad (9)$$

Damit liefert eine entsprechende Rechnung eine Eigen-Hall-Spannung zwischen dem Innen- und Aussenmantel des Zylinders

$$V_H = - \frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J^2}{r_a^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 + 2 \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 \ln \frac{r_i}{r_a}}{\left[1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2\right]^2}. \quad (10)$$

Mit  $r_i = 0$  ergibt sich selbstverständlich Gleichung (5) für den Vollzylinder. Bei wachsendem  $r_i/r_a$  nimmt  $V_H$  ab; geht  $r_i/r_a$  gegen 1, so nähert sich die Eigen-Hall-Spannung dem Wert

$$V_S = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 R}{4 \pi^2} \cdot \frac{J^2}{r_a^2} = - \frac{1}{2} \mu_0 R H_a^2. \quad (11)$$

## 3. Messmethode

### a) Anordnung der Hall-Elektroden

Die Eigen-Hall-Spannung muss bei einem Vollzylinder zwischen der Oberfläche und der Achse, bei einem Hohlzylinder zwischen dem Aussen- und Innenmantel abgegriffen werden. Diese Flächen sind zwar bezüglich der Eigen-Hall-Spannung Äquipotentialflächen, und die Hall-Elektroden könnten an beliebigen Stellen angebracht werden. Damit aber der zum Primärstrom  $J$  proportionale Spannungsabfall längs der Probe nicht aufgenommen wird, müssten die innere und die äussere Hall-Sonde in derselben zur Achse senkrechten Ebene liegen. Das ist schwer zu realisieren, und es empfiehlt sich, auf die in

Figur 2 angegebene Weise mit einem gegen den Probenwiderstand hochohmiger Potentiometer  $P$  einen Punkt festzulegen, der auf dem gleichen Primärpotential wie die innere Hall-Sonde  $S_1$  ist.

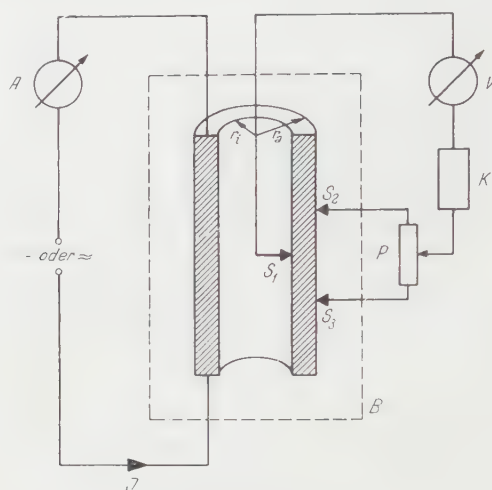


Fig. 2

Schema der Messanordnung.

Die Einstellung dieses sogenannten «isoelektrischen Punktes» gelingt bei Anwendung von Wechselstrom unter normalen Arbeitsbedingungen besonders einfach: Da neben einer Hall-Gleichspannung eine Hall-Wechselspannung der Frequenz  $2\nu$  entsteht, ist das Potentiometer so abzugleichen, dass im Messkreis keine Spannung der Primärfrequenz  $\nu$  auftritt.

Die innere Hall-Sonde könnte bei einem Vollzylinder in einer radialen oder axialen Bohrung angebracht werden, was jedoch die homogene Stromverteilung stören würde. Zweckmässig sind Hohlzylinder, bei denen die Anordnung von  $S_1$  keine Schwierigkeiten bereitet.

Figur 2 zeigt das Prinzip der Messmethode. Das Instrument  $V$  dient zur Bestimmung der Hall-Spannungen möglichst in Verbindung mit einem Kompen sationsapparat  $K$ ,  $A$  ist ein Amperemeter zur Messung des Primärstromes,  $B$  bezeichnet ein Temperaturbad.

### b) Verwendung von Wechselstrom

Die Verwendung von Wechselstrom als Primärstrom bietet mancherlei Vorteile: An den Stromzuführungen entsteht kein Peltier-Effekt, der isoelektrische Punkt ist bequem einzustellen; sodann bestehen zur Untersuchung des Eigen-Hall-Effekts nach Abschnitt 2b zwei Möglichkeiten:

Einerseits kann man die auftretende Hall-Gleichspannung zur Anzeige bringen, beispielsweise mit Hilfe eines langsam schwingenden Galvanometers. So lässt sich ohne Eichsubstanzen das Vorzeichen des Hall-Effekts schnell und sicher wie bei sonst keiner Wechselstrommethode festlegen.

Andererseits ist es für eine genaue Messung vorteilhafter, die Hall-Wechselspannung der Frequenz  $2\nu$  zu bestimmen, etwa mittels Vibrationsgalvanometer oder elektronischer Verstärker. Eventuelle Störspannungen der Frequenz  $\nu$  können ausgefiltert oder kompensiert werden; insbesondere gelingt es, störende Gleichspannungen, zum Beispiel thermoelektrischen Ursprungs, vollständig zu eliminieren.

### c) Anwendung eines Temperaturbades

Zur Ableitung der vom Primärstrom entwickelten Jouleschen Wärme und zur Vermeidung der durch den Ettingshausen-Effekt bewirkten Temperaturdifferenzen, die bei verschiedenem Material von Probe und Sonden zu Thermokräften führen, bringt man die Probe in ein Temperaturbad, das hier genügend gross gewählt und intensiv durchgerührt werden kann.

Am besten verwendet man Substanzen in Form von Hohlzylindern, bei denen die Badflüssigkeit auch an der Innenseite und der dort angebrachten Hall-Sonde  $S_1$  vorbeiströmt. Eine Kontrolle, ob eine unzulässige Erwärmung durch den Primärstrom auftritt, ist durch Widerstandsmessung möglich, wobei die Elektroden  $S_2$  und  $S_3$  als Potentialdrähte dienen.

## 4. Besonderheiten des Eigen-Hall-Effekts

Die auch bei jeder anderen Methode infolge Joulescher Wärme, Ettingshausen-Effekt, Peltier-Effekt und sonstiger thermoelektrischer Ursachen möglichen Störungen werden durch die im 3. Abschnitt erwähnten Massnahmen mit Sicherheit vermieden. Im weiteren soll noch gezeigt werden, dass die von den bekannten Verfahren abweichende Erzeugung des Hall-Effekts durch das homogen und eventuell zeitlich variable Eigenmagnetfeld zu keinen Fehlern Anlass gibt.

### a) Inhomogenität des Magnetfeldes

Im Gegensatz zu dem homogenen Magnetfeld der konventionellen Methode tritt das den Eigen-Hall-Effekt hervorrufende Magnetfeld inhomogen. Daher muss untersucht werden, welchen Einfluss das magnetische Moment der Ladungsträger ausübt.

Die Kraft  $\vec{K}$  auf einen magnetischen Dipol vom Moment  $\vec{m}$  im inhomogenen Magnetfeld  $\vec{H}$  beträgt allgemein

$$\vec{K} = (\vec{m} \nabla) \vec{H}. \quad (12)$$

Zum Zwecke einer groben Abschätzung betrachten wir in unserem Zylinder  $n$  Ladungsträger pro Kubikzentimeter der Ladung  $e$  mit dem mittleren magnetischen Moment  $\bar{m}_L$  parallel  $H_\varphi$ . Gemäss (12) wirkt auf die Volumeinheit eine Kraft in radialer Richtung

$$K_r = n \bar{m}_L \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}. \quad (13)$$

Nun führen wir die Magnetisierung  $M_L$  ein. Diese ist das magnetische Moment pro Volumeinheit

$$M_L = n \bar{m}_L, \quad (14)$$

oder mit der Ladungsträger-Suszeptibilität  $\chi_L$  ausgedrückt

$$M_L = \mu_0 \chi_L H_\varphi. \quad (15)$$

Aus (13) folgt mit (14) und (15)

$$K_r = \mu_0 \chi_L H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}. \quad (16)$$

Durch die Kraft  $K_r$  erfahren die Ladungsträger eine radiale Ablenkung, wodurch eine elektrische Feldstärke  $E'_r$  entsteht. Da in radialer Richtung kein Strom fließen soll, muss Gleichgewicht bestehen zwischen der magnetischen Kraft  $K_r$  und der elektrischen Kraft  $n e E'_r$ :

$$\mu_0 \chi_L H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + n e E'_r = 0.$$

Daraus bestimmt sich eine elektrische Feldstärke

$$E'_r(r) = - \frac{\mu_0 \chi_L}{n e} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \quad (17)$$

und eine Spannung zwischen der Achse und dem Mantel eines Vollzylinders

$$V' = - \int_{r=0}^{r_a} E'_r(r) dr = - \frac{\mu_0 \chi_L}{n e} \int_{H_\varphi=0}^{H_a} H_\varphi dH_\varphi,$$

da  $H_\varphi$  nur von  $r$  abhängt. Beim Hohlzylinder ist für  $r > r_i$  gleichfalls  $H_\varphi = 0$ , somit ergibt sich beim Voll- wie beim Hohlzylinder zwischen den Hall-Sonden eine Spannung

$$V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \chi_L}{n e} H_a^2. \quad (18)$$

Diese Störspannung ist ebenso wie die Eigen-Hall-Spannung zu  $H_a^2$  und damit

u  $J^2$  proportional. Vergleicht man jedoch (7) und (18) miteinander, indem man berücksichtigt, dass die Hall-Konstante im wesentlichen

$$R = \frac{1}{n e} \quad (19)$$

st, so wird das Verhältnis

$$\frac{|V'|}{|V|} = \frac{1}{2} |\chi_L|.$$

Gewöhnlich bleibt also die von der Inhomogenität des Eigen-Magnetfeldes herführende Spannung  $V'$  grössenordnungsmässig mehr als  $10^5$ -mal kleiner als die Eigen-Hall-Spannung  $V$  und verschwindet damit dieser gegenüber.

### b) Inhomogene Stromverteilung (Skinneffekt)

Bisher wurde stillschweigend angenommen, dass der Primärstrom  $J$  nur in axialer Richtung fliesst und seine Dichte  $j_z$  über den ganzen Querschnitt konstant ist. Abgesehen von Randstörungen ist dies in genügend langen Zylindern aus homogenem Material in einiger Entfernung von den Stromzuführungen besser erfüllt, wenn Gleichstrom verwendet wird.

Bei Wechselstrom tritt der Skinneffekt auf. Die Tiefe, in der die Stromdichte auf den  $e$ -ten Teil ihres Oberflächenwertes abgenommen hat, die Eindringtiefe, beträgt

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \pi \nu \sigma}}, \quad (20)$$

wo  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit bedeutet.

Für die Frequenz  $\nu = 50$  Hz ist bei Zimmertemperatur

in Kupfer mit  $\sigma_{\text{Cu}} = 0,588 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$   $\delta_{\text{Cu}} = 0,93$  cm,

in Wismut mit  $\sigma_{\text{Bi}} = 0,855 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$   $\delta_{\text{Bi}} = 7,70$  cm.

Bleibt die Eindringtiefe gross gegen den Probenradius, was bei unseren Versuchen der Fall ist, so verteilt sich die Stromdichte praktisch gleichmässig über den Querschnitt, und der Skinneffekt braucht nicht berücksichtigt zu werden.

## 5. Messungen an Wismut

Zur experimentellen Überprüfung erfolgten Messungen an Hohlzylindern ( $r_a = 0,4$  cm,  $r_i = 0,25$  cm) aus polykristallinem 99,97prozentigem Wismut in einem Petroleumbad sowie in flüssigem Stickstoff. Der Strom wurde dem 50-Hz-Netz über einen Reguliertransformator entnommen. Wir bestimmten



die Hall-Gleichspannungen aus den Anschlägen eines Gleichstromgalvanometers, das auf Wechselströme von 50 Hz noch deutlich, auf solche von 100 Hz fast nicht ansprach. Der isoelektrische Punkt wurde mit dem Potentiometer  $\mathcal{E}$  so eingestellt, dass die Vibrationen des Galvanometers minimal wurden.

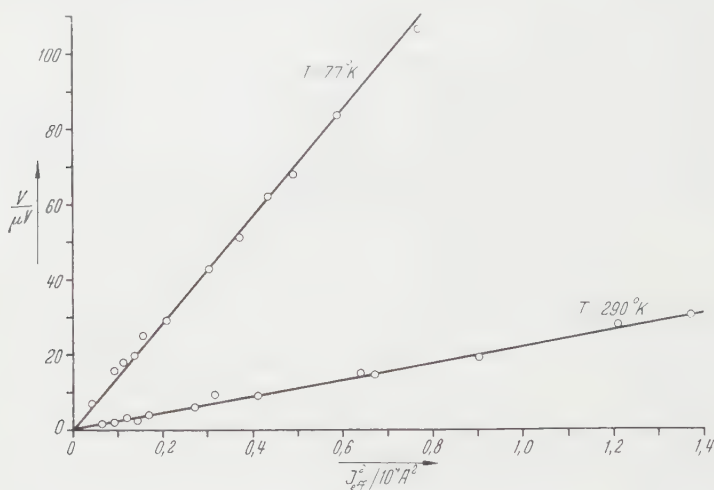


Fig. 3

Eigen-Hall-Spannung  $V$  in Funktion von  $J_{eff}^2$  für polykristallines Wismut.

In Figur 3 sind die aus mehreren Ablesungen gemittelten Eigen-Hall-Spannungen  $V$  über  $J_{eff}^2$  aufgetragen. In Bestätigung unserer Rechnungen ergeben sich durch den Ursprung des Koordinatensystems gehende Geraden, deren Auswertung folgende Hall-Konstanten liefert:

$$\text{für } T = 290^\circ\text{K}, \quad R = -1,69 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}},$$

$$\text{für } T = 77^\circ\text{K}, \quad R = -10,85 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}.$$

Diese Resultate stehen in Übereinstimmung mit den älteren auf  $H = 0$  extrapolierten Messwerten von E. VAN EVERDINGEN<sup>1)</sup>, H. KAMERLINGH ONNES und B. BECKMAN<sup>2)</sup> sowie C. W. HEAPS<sup>3)</sup>.

Unsere Darlegungen zeigen, dass die ungestörte Messung des Hall-Effekts ohne äusseres Magnetfeld möglich ist. Die beschriebene Methode bietet besonders bei extremen Temperaturen manche Vorteile.

<sup>1)</sup> E. VAN EVERDINGEN, Comm. Leiden 53 (1899); 58 (1900).

<sup>2)</sup> H. KAMERLINGH ONNES und B. BECKMAN, Comm. Leiden 129 (1912); 132 (1912).

<sup>3)</sup> C. W. HEAPS, Phys. Rev. 29, 332 (1927); 30, 61 (1927).

*Zusammenfassung*

In einem Voll- oder Hohlzylinder entsteht durch das Eigenmagnetfeld des durchfließenden Stromes ein Hall-Effekt. Eine einfache Wechselstrommethode erlaubt die fehlerfreie Bestimmung der auftretenden Hall-Gleich- bzw. -Wechselspannung, was Messungen an polykristallinem Wismut bei 77° K und 290° K bestätigen.

*Summary*

A current flowing through a cylindrical conductor gives rise to a Hall-effect due to its own magnetic field. A simple method for measuring the direct current and alternating current Hall-voltages is described. Results of measurements consistent with conventional determinations of Hall-coefficients are given for polycrystalline samples of bismuth at temperatures of 77° K and 290° K.

(Eingegangen: 6. September 1953.)

## Ein Gerät zur graphischen Bestimmung der Fermi-Grenzenergie in Halbleitern

Von EMANUEL MOOSER, Zürich<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Um die Ladungsträgerkonzentrationen in einem Halbleiter numerisch zu bestimmen, ist es notwendig, die Lage der Fermi-Grenzenergie  $\zeta$  zu kennen. Daher ist man bei der Interpretation von Messungen an Halbleitern immer wieder gezwungen, für eine vorgegebene Bänderstruktur den Temperaturverlauf der Fermi-Grenze zu ermitteln. Man benützt dazu eine zwischen den Ladungsträgerkonzentrationen bestehende Beziehung, welche zum Ausdruck bringt, dass die Gesamtladung eines Halbleiters im Gleichgewicht verschwindet. Aus dieser sogenannten «Neutralitätsbedingung» ergibt sich die Fermi-Grenzenergie als Funktion der die Bänderstruktur charakterisierenden Größen – wir nennen sie im folgenden *Halbleiterparameter* – und der Temperatur. Die Neutralitätsbedingung lässt sich jedoch im allgemeinen nicht geschlossen nach  $\zeta$  auflösen, und man ist zu dessen Ermittlung auf graphische Methoden angewiesen.

Es hat nicht an Versuchen gefehlt,  $\zeta$  graphisch zu bestimmen. Wir erwähnen die Arbeiten von LEHOVEC und KEDESZY<sup>2)</sup> und von LANDSBERG, MACKAY und McRONALD<sup>3)</sup>, in denen jedoch nur die Ermittlung von  $\zeta$  in Störhalbleitern diskutiert wird. SHOCKLEY<sup>4)</sup> gibt eine Methode an, die sowohl für Stör- als auch für Eigenhalbleiter verwendet werden kann. Sie vernachlässigt aber Entar-

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> K. LEHOVEC und H. KEDESZY, J. appl. Phys. 22, 65 (1951).

<sup>3)</sup> P. T. LANDSBERG, R. W. MACKAY und A. D. McRONALD, Proc. Phys. Soc. 64, 476 (1951).

<sup>4)</sup> W. SHOCKLEY, *Electrons and Holes in Semiconductors* (Van Nostrand Co., New York 1950).

tungserscheinungen und ist mit ziemlich grossem zeichnerischem Aufwand verbunden, erfordert sie doch für jede Änderung eines der Halbleiterparameter oder der Temperatur eine neue graphische Darstellung.

Das hier zu beschreibende Gerät lehnt sich stark an die Shockleysche Methode an. Es gestattet indessen die Entartung der Ladungsträgergase im Valenz- und Leitungsband sowie in den Störniveaus zu berücksichtigen. Überdies schränkt es die zeichnerische Arbeit auf ein Minimum ein und stellt damit ein praktisches Hilfsmittel in der Hand des an Halbleitern interessierten Forschers dar.

## 2. Theoretische Grundlagen

Wir setzen im folgenden voraus, dass die Eigenwertdichten in der Nähe der Ränder von Valenz- und Leitungsband eines Halbleiters proportional der Eigenwertdichte freier Elektronen seien. In diesem Falle genügt es zur Kennzeichnung der Eigenwertdichten, die Freiheitszahlen der Löcher und Elektronen in ihren respektiven Bändern anzugeben, und die Bänderstruktur eines sowohl Akzeptoren als auch Donatoren enthaltenden Halbleiters ist eindeutig bestimmt durch folgende Grössen:

- $E_V$  = oberer Rand des Valenzbandes,
- $E_L$  = unterer Rand des Leitungsbandes,
- $f_p$  = Freiheitszahl der Löcher im Valenzband,
- $f_n$  = Freiheitszahl der Elektronen im Leitungsband,
- $E_{Ak}$  = Energie des  $k$ -ten Akzeptorniveaus,
- $E_{Di}$  = Energie des  $i$ -ten Donatorniveaus,
- $N_{Ak}$  = Anzahl Akzeptoren  $k$ -ter Art pro Kubikzentimeter,
- $N_{Di}$  = Anzahl Donatoren  $i$ -ter Art pro Kubikzentimeter.

Verteilt man die Ladungsträger entsprechend der Fermi-Statistik auf das durch obige Halbleiterparameter gegebene Eigenwertspektrum, so findet man für die Konzentration  $n_p$  der Löcher im Valenzband:

$$n_p = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_p^{3/2}} F\left(\frac{E_V - \zeta}{k T}\right) \quad (1)$$

und für die Konzentration  $n_n$  der Elektronen im Leitungsband:

$$n_n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_n^{3/2}} F\left(\frac{\zeta - E_L}{k T}\right). \quad (2)$$

Die Funktion  $F$  stellt dabei das bekannte, von McDougall und Stoner<sup>1)</sup> tabellierte Fermi-Integral

$$F(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{1 + e^{x-\eta}} dx$$

<sup>1)</sup> J. McDougall und E. C. Stoner, Phil. Trans. Roy. Soc. [A] 237, 67 (1939).

klar. Im übrigen bedeuten  $m$  die Elektronenmasse,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum,  $k$  die Boltzmannsche Konstante und  $T$  die Temperatur.

Die Zahl  $n_{A_k}$ , der im  $k$ -ten Akzeptorniveau enthaltenen Löcher ergibt sich zu:

$$n_{A_k} = N_{A_k} \left( 1 + \exp \frac{\zeta - E_{A_k}}{kT} \right)^{-1}, \quad (3)$$

und die Zahl  $n_{D_i}$ , der mit Elektronen besetzten Donatoren  $i$ -ter Art wird:

$$n_{D_i} = N_{D_i} \left( 1 + \exp \frac{E_{D_i} - \zeta}{kT} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Im Gleichgewicht stellt sich die Fermi-Grenze  $\zeta$  so ein, dass die Zahlen der über das betrachtete Eigenwertspektrum verteilten positiven und negativen Ladungen einander gleich sind. Zwischen den Konzentrationen  $n_p$ ,  $n_n$ ,  $n_{A_k}$ ,  $n_{D_i}$ ,  $N_{A_k}$  und  $N_{D_i}$  besteht daher folgende Beziehung:

$$n_p + \sum_i (N_{D_i} - n_{D_i}) = n_n + \sum_k (N_{A_k} - n_{A_k}). \quad (5)$$

Zur graphischen Bestimmung des Gleichgewichtswertes der Fermi-Grenzenergie genügt es, die rechte und die linke Seite der Neutralitätsbedingung (5) über einem vorübergehend als unabhängige Veränderliche betrachteten  $\zeta$  aufzutragen. Im Schnittpunkt der beiden so erhaltenen Kurven ist die Neutralitätsbedingung erfüllt; das zugehörige  $\zeta$  stellt den gesuchten Gleichgewichtswert dar.

Es ist äusserst unbequem,  $\zeta$  in dieser Weise zu ermitteln, da zu jedem speziellen Bänderschema und zu jeder Temperatur eine neue Zeichnung angefertigt werden muss. Nun ist aber der funktionelle Zusammenhang zwischen den Ladungsträgerkonzentrationen (1) bis (4) einerseits und den Halbleiterparametern, der Temperatur und der Fermi-Energie andererseits derart, dass die Logarithmen der Konzentrationen (1) bis (4), aufgetragen über  $\zeta/kT$ , Kurven universeller Form sind. Jede Änderung eines der Halbleiterparameter oder der Temperatur bewirkt lediglich eine Translation der Kurven gegeneinander. Bevor wir diese Tatsache ausnützen, um die Neutralitätsbedingungen in ihrer allgemeinsten Form (5) graphisch nach  $\zeta$  aufzulösen, wollen wir sie zur  $\zeta$ -Bestimmung in nichtentarteten Eigenhalbleitern verwenden. Dann werden wir eine mögliche Entartung der Ladungsträrgase in Valenz- und Leitungsband berücksichtigen, um zum Schluss den Einfluss von Störniveaus auf die Lage von  $\zeta$  zu diskutieren.

### 3. Der nichtentartete Eigenhalbleiter

Für einen Eigenhalbleiter lautet die Neutralitätsbedingung:

$$n_p = n_n. \quad (5a)$$

Da die beiden Konzentrationen  $n_p$  und  $n_n$  nur von den vier Parametern  $E_V$ ,

$E_L$ ,  $f_p$  und  $f_n$  abhängen, wird in diesem Falle die Bestimmung der Fermi-Grenze als Funktion der Halbleiterparameter und der Temperatur stark vereinfacht. Überdies lassen sich  $n_p$  und  $n_n$  bei vorausgesetzter Nichtentartung näherungsweise wie folgt schreiben:

$$n_p = 2 \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_p^{3/2}} \exp \frac{E_V - \zeta}{k T} \quad (1a)$$

und

$$n_n = 2 \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{f_n^{3/2}} \exp \frac{\zeta - E_L}{k T}. \quad (2a)$$

Mit diesen Näherungen kann (5a) explizit nach  $\zeta$  aufgelöst werden. Man findet

$$\zeta = \frac{E_V + E_L}{2} + \frac{k T}{2} \ln \left( \frac{f_n}{f_p} \right)^{3/2}, \quad (6a)$$

und es ergibt sich somit für den nichtentarteten Eigenhalbleiter die Möglichkeit, die graphisch ermittelten  $\zeta$ -Werte mit den berechneten zu vergleichen.

Um nun zur graphischen Bestimmung des Gleichgewichtswertes der Fermi-Energie überzugehen, logarithmieren wir zunächst die Konzentrationen  $n_p$  und  $n_n$ . Aus (1a) und (2a) folgt:

$$\log n_p = \frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_p + \left( \frac{E_V}{k T} - \frac{\zeta}{k T} \right) \log e \quad (7a)$$

und

$$\log n_n = \frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_n + \left( \frac{\zeta}{k T} - \frac{E_L}{k T} \right) \log e. \quad (8a)$$

Daraus erkennt man, dass die Logarithmen  $\log n_p$  und  $\log n_n$ , aufgetragen über  $\zeta/kT$ , für jede fest vorgegebene Temperatur Geraden sind, deren Steilheiten unabhängig von den Halbleiterparametern  $-\log e$  und  $+\log e$  betragen. Die Ordinatenachsenabschnitte der Geraden ergeben sich zu:

$$\frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_p + \frac{E_V}{k T} \log e \quad (9a)$$

und

$$\frac{3}{2} \log \left[ 2^{2/3} \left( \frac{2 \pi m k T}{h^2} \right) \right] - \frac{3}{2} \log f_n - \frac{E_L}{k T} \log e. \quad (10a)$$

Jetzt spannen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf, über dessen Abszissenachse für verschiedene Temperaturen  $T_1, T_2, T_3, \dots$  Funktionsleiter  $x = \zeta/kT_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) und auf dessen Ordinatenachse die logarithmischen Leiter  $y = \log n$  aufgetragen sind. Stellt man in diesem Koordinatensystem  $n_p$  und  $n_n$  als Funktionen von  $\zeta$  für die Temperaturen  $T_i$  graphisch dar, so erhält man nach dem oben Gesagten zwei Scharen paralleler Geraden.

In Figur 1 sind zwei solche Geradenscharen für einen Halbleiter mit den Parameterwerten

$$E_L = -E_V = +0,5 \text{ eV}^1), \quad f_p = f_n = 1$$

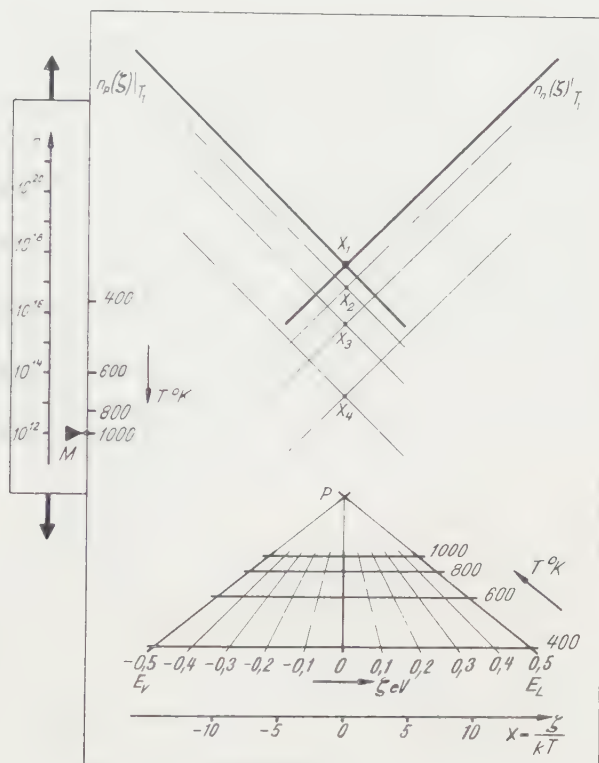


Fig. 1

angezeichnet. Für die Temperaturen  $T_i$  wurden dabei die Werte

$$T_1 = 1000^\circ \text{K}, \quad T_2 = 800^\circ \text{K}, \quad T_3 = 600^\circ \text{K} \quad \text{und} \quad T_4 = 400^\circ \text{K}$$

angenommen.

Zur Anordnung der Funktionsleitern  $x = z/kT_i$  in Figur 1 sei folgendes bemerkt: Die Abstände der zu den verschiedenen Temperaturen  $T_i$  gehörigen Leitern von einem festen Punkt  $P$  aus wurden so gewählt, dass sie proportional  $1/T_i$  sind. Dadurch kommen gleiche  $\zeta$ -Werte der verschiedenen Leitern auf Geraden durch den Punkt  $P$  zu liegen, die Funktionsleitern lassen sich leicht überblicken, und  $\zeta$  kann bequem abgelesen werden.

<sup>1)</sup> Im folgenden werden wir stets  $E_L = -E_V$  setzen und damit den Nullpunkt der Energie in die Mitte zwischen Valenz- und Leitungsband legen.



In jedem der Schnittpunkte  $X_i$  in Figur 1 ist:

$$n_p(\zeta)|_{T_i} = n_n(\zeta)|_{T_i}.$$

Das zu einem solchen Punkt gehörige, auf der Leiter  $x = \zeta/kT_i$  abgelesene  $n$  stellt somit den gesuchten Gleichgewichtswert der Fermi-Grenze für die Temperatur  $T_i$  dar. In dem in Figur 1 dargestellten Beispiel sind die Gleichgewichtswerte von  $\zeta$  alle gleich Null, das heisst, es liegt für alle Temperaturen in der Mitte des verbotenen Energiegebietes zwischen Valenzband und Leitungsband. Das rührt nach (6) davon her, dass hier  $f_p = f_n$  ist.

Auf der Leiter  $y = \log n$  lassen sich die den Temperaturen  $T_i$  entsprechenden Gleichgewichtskonzentrationen  $n_p - n_n$  als Ordinaten der Punkte  $X_i$  ablesen.

Für das folgende ist es bequemer, die beiden Geradenscharen  $n_p(\zeta)|_{T_i}$  und  $n_n(\zeta)|_{T_i}$  durch ein einziges Geradenpaar darzustellen (in Figur 1 stark ausgezogen). Um trotzdem die zu verschiedenen Temperaturen gehörigen Ladungsträgerkonzentrationen auf der  $y$ -Leiter ablesen zu können, gehen wir wie folgt vor: Auf dem linken Rand des die Geraden  $n_p(\zeta)$  und  $n_n(\zeta)$  enthaltenden Blattes tragen wir von einem beliebigen Nullpunkt aus die Ordinatenachsenabschnitte (9) oder (10) von oben nach unten ab, und zwar für

$$E_L = -E_V = 0,5 \text{ eV}, \quad f_p = f_n = 1$$

und für die Temperaturen

$$T_1 = 1000^\circ \text{K}, \quad T_2 = 800^\circ \text{K}, \quad T_3 = 600^\circ \text{K} \quad \text{und} \quad T_4 = 400^\circ \text{K}.$$

Die Endpunkte dieser Strecken beziffern wir mit den zugehörigen Temperaturen  $T_i$  und erhalten so eine Funktionsleiter  $y' = f(T)$ . Nun legen wir einen der Leiter  $y = \log n$  tragenden Streifen so an die  $y'$ -Leiter, dass der zu  $1000^\circ \text{K}$  gehörige  $n$ -Wert auf die Höhe des Schnittpunktes  $X_1$  zu liegen kommt. In dieser Lage bringen wir auf dem  $y$ -Streifen gegenüber dem Teilstrich  $1000^\circ \text{K}$  der  $y'$ -Leiter eine Marke  $M$  an (Figur 1). Verschieben wir jetzt den  $y$ -Streifen so lange, bis  $M$  auf dem Teilstrich  $T_i$  der  $y'$ -Leiter steht, so lässt sich der der Temperatur  $T_i$  entsprechende  $n$ -Wert gegenüber dem Schnittpunkt  $X_1$  auf der  $y$ -Skala ablesen.

Das Gerät, wie es bis dahin beschrieben wurde, erlaubt nur, die Fermi-Grenze und die Ladungsträgerkonzentrationen eines ganz speziellen Eigenhalbleiters mit den Parameterwerten

$$E_L = -E_V = 0,5 \text{ eV} \quad \text{und} \quad f_p = f_n = 1$$

zu bestimmen. Mit einer kleinen Ergänzung lassen sich damit aber  $n_p - n_n$  und  $\zeta$  auch für Eigenhalbleiter ermitteln, deren Bandränder  $E_L$  und  $E_V$  beliebige andere Werte besitzen. Nach (7) und (8) sind nur die  $y$ -Achsenabschnitte der Geraden  $n_p(\zeta)$  und  $n_n(\zeta)$  von  $E_V$  und  $E_L$  abhängig. Wir können daher folgende

lassen zu andern Bandrandenergien übergehen: Neben der schon in Figur 1 eingezeichneten, dem Werte  $E_L - E_V = 0,5 \text{ eV}$  entsprechenden  $y'$ -Leiter tragen wir für verschiedene andere Werte von  $E_L - E_V$  weitere solche Leitern auf (Figur 2). Wenn wir jetzt die zum Zeiger ausgezogene Marke  $M$  zum Bei-

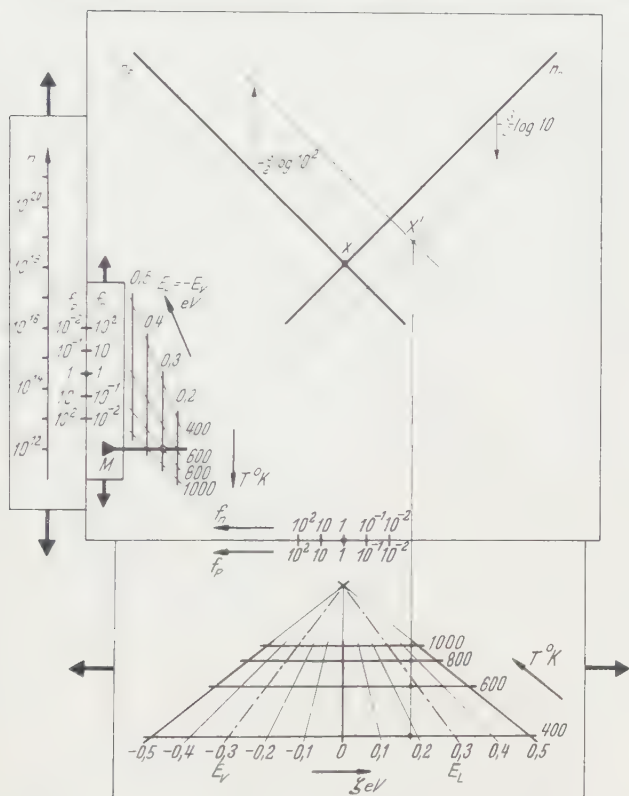


Fig. 2

spiel über den Teilstrich  $800^\circ \text{K}$  der zu  $E_L - E_V = 0,3 \text{ eV}$  gehörigen  $y'$ -Leiter gezogen (Figur 2), so lesen wir als Ordinate des Punktes  $X$  auf der Skala  $n = \log n$  die Konzentrationen

$$n_p = n_n = 1,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

des Halbleiters mit der Aktivierungsenergie

$$\Delta E = E_L - E_V = 0,6 \text{ eV} \quad \text{und mit} \quad f_p = f_n = 1$$

für die Temperatur  $T = 800^\circ \text{K}$  ab. Wegen  $f_p = f_n$  liegt  $\zeta$  auch hier in der Mitte zwischen Valenz- und Leitungsband.

Zum Schlusse des Abschnittes über nichtentartete Eigenhalbleiter wollen wir das Auftreten beliebiger Freiheitszahlen zulassen. Die Logarithmen der Freiheitszahlen gehen als additive Glieder in die Ordinatenachsenabschnitte (9) und (10) ein. Variieren wir  $f_p$  und  $f_n$ , so verschieben sich daher die Geraden  $n_p(\zeta)$  und  $n_n(\zeta)$  parallel zu sich selbst nach oben oder nach unten. Da jetzt in allgemeinen  $f_p \neq f_n$  ist, sind die Verschiebungen der beiden Geraden verschieden voneinander, und man erkennt, dass Ordinate und Abszisse des Schnittpunktes  $X$  Funktionen von  $f_p$  und  $f_n$  sind. (Vergleiche dazu Figur 2. Die beiden schwach ausgezogenen Geraden, welche sich im Punkte  $X'$  schneiden, unterscheiden sich nur durch ihre Freiheitszahlen  $f_p \cdot 10^{-2}$  und  $f_n \cdot 10$  von den stark ausgezogenen Geraden, für die  $f_p = f_n = 1$  ist.)

Um trotzdem das stark ausgezogene Geradenkreuz in Figur 2 beibehalten zu können, das heisst um  $X'$  in  $X$  zurückzuführen, müssen wir sowohl die  $y$ - als auch die  $x$ -Leitern verschiebbar anordnen. Dabei ist zu beachten, dass jetzt die Verschiebung der  $y$ -Leiter in zwei Komponenten zerfällt: eine mit Temperatur und Bandrandenergie variierende und eine von den Freiheitszahlen abhängige. Während die Translation der  $y$ -Leiter mit Temperatur und Bandrandenergie in der oben beschriebenen Weise an den  $y'$ -Leitern eingestellt werden kann, berücksichtigen wir die freiheitszahlenabhängige Verschiebung dadurch, dass wir die Marke  $M$  beweglich am  $y$ -Streifen anbringen (Figur 2).

Um ein Mass zu haben dafür, wie weit sich bei einer Variation von  $f_p$  und  $f_n$  die Marke  $M$  gegenüber dem  $y$ -Streifen verschiebt, zeichnen wir auf dieser eine Leiter  $y'' = -(3/4) \log f_p$  und ihr gegenüber auf dem die Marke  $M$  tragenden Streifen eine Leiter  $y''' = (3/4) \log f_n$ . Wir wählen dabei die Nullpunkte der beiden Leitern so, dass sie für  $f_p = f_n = 1$  zusammenfallen.

Die Verschiebung der  $x$ -Leitern als Funktion der Freiheitszahlen messen wir an zwei Leitern

$$x' = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\log f_p}{\log e} \quad \text{und} \quad x'' = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\log f_n}{\log e},$$

die einander gegenüberliegend auf dem  $x$ -Streifen bzw. dem Grundblatt aufgetragen sind und deren Nullpunkte für  $f_p = f_n = 1$  ebenfalls zusammenfallen.

Jetzt stellen wir den Teilstrich  $f_p = 10^{-2}$  der  $x'$ - bzw.  $y''$ -Skala auf dem Teilstrich  $f_n = 10$  der  $x''$ - bzw.  $y'''$ -Skala. In dieser Lage fixieren wir die  $x$ -Leiter am Grundblatt und die Marke  $M$  am  $y$ -Streifen. Schliesslich verschieben wir den  $y$ -Streifen zusammen mit der Marke  $M$  so lange, bis diese auf dem Teilstrich  $800^\circ \text{K}$  der zu  $E_L = E_V = 0,3 \text{ eV}$  gehörigen  $y'$ -Leiter steht (Figur 3). Die Koordinaten

$$n_p = n_n = 8,0 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \quad \text{und} \quad \zeta = 0,36 \text{ eV}$$

<sup>1)</sup> Der Faktor  $3/4$  tritt deshalb auf, weil sich bei einer Translation zum Beispiel der Geraden  $n_p(\zeta)$  um  $-(3/2) \log f_p$  der Schnittpunkt  $X$  nur um  $-(3/4) \log f_p$  verschiebt.

des Schnittpunktes  $X^1$ ) in Figur 3 stellen dann die Ladungsträgerkonzentrationen bzw. die Fermi-Grenzenergie eines nichtentarteten Eigenhalbleiters mit den Parametern

$$E_L = -E_V = 0,3 \text{ eV}, \quad f_p = 10^{-2} \quad \text{und} \quad f_n = 10$$

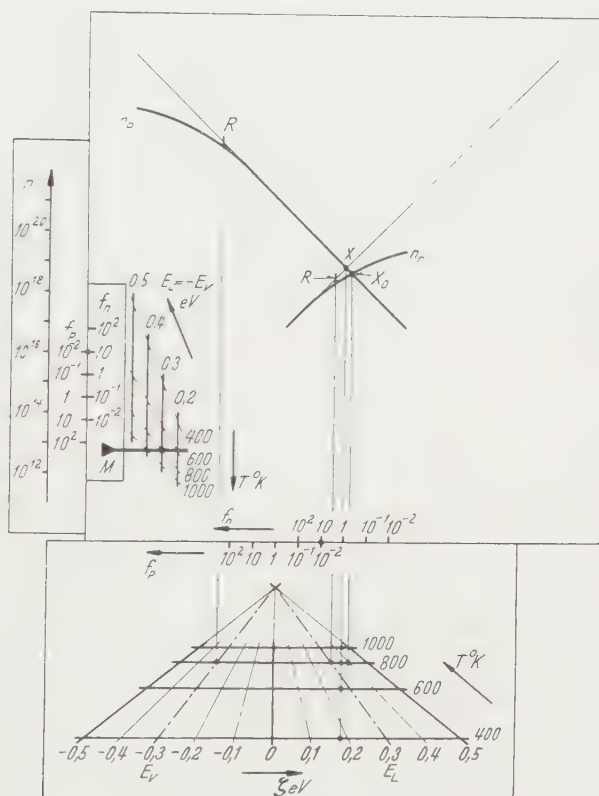


Fig. 3

i einer Temperatur  $T = 800^\circ\text{K}$  dar. (Vergleiche auch Figur 2. Dort hat der Punkt  $X'$  diese Koordinaten.) Die Fermi-Grenze liegt hier, wie es (6) mit  $f_p \neq f_n$  verlangt, nicht mehr in der Mitte zwischen Valenz- und Leitungsband. Im übrigen beachte man, dass sich  $\zeta$  aus Figur 3 sofort für jede Temperatur  $T_i$  auf der zugehörigen Leiter  $x = \zeta/kT_i$  herauslesen lässt, weil die Abszisse von  $X$  temperaturunabhängig ist.

<sup>1)</sup> Wie unten gezeigt wird, ist die Neutralitätsbedingung bei berücksichtigter Entartung im Punkte  $X_0$  der Figur 3 erfüllt.

#### 4. Der entartete Eigenhalbleiter

Die im letzten Abschnitt für die Ladungsträgerkonzentrationen verwendeten Näherungen (1a) und (2a) sind nur gültig, solange

$$\zeta > E_V + kT \quad \text{bzw.} \quad \zeta < E_L - kT.$$

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, liegt  $\zeta$  insbesondere in einem der beiden Bänder, so berechnet sich die Ladungsträgerkonzentration des betreffenden Bandes nach (1) bzw. (2). Mit den McDougall-Stonerschen Werten der

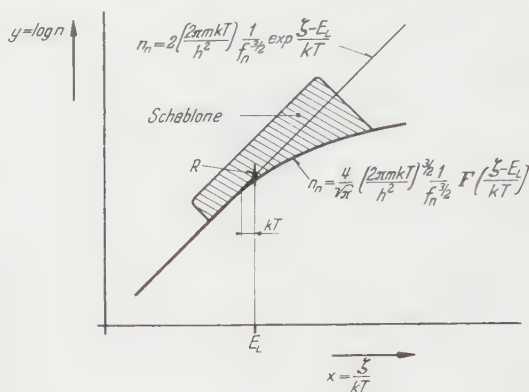


Fig. 4

Fermi-Integrals  $F$  können wir zum Beispiel  $n_n$  als Funktion von  $\zeta$  in dem oben eingeführten Koordinatensystem graphisch darstellen und erhalten den in Figur 4 wiedergegebenen Kurvenverlauf. Man erkennt, dass sich die Kurve  $n_n(\zeta)$  für  $\zeta < E_L - kT$  tatsächlich asymptotisch der Geraden (2a) nähert und grosse Abweichungen (Entartung) erst oberhalb  $\zeta = E_L$  auftreten.

In dem von uns gewählten Koordinatensystem stellt  $n_n(\zeta)$  eine Kurve fester Form dar: jede Änderung der Parameter  $E_L$  und  $f_n$  sowie der Temperatur bewirkt lediglich eine Translation der Kurve, ihre Form aber bleibt erhalten. Wir können daher vom «Entartungsbogen» eine Schablone herstellen (in Figur 4 schraffiert eingezeichnet) und müssen nur noch seine Lage als Funktion der Halbleiterparameter und der Temperatur bestimmen. Dazu zeichnen wir die Asymptote des Entartungsbogens in der Schablone ein und markieren darauf den Punkt  $R$ , für den  $\zeta = E_L$  ist<sup>1)</sup>. Wenn wir jetzt auf der Geraden  $n_n(\zeta)$  des Grundblattes unseres Gerätes den Punkt  $\zeta = E_L$  ebenfalls markieren, so können wir die Schablone sofort in der richtigen Lage anlegen und den Entartungsbogen einzeichnen (Figur 3).

<sup>1)</sup> In diesem Punkt ist das Verhältnis von nichtentarteter zu entarteter Elektronenkonzentration konstant und unabhängig von Temperatur und Halbleiterparameter.

Die Abweichung der Löcherkonzentration  $n_p$  von der im Grundblatt eintragenen Geraden (1a) bei eintretender Entartung lässt sich mit derselben Skizze zeichnen. Wir müssen einfach die Asymptote der umgeklappten Skizze so auf die Gerade (1a) legen, dass der Punkt  $R$  mit dem Punkt  $\zeta = E_V$  zusammenfällt.

In Figur 3 sind die Punkte  $X$  und  $X_0$  eingezeichnet, in denen die Neutralitätsbedingung eines Eigenhalbleiters bei vernachlässigter ( $X$ ) bzw. berücksichtigter ( $X_0$ ) Entartung erfüllt ist. Da  $\zeta$  im Leitungsband liegt, ist einerseits die Entartung des Elektronengases schon ziemlich weit fortgeschritten, andererseits aber gilt sicher  $\zeta \gg E_F = kT$ , das heisst das Löchergas im Valenzband ist nicht entartet. In der Tat erkennt man in Figur 3, dass der Entartungsbogen der Löcherkonzentration so weit vom Schnittpunkt  $X_0$  entfernt ist, dass dessen Lage nicht beeinflusst.

Mit sinkender Temperatur wandern die Punkte  $\zeta = E_V$  bzw.  $\zeta = E_L$  auf den Leitern nach aussen. Damit entfernen sich die beiden Entartungsbogen vom Schnittpunkt des Geradenkreuzes: die Entartung verschwindet bei tiefen Temperaturen.

## 5. Der Störhalbleiter

Wir gehen nun über zur Bestimmung der Fermi-Energie in Halbleitern, welche ein oder mehrere Störniveaus enthalten. Die allgemeinste hier auftretende Neutralitätsbedingung ist von der Form (5), und wir fragen daher als erstes nach dem Verlauf der Kurven

$$N_A - n_A = f(\zeta) \quad \text{bzw.} \quad N_D - n_D = g(\zeta).$$

Nach (4) ist zum Beispiel die Zahl  $N_D - n_D$  der ionisierten Donatoren:

$$N_D - n_D = N_D \left[ 1 - \left( 1 + \exp \frac{E_D - \zeta}{kT} \right)^{-1} \right] = N_D \left( 1 + \exp \frac{\zeta - E_D}{kT} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Falls  $\zeta \ll E_D$ , das heisst, falls  $\zeta$  tief unterhalb des Donatorniveaus liegt, gilt näherungsweise:

$$N_D - n_D \approx N_D. \quad (12)$$

Andererseits erhält man mit  $\zeta \gg E_D$ :

$$N_D - n_D \approx N_D \exp \frac{E_D - \zeta}{kT}. \quad (13)$$

Getragen in unserem Koordinatensystem stellen die beiden Kurven (12) und (13) Geraden dar, die sich im Punkte  $S(\zeta = E_D, n = N_D)$  schneiden und denen die Kurve (11) für  $\zeta \ll E_D$  bzw.  $\zeta \gg E_D$  asymptotisch nähert (Figur 5).



Während die Gerade (12) horizontal verläuft, besitzt die Gerade (13) die Steilheit  $-\log e$ , das heisst, sie ist parallel zu der im nichtentarteten Fall den Verlauf der Löcherkonzentration wiedergebenden Geraden (1a).

Wie oben diejenige des Entartungsbogens bleibt auch die Form der Kurve (11) bei einer Änderung der Halbleiterparameter ( $E_D$ ,  $N_D$ ) und der Temperatur erhalten. Wir können daher von der Kurve  $N_D - n_D$  ebenfalls eine Schablone anfertigen (in Figur 5 schraffiert eingezeichnet). Markieren wir die beiden Asymptoten (12) und (13) und insbesondere deren Schnittpunkt S auf der

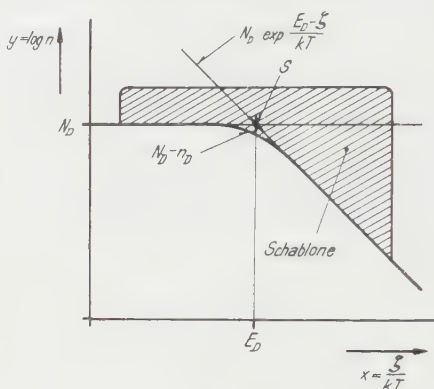


Fig. 5

Schablone, so lässt sich damit die Kurve  $N_D - n_D = g(\zeta)$  sofort und für beliebige Werte von  $E_D$ ,  $N_D$  und  $T$  in der richtigen Lage im Grundblatt unseres Gerätes einzeichnen.

Die gleiche Schablone können wir benützen, um den Verlauf der Zahl  $N_A - n_A$  der ionisierten Akzeptoren als Funktion der Fermi-Grenze zu zeichnen. Wir müssen einfach die horizontale Asymptote der umgeklappten Schablone auf die Gerade  $n = N_A$  legen, und zwar so, dass der Punkt S auf der Punkt mit den Koordinaten  $\zeta = E_V$ ,  $n = N_A$  fällt.

Nachdem wir den Verlauf von  $N_A - n_A$  und von  $N_D - n_D$  kennen, wollen wir mit unserem Gerät die Fermi-Grenze in einem ÜberschussHalbleiter mit den Parametern:

$$E_L = -E_V = 0,4 \text{ eV}, \quad f_p = 1, \quad f_n = 10,$$

$$E_D = 0,25 \text{ eV} \quad \text{und} \quad N_{D1} = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

bei einer Temperatur  $T = 600^\circ \text{K}$  bestimmen (Figur 6). Zur Auflösung der Neutralitätsbedingung, welche hier lautet:

$$n_n = n_p + N_D - n_D, \quad (5)$$

tellen wir zunächst an den verschiedenen Leitern des Gerätes die die Eigenleitung charakterisierenden Parameter und die Temperatur ein. Nachdem wir zur Vervollständigung des Gerätes ein das ganze Grundblatt überdeckendes, mattiertes Zelluloidblatt fest an der Leiter  $y = \log n$  angebracht haben, zeich-

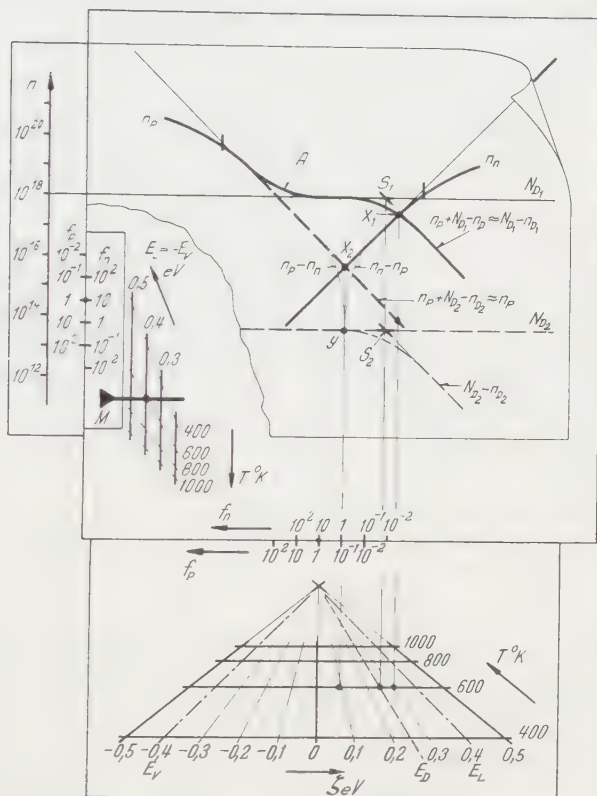


Fig. 6

n wir auf diesem die Gerade  $n = N_{D_1}$  und markieren darauf den Punkt  $(E_D, N_{D_1})$ . Jetzt können wir mit unserer Schablone die Kurve  $N_{D_1} - n_{D_1}$  auf das Deckblatt übertragen. Sie schneidet die Kurve  $n_n$  im Punkte  $X_1$  für den

$$n_n = N_{D_1} - n_{D_1}.$$

u der zur Abszisse des Punktes  $X_1$  gehörige Wert von  $n_p$  vernachlässigbar klein ist, gilt in der Umgebung von  $X_1$ :

$$n_p + N_{D_1} - n_{D_1} \approx N_{D_1} - n_{D_1}.$$

Das bedeutet aber, dass im Punkte  $X_1$  die Neutralitätsbedingung (5b) erfüllt ist. Wir finden daher den Gleichgewichtswert

$$\zeta = 0,31 \text{ eV}$$

der Fermi-Grenzenergie als Abszisse von  $X_1$ , und als Ordinate lesen wir auf dem  $y$ -Leiter die Konzentrationen

$$n_n \approx N_{D_1} - n_{D_1} = 2,9 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

ab. Die Gleichgewichtskonzentration  $n_p$  ( $\zeta = 0,31 \text{ eV}$ ) der Löcher ergibt sich zu:

$$n_p = 9,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass im allgemeinen grosse Teile der Kurve  $n_p + N_D - n_D$  durch  $n_p$  und durch  $N_D - n_D$  hinreichend approximiert werden. Nur dort, wo  $n_p \approx N_D - n_D$  ist, müssen wir den Verlauf von  $n_p + N_D - n_D$  neu bestimmen. Falls an dieser Stelle aber einerseits  $n_p$  nicht entartet und andererseits  $N_D - n_D \approx N_D$  ist, kann die Summenkurve mit der gedrehten  $(N_D - n_D)$ -Schablone gezeichnet werden (Bogen  $A$  in Figur 6). Analoges gilt im Falle eines Mangelleiters für die Kurve  $n_n + N_A - n_A$ .

Als zweites Beispiel ermitteln wir die Fermi-Energie in einem Überschussleiter, welcher sich nur durch die Konzentration

$$N_{D_1} = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

seiner Donatoren von dem eben betrachteten unterscheidet. Wir zeichnen die Kurve  $N_{D_2} - n_{D_2}$  in unser Gerät ein (Figur 6) und sehen, dass auf ihrem ganzen Verlauf

$$N_{D_2} - n_{D_2} \ll n_p$$

ist. Daher können wir die Neutralitätsbedingung (5b) näherungsweise wie folgt schreiben:

$$n_p + N_{D_2} - n_{D_2} \approx n_p = n_n.$$

Diese Bedingung ist im Schnittpunkt  $X_2$  der Kurven  $n_p$  und  $n_n$  erfüllt, und wir finden einen Gleichgewichtswert der Fermi-Grenze von

$$\zeta = 0,09 \text{ eV}.$$

Die zugehörigen Löcher- und Elektronenkonzentrationen sind:

$$n_p = n_n = 5,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3},$$

und die Zahl der ionisierten Donatoren ergibt sich als Ordinate des Punktes  $Y$  u:

$$N_{D_1} - n_{D_1} = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Die beiden in Figur 6 behandelten Beispiele stellen zwei Extremfälle dar: Während die Ladungsträgerkonzentrationen des zuerst betrachteten Halbleiters bei der Temperatur  $T = 600^\circ \text{ K}$  vollständig durch die Zahl der Donatoren und durch deren energetischen Abstand vom Leitungsband bestimmt sind, ergeben sie sich im zweiten Fall allein aus den die Eigenleitung kennzeichnenden Grössen.

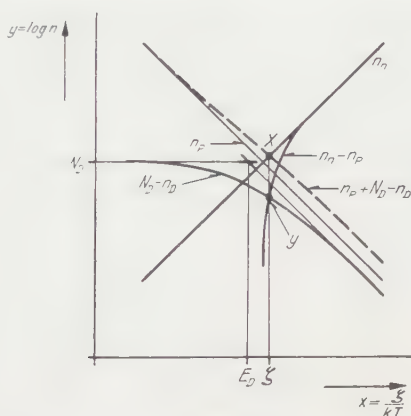


Fig. 7

Nun gibt es für jeden Störhalbleiter einen Temperaturbereich, in dem sich Stör- und Eigenleitung überdecken. In diesem Übergangsgebiet kommt es vor, dass sich zum Beispiel bei einem Überschussleiter die Kurve  $n_n$  und die Summenkurve  $n_p + N_D - n_D$  an einer Stelle schneiden, an welcher der nach rechts unten abfallende Ast der Kurve  $N_D - n_D$  beinahe mit der Geraden  $n_p$  zusammenfällt (Figur 7). Um den Schnittpunkt  $X$  zu finden, in welchem die Neutralitätsbedingung (5b) erfüllt ist, müssen wir dann die Kurve  $n_p + N_D - n_D$  Punkt für Punkt zeichnen. Wir können uns diese Arbeit jedoch ersparen, wenn wir die Kurve  $n_n - n_p$  im Geradenkreuz des Grundblattes einzeichnen und die Neutralitätsbedingung in der Form

$$n_n - n_p = N_D - n_D \quad (5c)$$

nach  $\xi$  auflösen. Die Bedingung (5c) ist im Punkte  $Y$  der Figur 7 erfüllt, und wir erkennen, dass  $X$  und  $Y$  dieselbe Abszisse besitzen, das heisst auf dasselbe

<sup>1)</sup> Die Kurve  $n_n - n_p$  behält ihre Form unabhängig von Halbleiterparametern und Temperatur, solange  $n_p$  und  $n_n$  nicht entartet sind.

$\zeta$  führen. Da Analoges auch für einen Mangelleiter gilt — hier müssen wir  $n_p - n_n$  mit  $N_A - N_D$  schneiden —, haben wir die Kurven  $n_n - n_p$  und  $n_p - n_n$  in Grundblatt des Gerätes eingezeichnet (Figuren 6 und 8). Man beachte, dass der Punkt Y in Figur 6 die Neutralitätsbedingung (5c) befriedigt.

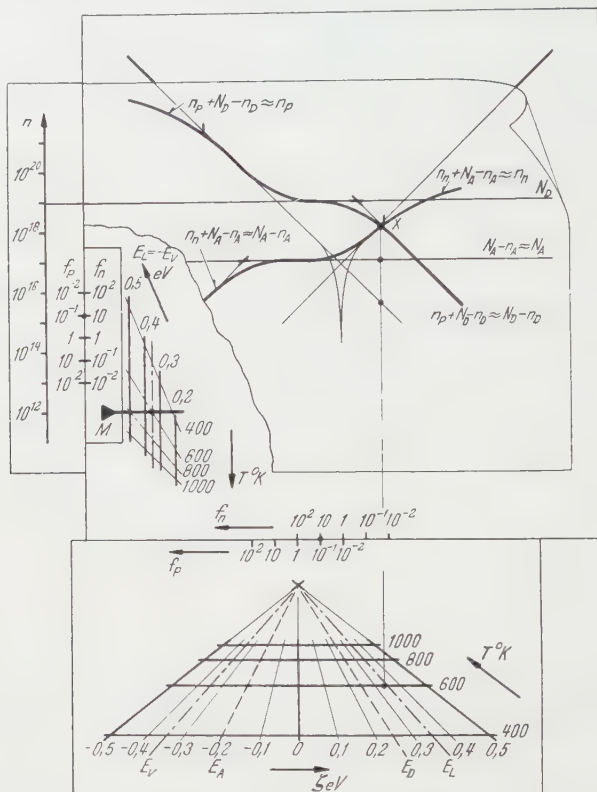


Fig. 8

Als letztes Beispiel haben wir in Figur 8 die Fermi-Grenze in einem sowohl Donatoren als auch Akzeptoren enthaltenden Störhalbleiter bestimmt. Die Parameter des betrachteten Halbleiters sind:

$$E_L = -E_V = 0,35 \text{ eV}, \quad f_p = 10^{-1}, \quad f_n = 10,$$

$$E_A = -0,2 \text{ eV}, \quad E_D = 0,25 \text{ eV}, \quad N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}, \quad N_D = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

und führen bei einer Temperatur  $T = 600^\circ \text{K}$  auf eine Fermi-Grenzenergie:

$$\zeta = 0,34 \text{ eV}.$$

Die Ladungsträgerkonzentrationen aber werden:

$$n_p = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3},$$

$$n_n = 1,3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3},$$

$$N_A - n_A = 1,0 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3},$$

$$N_D - n_D = 1,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}.$$

Damit ist gezeigt, dass das beschriebene Gerät auch für komplizierte Halbleiter rasch und bequem Fermi-Energie und Ladungsträgerkonzentrationen liefert.

## 6. Schluss

Nachdem wir an einigen Beispielen Konstruktion und Handhabung des  $\epsilon$ -Bestimmungsgerätes erläutert haben, bleibt uns zum Schluss, kurz dessen Vorteile aufzuzählen:

1. einfache und billige Konstruktion,
2. bequeme Handhabung,
3. rasches Ermitteln von Fermi-Energie und Ladungsträgerkonzentrationen,
4. universelle Verwendungsmöglichkeit,
5. Berücksichtigung der Entartung.

Diesen Vorzügen steht als einziger Nachteil die Tatsache gegenüber, dass der mit dem Gerät überdeckte Temperaturbereich wegen der temperaturabhängigen Länge der  $x$ -Leitern beschränkt ist. Dieser Nachteil kann indessen leicht durch Anfertigung auswechselbarer Skalen behoben werden.

Ich nehme gerne die Gelegenheit wahr, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. BUSCH, für Anregungen, die zur Konstruktion des Gerätes geführt haben, und Herrn Dr. J. WIELAND für viele wertvolle Diskussionen herzlich zu danken. Mein Dank gehört ferner der Eidgenössischen Kommission zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung für die Bereitstellung finanzieller Mittel.

## Summary

A computer is described which allows the Fermi-energy in a semiconductor to be calculated as a function of temperature and of the quantities characterizing the bandstructure. At the same time as determining the Fermi-energy the computer gives the temperature dependence of the concentration of charge carriers in any semiconductor, whatever the degree of degeneracy of the charge carriers in the valence- and conduction band and in impurity levels.

Eingegangen: 6. September 1953.)



# Beeinflussung der Charakteristik einer Cs-Sb-Photokathode durch Zusatz fremder Elemente

VON NORBERT SCHAETTI, Zürich<sup>1)</sup>

## I. Der Dunkelstrom von Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern

In zwei Arbeiten [1], [2]<sup>2)</sup> über den Dunkelstrom von Li-Sb- und Cs-Sb-Photokathoden mit Sekundärelektronenvervielfachern konnte gezeigt werden, dass dieser Dunkelstrom keinen von der Belichtung der Photokathode unabhängigen Wert besitzt. Eine Komponente, die thermische Emission der Photokathode, ist nach Belichtung des Photomultipliers grösser und fällt nach einer gewissen Zeit auf den Ausgangswert zurück.

Die Messungen wurden an Photomultipliern mit 17 Dynoden bei einer Verstärkung von  $1 \cdot 10^8$  durchgeführt. Die Durchsichtskathoden dieser Vervielfacher besitzen eine ausnutzbare Fläche von etwa  $10 \text{ cm}^2$ . Die Dynoden bestehen aus einer Legierung von Cu-Be [3]. Bei der gewählten Verstärkung werden alle an der Photokathode ausgelösten Elektronen gezählt. Die Impulse des Vervielfacher werden über einen Verstärker ( $I_{\text{max}} = 10^3$ ) einem Untersetzungsgerät zugeführt, der eine maximale Untersetzung von  $2^{15}$  gestattet.

Alle Messungen wurden so durchgeführt, dass der Vervielfacher bei spannungslosem Dynodensystem mit einer Wolframlampe belichtet und anschliessend der Dunkelstrom der Röhre verfolgt wurde.

Die sowohl an Li-Sb- als auch an Cs-Sb-Kathoden gewonnenen Resultate sind die folgenden:

### 1. Erhöhung der Nullstosszahl durch Belichtung der Photokathode

Die Photokathoden wurden mit einer konstanten Lichtintensität belichtet und dabei die Belichtungszeiten von 1–300 s variiert. Figur 1 zeigt den Verlauf der Nullstosszahlerhöhung in Funktion der Belichtungszeit von 1–180 s. Aufgetragen ist die zusätzliche Nullstosszahl, welche in der zweiten Minute nach Belichtungsende gemessen wurde. Die Kurven zeigen einen Sättigungswert. Für Cs-Sb werden dabei bedeutend höhere Nullstosszahlen erreicht als für Li-Sb.

### 2. Erhöhung der Rotausbeute der Cs-Sb-Kathoden durch Belichtung

Die Photokathoden wurden mit Licht der Wellenlänge  $801 \text{ m}\mu$  belichtet, eine Lichtwellenlänge, die keine Erhöhung des Nulleffektes zur Folge hat, dann

<sup>1)</sup> Institut für technische Physik an der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 459.

wurde die Ausbeute gemessen. Sodann wurde die Kathode bei spannungslosem Vervielfacher mit Weisslicht belichtet (Vorbelichtung) und anschliessend der Verlauf des Nulleffektes und der Rotausbeute gemessen. Figur 2 zeigt das Resultat. Unmittelbar nach der Vorbelichtung ist die Rotausbeute der Kathode bedeutend höher als der Normalwert. Mit dem Abfallen der zusätzlichen Nullstösse geht auch die Rotausbeute wieder auf den Normalwert zurück.

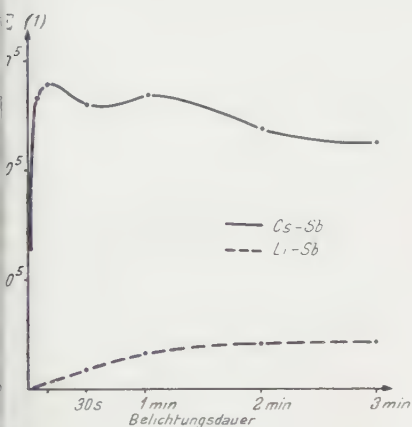


Fig. 1

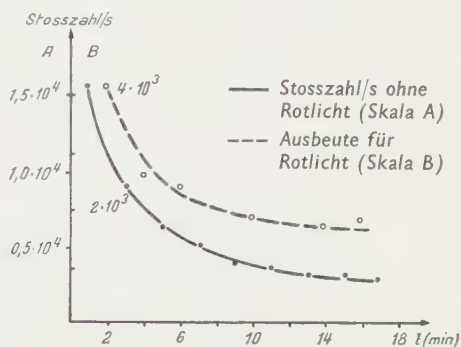


Fig. 2

### 3. «Ausleuchten» der vorbelichteten Photokathode mit Rotlicht

Eine Li-Sb-Photokathode wurde 3 min mit Blaulicht der Wellenlänge  $20 \text{ m}\mu$  vorbelichtet, und 2 min später wurde Spannung an die Röhre gelegt und die Erhöhung der Nullstosszahl gemessen (Kurve A in Figur 3). Anschliessend wurde diese Kathode wieder gleich vorbelichtet und ebenfalls ohne Spannung 1,5 min mit Licht der Wellenlänge  $801 \text{ m}\mu$  belichtet. 0,5 min später, also wiederum 2 min nach der Vorbelichtung mit Blaulicht, wurde Spannung an die Röhre gelegt und die Nullstosszahlerhöhung gemessen (Kurve B). Die Zahl der zusätzlichen Nullstösse war im zweiten Versuch kleiner. Es liegt somit ein Effekt vor, der an die Ausleuchtung und Tilgung gewisser Phosphore bei Infrarotbestrahlung erinnert.

### 4. Abhängigkeit der Erhöhung der Nullstosszahl von der Wellenlänge der Vorbelichtung

Die Cs-Sb-Kathode wurde mit Licht verschiedener Wellenlänge vorbelichtet und die resultierende Nullstosszahlerhöhung gemessen. Figur 4 zeigt den Verlauf für auf gleiche Energie reduzierte Lichtintensitäten.

### 5. Erhöhung der Leitfähigkeit der Cs-Sb-Schicht durch Belichtung [4]

Die untersuchte Cs-Sb-Kathode wurde in einer zylindrischen Zelle zwischen zwei Silberringen formiert [5]. Sie wurde ohne Spannung vorbelichtet, und

1 min nach Belichtung wurde ihre Leitfähigkeit gemessen. Eine Belichtung erhöht die Leitfähigkeit der Cs-Sb-Schicht. In Abhängigkeit der Belichtungsdauer wird ein Sättigungswert für die Leitfähigkeit erreicht.

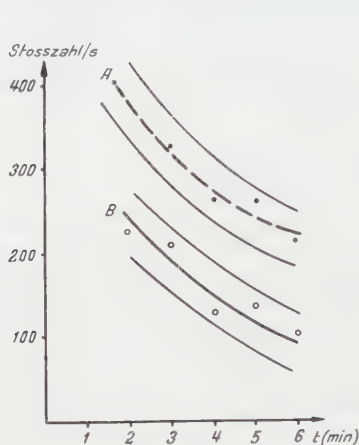


Fig. 3

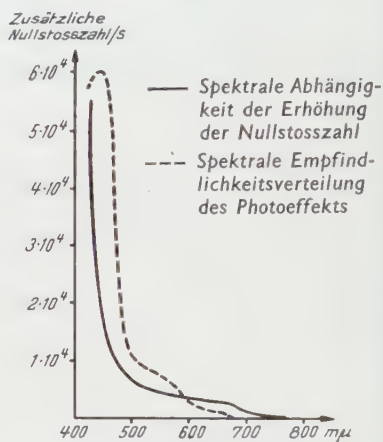


Fig. 4

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

1. Durch Belichtung wird die Nullstosszahl einer Cs-Sb- und Li-Sb-Photokathode erhöht. Die Erhöhung der Nullstosszahl in Funktion der Belichtungsdauer zeigt Sättigung.
2. Durch Belichtung wird die Leitfähigkeit der Kathode erhöht. In Abhängigkeit der Belichtungsdauer zeigt diese Erscheinung ebenfalls Sättigung.
3. Nach Belichtung zeigt die Photokathode eine erhöhte Rotempfindlichkeit, die im Dunkeln mit der Nullstosszahl wieder auf den Normalwert abklingt.
4. Das Abklingen der Nullstösse einer vorbelichteten Photokathode kann durch Belichtung mit Rotlicht beschleunigt werden (Ausleuchtungseffekt).
5. Die spektrale Abhängigkeit der Nullstosszahlerhöhung und des Photoeffekts ist für  $400 \text{ m}\mu < \lambda < 800 \text{ m}\mu$  im wesentlichen gleich. In der Nähe der langwelligen Grenze ist die Nullstosszahlerhöhung ausgeprägter.

## II. Deutungsversuch

Die Cs-Sb-Photokathode zeigt Halbleitereigenschaften [6], [7]. Im Bloch'schen Bändermodell dieser Kathode entstammen die Photoelektronen dem Valenzband. Durch Lichtabsorption in der Cs-Sb-Schicht werden sie aus diesem Band in das Leitfähigkeitsband gehoben, aus welchem sie ohne weiteren Energiebedarf ins Vakuum austreten können [8].

Die beobachteten Nachwirkungserscheinungen deuten auf das Vorhanden- in von metastabilen Störstellen innerhalb der verbotenen Zone zwischen lenz- und Leitfähigkeitsband hin. Das auf diese Weise ergänzte Modell eser Photokathode würde alle beachteten Erscheinungen erklären.

### III. Beeinflussung der Charakteristik einer Cs-Sb-Photokathode

Unter «Charakteristik» einer Photokathode sollen die folgenden vier Daten sammengefasst werden:

- Empfindlichkeit ( $\mu\text{A}/\text{Lumen}$ );
- spektrale Empfindlichkeitsverteilung;
- Nullstosszahl  $N_0$  für eine gegebene Temperatur;
- Nullstosszahlerhöhung  $\Delta N$  für eine gegebene Belichtungsintensität und -dauer.

as Ziel der nachfolgenden Untersuchungen war, die Charakteristik der Cs-Sb- otokathode derart zu beeinflussen, dass ohne nennenswerte Veränderung r beiden ersten Daten  $\Delta N \rightarrow 0$  gebracht wird. Dazu wurde der Einfluss von isätzen fremder Elemente untersucht und die normale Cs-Sb-Photokathode rch eine Kathode vom Typus Cs-Sb,El ersetzt, wobei El irgendein Element s periodischen Systemes bedeutet.

### IV. Versuchstechnik

In Graphittiegeln wurde Antimon in flüssigem, reinstem Kaliumchlorid ter Luftabschluss geschmolzen. Der Schmelze wurde das zu untersuchende ement in verschiedenen Konzentrationen beigegeben. Das auf diese Weise wonnene Stoffsystem wurde an Stelle des einfachen Antimons als die eine omponente der Cs-Sb,El-Kathode aus einer Wolframspirale auf die Glaswand s Vervielfachers aufgedampft. Bei diesem Vorgehen sind zwei Punkte zu rücksichtigen:

1. Der Schmelzprozess des Antimons im flüssigen KCl beeinflusst an sich on die Nachwirkungserscheinungen der Photokathode. Der Sättigungswert r Nullstosszahlerhöhung fällt infolge dieses Prozesses auf die Hälfte, der rmalwert des Nullstromes der Photokathode auf 25% des mittleren Wertes er gewöhnlichen Cs-Sb-Kathode.

2. Nach dem Aufdampfen des Stoffsystems (Sb,El) auf die Glaswand des otomultipliers kann über die genaue Zusammensetzung der Schicht nichts gesagt werden. Spätere Versuche mit einem geeigneten Element sollen arheit über den Einfluss der Konzentration des Zusatzelementes geben.

Das verwendete Zäsium wurde im Vakuum in Ampullen eindestilliert. Die Ampulle befand sich in einem seitlichen Ansatz des Vervielfachers und wurde ch dem Ausheizen der Röhre geöffnet.

Bis zum Zeitpunkt der Abfassung dieses Berichtes sind insgesamt 18 Zusatzzelemente untersucht worden. Mit jedem Zweistoffsystem wurden zuerst zwei einfache Photozellen hergestellt und an diesen das Formierungsverfahren festgelegt. Anschliessend erfolgte die Herstellung von ein bis zwei 17stufigen Sekundärelektronenvervielfachern, an welchen die Charakteristik der einzelnen Kathoden untersucht wurde.

Die Nullstossmessungen erfolgten bei allen Röhren mit einer Verstärkung von  $1 \cdot 10^8$ , so dass die gewonnenen Resultate unmittelbar miteinander verglichen werden können. Zur Kontrolle der Reproduzierbarkeit der Messungen wurden vier verschiedene Vervielfacher mit normaler Cs-Sb-Photokathode ausgemessen.

## V. Messungsergebnisse

### 1. Untersuchung von vier Cs-Sb-Vervielfachern

Figur 5 zeigt die Erhöhung der Nullstosszahlen in Funktion der Belichtungsdauer für die vier Vervielfacher mit normaler Cs-Sb-Photokathode. Der Sättigungswert aller vier Kathoden ist nahezu gleich, somit charakteristisch für die betreffende Kathode. Unterschiedlich sind jedoch die Anstiege zu diesen Sättigungswerten. Dieser ist also nicht typisch für die Cs-Sb-Schicht, sondern offenbar vom Formierungsgang abhängig.

Tabelle 1 gibt eine Zusammenstellung der entsprechenden Daten dieser vier Kathoden.

Tabelle 1

Kathode	Sättigungswert $N/\text{min}$	Anstiegszeit s	Nullstosszahl $N_0/s$
Cs-Sb (1)	$13,5 \cdot 10^5$	10	3200
Cs-Sb (2)	$12,5 \cdot 10^5$	80	2560
Cs-Sb (3)	$13,8 \cdot 10^5$	90	2560
Cs-Sb (4)	$13,0 \cdot 10^5$	180	1920
Cs-Sb (M) <sup>1)</sup>	$13,2 \cdot 10^5$	90	2560
<sup>1)</sup> Mittelwert der vier Messungen.			

### 2. Der Einfluss eines Zusatzelementes

Die untersuchten Elemente lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

- Elemente, welche die Empfindlichkeit der Cs-Sb-Kathode herabsetzen
- Elemente, welche auf die Empfindlichkeit der Ausgangskathode keinen wesentlichen Einfluss haben, sondern in einigen Fällen nur die spektrale Empfindlichkeitsverteilung der Cs-Sb-Kathode etwas ändern.



a) *Schädliche Elemente.* Von den untersuchten Elementen gehören nur zwei der ersten Gruppe: Zn und Cd. In beiden Fällen betrug der Anteil des Zuzutelementes 10 Gewichtsprozent.

Zn: Die Cs-Sb,Zn-Kathode zeigte in keinem Formierungsstadium irgendeine lichtelektrische Empfindlichkeit.

Cd: Ein Cd-Zusatz unterdrückt das Empfindlichkeitsmaximum der Cs-Sb-Kathode im blauen Spektralbereich. Die langwellige Grenze wird durch diesen

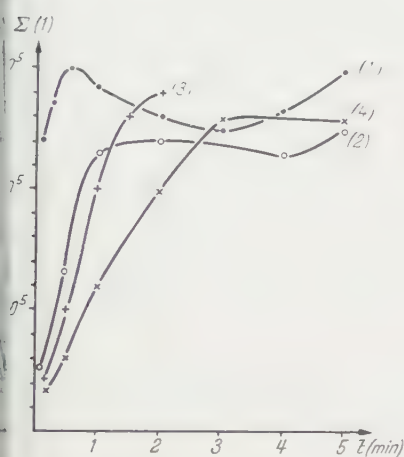


Fig. 5

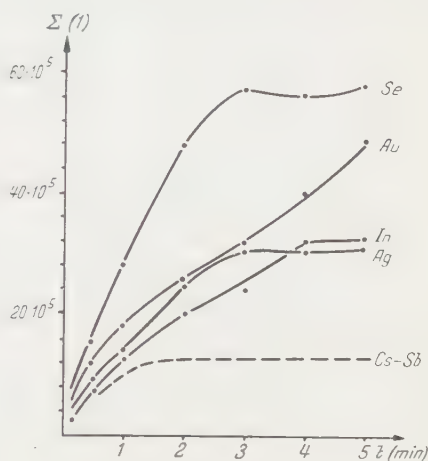


Fig. 6

satz weiter nach Rot verschoben. Es entsteht eine Photokathode, welche über das ganze sichtbare Spektrum eine gleichmässige, geringe lichtelektrische Ernte aufweist. Die Cs-Sb,Cd-Kathode ist nicht brauchbar.

b) *Elemente ohne Einfluss auf die Empfindlichkeit der Cs-Sb-Photokathode.* Aus der beschriebenen Versuchstechnik lassen sich diese Elemente in bezug auf ihren Einfluss auf die Nachwirkungserscheinungen in folgende drei Untergruppen einteilen:

1a) Elemente, welche den Sättigungswert der zusätzlichen Nullstösse erhöhen;

2a) Elemente, welche einen ähnlichen Sättigungswert ergeben wie die normale Cs-Sb-Photokathode;

3a) Elemente, welche den Sättigungswert erniedrigen. Es sind die Elemente der dritten Untergruppe, welche eine Verbesserung mit sich bringen.

1a) *Elemente, welche den Sättigungswert der zusätzlichen Nullstösse erhöhen.* Zu diesen Elementen gehören: Se, Au, In und Ag. Figur 6 zeigt den Verlauf der zusätzlichen Nullstosszahlen in Funktion der Belichtungsdauer für die verschiedenen Kathoden dieser Gruppe. Für die Cs-Sb-Kathode ist die mittlere



Kurve gestrichelt eingezeichnet. Tabelle 2 gibt die Gewichtsprozent des Zusatzes, die Normalnullstosszahl sowie die Nullstosszahlerhöhung für die Wellenlänge  $\lambda = 420 \text{ m}\mu$  wieder (Lichtintensität für  $\lambda = 420 \text{ m}\mu$  rund 1% derjenigen für Weisslicht, Belichtungsdauer 1 min).

Tabelle 2

Kathode	Gewichtsprozent des Zusatzes	Normalnullstosszahl $N_0/s$	$\Delta N \lambda = 420 \text{ m}\mu$ $N/\text{min}$
Cs-Sb	—	2560	$5,3 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Se	2	2900	$5,9 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Au	5	1920	$4,1 \cdot 10^5$
Cs-Sb, In	10	1280	$1,8 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Ag	50	2550	$2,0 \cdot 10^5$

Für geringe Lichtintensitäten zeigen diese Kathoden, mit Ausnahme der Cs-Sb,Se-Kathode, eine kleinere Nullstosszahlerhöhung als die mittlere Erhöhung der Cs-Sb-Kathode.

2a) *Elemente mit unverändertem Sättigungswert.* Es sind die Zusatzelemente Al, Sn, Cu und Ce. Figur 7 gibt den Verlauf der Nullstosszahlerhöhung für die Gruppe von Kathoden, Tabelle 3 die der vorangehenden Tabelle entsprechenden Grössen.

Tabelle 3

Kathode	Gewichtsprozent des Zusatzes	Normalnullstosszahl $N_0/s$	$\Delta N \lambda = 420 \text{ m}\mu$ $N/\text{min}$
Cs-Sb	—	2560	$5,3 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Al	5	1900	$1,0 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Sn	50	640	$0,73 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Cu	50	500	$0,53 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Ce	10	190	$0,41 \cdot 10^5$

Die Kurven dieser Elementengruppe zeigen alle einen flacheren Anstieg zum Sättigungswert als die mittlere Cs-Sb-Kurve. Die beiden Elemente Cu und Sn bewirken eine bedeutende Reduktion der Nullstosszahlerhöhung bei geringen Lichtintensitäten verbunden mit einer starken Reduktion der Normalnullstosszahl. Diese ist von derselben Grössenordnung wie für die Li-Sb-Kathode.

3a) *Elemente, welche den Sättigungswert der Nachwirkung erniedrigen.* Unter diese Elementengruppe gehören: Ca, Mn, Sr, Be, Tl und Mg. Figur 8 zeigt den Verlauf der zusätzlichen Nullstosszahlen, Tabelle 4 gibt die übrigen Daten.

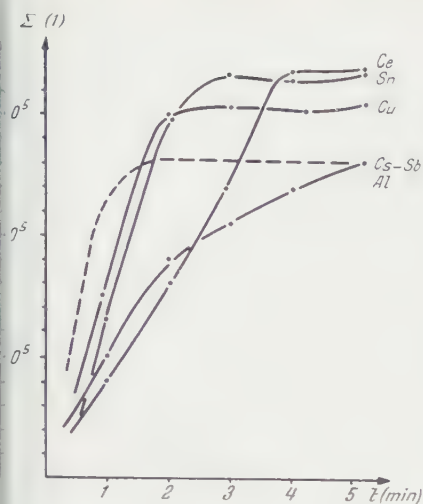


Fig. 7

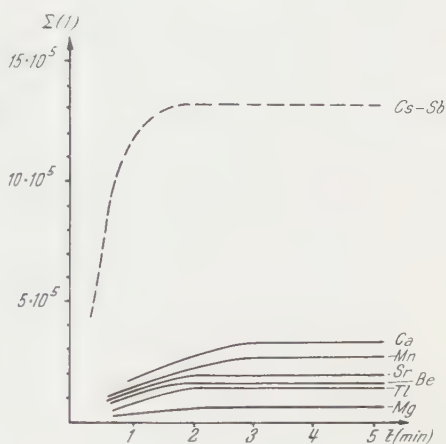


Fig. 8

Tabelle 4

Kathode	Gewichtsprozent des Zusatzes	Normalnullstoss- zahl $N_0/s$	$\Delta N \lambda = 420 \text{ m}\mu$ $N/\text{min}$
Cs-Sb	—	2560	$5,3 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Ca	10	450	$0,12 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Mn	30	450	$0,20 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Sr	8	300	$0,09 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Be	10	190	$0,10 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Tl	10	65	$0,10 \cdot 10^5$
Cs-Sb, Mg	25	120	$0,10 \cdot 10^5$

Für einen Mg-Zusatz fällt die Nullstosszahlerhöhung für Weisslicht auf 4% des Cs-Sb-Wertes, für Blaulicht auf 1,9%. Die Normalnullstosszahl fällt für einen Zusatz auf 5%, für Tl sogar auf 2,5%.

### 3. Rotausbeute der Kathoden

Messungen bei einer Wellenlänge von  $660 \text{ m}\mu$  zeigen, dass die Ausbeuten bei dieser Wellenlänge für die verschiedenen Kathoden wie 1:10 schwanken. Die kleinste Rotausbeute zeigt die Kathode mit Mg-Zusatz, die höchste die Kathode mit Au-Zusatz.

#### 4. Totalausbeuten der Kathoden

Die Ausbeuten für Weisslicht schwanken wie 1:2. Die Schwankung liegt somit in der normalen Grenze. Es ist insbesondere keine systematische Abnahme der Ausbeute der Kathoden der ersten Gruppe zu denjenigen der dritten festzustellen.

### VI. Zusammenstellung

Tabelle 5 gibt eine Zusammenstellung der Daten der untersuchten Kathoden:

Tabelle 5

Kathode	Sättigungswert $N/\text{min}$	Anstiegszeit s	Normalnullstrom $N_0/s$
Cs-Sb, Se	$57,3 \cdot 10^5$	180	2900
Cs-Sb, Au	$49,1 \cdot 10^5$	300	1920
Cs-Sb, In	$32,7 \cdot 10^5$	240	1280
Cs-Sb, Ag	$31,9 \cdot 10^5$	180	2550
Cs-Sb (1)	$13,5 \cdot 10^5$	10	3200
Cs-Sb (2)	$12,5 \cdot 10^5$	80	2560
Cs-Sb (3)	$13,8 \cdot 10^5$	90	2560
Cs-Sb (4)	$13,0 \cdot 10^5$	180	1920
Cs-Sb, Ce	$17,0 \cdot 10^5$	240	190
Cs-Sb, Sn	$16,8 \cdot 10^5$	180	640
Cs-Sb, Cu	$15,5 \cdot 10^5$	120	500
Cs-Sb, Al	$13,2 \cdot 10^5$	150	1900
Cs-Sb, Ca	$3,3 \cdot 10^5$	180	450
Cs-Sb, Mn	$2,8 \cdot 10^5$	180	450
Cs-Sb, Sr	$2,0 \cdot 10^5$	120	300
Cs-Sb, Be	$1,6 \cdot 10^5$	90	190
Cs-Sb, Tl	$1,5 \cdot 10^5$	120	65
Cs-Sb, Mg	$0,57 \cdot 10^5$	120	120

Die Tabelle deutet folgende zwei Gesetzmässigkeiten an:

a) Mit Abnahme des Sättigungswertes der zusätzlichen Nullstösse nimmt ebenfalls der Nullstrom der Kathode ab.

b) Bei gleichem Sättigungswert weist diejenige Kathode den kleineren Nullstrom auf, die die längere Anstiegszeit zur Sättigung der zusätzlichen Nullstösse zeigt.

Die umfangreichen Untersuchungen sind zum grössten Teil mit Mitteln der GFF., aber auch mit solchen der Eidgenössischen Volkswirtschaftsstiftung durchgeführt worden.

Ich spreche an dieser Stelle diesen beiden Institutionen meinen besten Dank aus. Gleichfalls danke ich Herrn CH. FLURY für die Mitarbeit bei der Durchführung der Messungen.

# LITERATURVERZEICHNIS

- [1] N. SCHAEETTI und W. BAUMGARTNER, *Helv. Phys. Acta* 25, 605 (1952).
- [2] N. SCHAEETTI, W. BAUMGARTNER und CH. FLURY, *Helv. Phys. Acta* 26, 380 (1953).
- [3] N. SCHAEETTI, *ZAMP* 2, 123 (1951).
- [4] N. SCHAEETTI und W. BAUMGARTNER, *ZAMP* 4, 159 (1953).
- [5] N. SCHAEETTI und W. BAUMGARTNER, *Le Vide* 6, 1041 (1951).
- [6] V. K. ZWORYKIN und E. G. RAMBERG, *Photoelectricity and its Application* (John Wiley & Sons, New York 1949), S. 58.
- [7] N. SCHAEETTI und W. BAUMGARTNER, *Helv. Phys. Acta* 24, 614 (1951).
- [8] L. APKER, E. TAFT und J. DICKEY, *IOSA* 43, 78 (1953).

## Summary

The investigations on dark current in photomultipliers with Cs-Sb- and -Sb-photocathodes indicate that these cathodes show a delayed emission of electrons after each exposition to light. The addition of a certain number of elements to the cathode-layer reduces this delayed emission and at the same time the dark current of the photocathode.

Eingegangen: 24. September 1953.)

## Zur Kenntnis der Dampfdrucke von Zäsium-, Rubidium- und Kaliumchlorid

Von W. D. TREADWELL und WALTER WERNER, Zürich<sup>1)</sup>

Die Dampfdrucke der festen Alkalichloride beanspruchen im Hinblick auf die gut bekannten Eigenschaften ihrer Gitter spezielles Interesse. Druckwerte bei möglichst tiefen Temperaturen sind hierbei besonders erwünscht. Von mehreren Salzen dieser Gruppe liegen auch bereits zahlreiche Messungen der Dampfdrucke im Vakuum vor, die nach verschiedenen Methoden gewonnen worden sind.

DEITZ<sup>2)</sup> hat auf Veranlassung von RODEBUSH<sup>3)</sup> Sublimationsdrucke von CsCl und CsJ gemessen, im gleichen Temperaturgebiet, in welchem die Dipolmomente bestimmt worden waren. Die erste Methode von DEITZ bestand in der absoluten Messung des Dampfdruckes der Kristalle gegen eine dünne Aluminiummembran, an einer elektromagnetischen Waage. In demselben Vakuumgefäß

<sup>1)</sup> Laboratorium für anorganische Chemie, ETH.

<sup>2)</sup> V. DEITZ, *J. chem. Phys.* 4, 578 (1936).

<sup>3)</sup> E. F. FLOCK und W. H. RODEBUSH, *J. Amer. chem. Soc.* 48, 2522 (1926).

wurden auch Bestimmungen nach der Ausströmungsmethode von KNUDSEN<sup>1)</sup> vorgenommen. Das Ausströmen des Dampfes erfolgte aus einem Quarzgefäß mit enger Öffnung, von der die Länge des Kanals bei der Berechnung der Austrittsmenge des Gases berücksichtigt wurde. Die Masse des ausgeströmten Dampfes wurde aus dem Gewichtsverlust des Salzbehälters in passend gewählten Zeitintervallen bestimmt.

Die Berechnung des Druckes erfolgte nach der Gleichung:

$$p = \frac{m}{t} \left( \frac{2 \pi R T}{M} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{A} + \frac{3 L}{2 \pi D^3} \right). \quad (1)$$

Hierin bedeuten:  $m$  die Masse des in der Zeit  $t$  ausgeströmten Dampfes,  $M$  das Molekulargewicht desselben,  $T$  die absolute Temperatur,  $A$  den Querschnitt der Ausströmungsöffnung,  $L$  die Länge des Ausströmungskanals und  $D$  der Durchmesser desselben. Das letzte Glied der Gleichung, welches die Wandstärke der Ausströmungsöffnung berücksichtigt, macht etwa 5% von  $1/A$  aus, wenn  $L$  nicht über  $1/7$  von  $D$  beträgt. Bei hinreichend dünner Wandung der Ausströmungsöffnung kommt der zweite Summand von Gleichung (1) in Wegfall, und man erhält die ursprünglich von KNUDSEN benutzte Gleichung.

Bei der erstgenannten Methode lieferten nur die Pulver der zuvor eingeschmolzenen und dadurch gasfrei gemachten Salze reproduzierbare Werte, die sich die eingeschlossenen Gase an der Druckwirkung auf die Aluminiummembran beteiligten und dadurch 10–30% zu hohe Druckwerte lieferten. Mit den entgasten Salzpulvern wurden nach beiden Methoden übereinstimmende Druckwerte erhalten. Die Drucke von KCl, welche im Temperaturbereich von 574–664° gemessen worden waren, ließen sich gut durch:

$$\log p_{(\text{Dyn})} = -\frac{11,300}{T} + 13,361 \quad (2)$$

darstellen.

MAYER und HÖLDER-WINTNER<sup>2)</sup> haben die Tensionen von einer Reihe fester Alkalichloride nach der Effusionsmethode von KNUDSEN ermittelt, wobei die aus einer kreisförmigen Öffnung ins Vakuum austretenden Dämpfe des Salzpulver in gemessenen Zeiten auf einer kalten Fläche kondensiert und bestimmt wurden. So wurden die Tensionen von KCl und RbCl in den Temperaturbereichen von 899,4–935,3° K bzw. 888,0–925,6° K gemessen.

ZIMM und MAYER<sup>3)</sup> haben die Tensionen von einigen Alkalihalogeniden nach der Ionisationsmethode von LANGMUIR<sup>4)</sup> bestimmt. Die bei gemessener Temperatur aus einem Salzbehälter mit feiner Öffnung ins Vakuum austretenden Dämpfe werden hierbei an einem hocherhitzten Wolframdraht von bekannten

<sup>1)</sup> M. KNUDSEN, Ann. Physik 47, 697 (1915).

<sup>2)</sup> J. E. MAYER und IRMGARD HÖLDER-WINTNER, J. chem. Phys. 6, 301 (1938).

<sup>3)</sup> B. H. ZIMM und J. E. MAYER, J. chem. Phys. 12, 362 (1944).

<sup>4)</sup> I. LANGMUIR, Phys. Rev. 51, 753 (1937).

Leizfläche total dissoziiert und die gebildeten Metallatome ionisiert. Durch Anlegen eines geeigneten Feldes werden die Atomionen von einem Kollektor eingefangen und die hierdurch entstehende Stromstärke gemessen. Bei vollständiger Spaltung der Salzdämpfe und totaler Ionisation der Metallatome wird der Ionenstrom zum Kollektor dem Dampfdruck des Salzes proportional. Dabei muss jedoch das zum Kollektor angelegte Feld so bemessen sein, dass an diesem noch keine Ionenbildung durch Stosswirkung hervorgerufen wird. Es bestehen auch noch andere Möglichkeiten einer zusätzlichen Ionenbildung, welche bei dieser Methode leicht zu positiven Fehlern der Salzdampfdrucke Anlass geben können. Bei optimalen Versuchsbedingungen (geeignete Wahl der Temperatur des Glühdrahtes und des Feldes zum Kollektor) lässt sich der Dampfdruck des Salzes durch die Gleichung:

$$p = \left[ N R^2 (2 \pi m k T)^{1/2} \frac{1}{r^2 A F} \right] i \quad (3)$$

ausdrücken.

Hierin bedeuten:  $N$  die Avogadrosche Zahl,  $R$  die Distanz der Austrittsöffnung des Dampfstrahls von dem Wolframfaden,  $m$  die Masse eines Dampf-moleküls,  $k$  die Boltzmannsche Konstante,  $T$  die absolute Temperatur,  $r$  der Radius von der Austrittsöffnung des Dampfes,  $A$  die Planprojektion des ionisierenden Wolframfadens,  $F$  die Faradaysche Konstante und  $i$  der zwischen dem Wolframfaden und dem Kollektor gemessene Strom.

Wir haben nun die Mitführungsmethode unter Verwendung von reinem Stickstoff als Transportgas bei CsCl, RbCl und KCl im Gebiet kleiner Drucke geprüft, so dass ein Vergleich mit den obenerwähnten Daten möglich wurde.

Bei der Verdampfung von Quecksilber im Vakuum hatte KNUDSEN<sup>1)</sup> beobachtet, dass die gaskinetisch zu erwartende Verdampfungsgeschwindigkeit nur mit reinsten, frisch hergestellten Oberflächen erreicht wird. Schon geringe Verunreinigungen der Oberflächen genügten, um die Verdampfungsgeschwindigkeit auf 2 1000 des theoretischen Wertes herabzusetzen. Wie weit die Verdampfungsgeschwindigkeit der Alkalichloride durch ein Mitführgas von Atmosphärendruck (in unserem Fall von Stickstoff) gehemmt wird, war nicht voraussehen.

Die Versuche von COCKROFT<sup>2)</sup> über die Kondensation von Kadmiumdämpfen haben gezeigt, dass zur Kondensation derselben eine charakteristische Überhitzung erforderlich ist, um die Energie der Keimbildung aufzubringen. Zumindest auf gasbedeckten Oberflächen erweist sich diese Energie als recht beträchtlich. BEECK, SMITH und WHEELER<sup>3)</sup> beobachteten bei der Kondensation von Nickelampf an Glas, die im Vakuum regellos erfolgt, dass sich in Gegenwart eines geringen Stickstoffdruckes die (110)-Fläche des Nickels parallel zur Glaswand

<sup>1)</sup> M. KNUDSEN, Ann. Physik 47, 697 (1915).

<sup>2)</sup> J. D. COCKROFT, Proc. Roy. Soc. [A] 119, 293 (1928).

<sup>3)</sup> O. BEECK, A. E. SMITH und A. WHEELER, Proc. Roy. Soc. [A] 177, 62 (1941).



orientiert, womit eine Verzögerung in der Abscheidung des Nickels durch den anwesenden Stickstoff verbunden sein dürfte.

Auch bei unsern Mitführungsversuchen erfolgte die Kondensation der Salzdämpfe in der Form von gut ausgebildeten, separaten kleinen Kriställchen offenbar an diskreten aktiven Stellen der Oberfläche des Kühlers. Ob bei einem derartigen Verlauf der Kondensation eine eng lokalisierte vollständige Abscheidung der Salzdämpfe aus dem Transportgas möglich ist, sollte durch unsere Versuche geprüft werden. Durch unvollständige Mischung des Salzdampfes mit dem Transportgas und durch unvollständige Kondensation infolge von Nebelbildung können offenbar bei der Mitführungsmethode negative Fehler entstehen.

### *Experimentelles*

Figur 1 zeigt unsere Sublimationsapparatur. In die Quarzpipette von 15 mm Weite ist die rund  $1/20$  Mol betragende Salzprobe eingefüllt. Mit zwei Sieben von 36 und 100 Maschen pro Quadratzentimeter wurde das Salz zuvor auf möglichst gleiche Korngrösse gebracht. Von unten wird gereinigter und über Phosphorpentoxyd getrockneter Stickstoff in gemessenem Tempo eingeleitet und durch eine zentral angeordnete, auswechselbare Quarzkapillare zum Messgefäss für den Stickstoff abgeleitet. Die Temperatur der Dämpfe wurde bei S mit dem Thermoelement  $T_1$  gemessen, das mit reinstem Zink und Kadmiurn und mit der bei  $637^\circ\text{C}$  schmelzenden Mischung von  $30,5\%$  NaCl –  $96,5\%$   $\text{Na}_2\text{SO}_4$  geeicht worden war. Mit Hilfe eines Thermoregulators, der durch das Thermoelement  $T_2$  betätigt wurde, konnte die Temperatur bei S auf  $\pm 1^\circ\text{C}$  konstant gehalten werden.

Mit einem empfindlichen Strömungsmesser wurde die gewünschte Stromgeschwindigkeit des Stickstoffs eingestellt. Das Gas wurde in einem als Eudiometer dienenden, geeichten Kolben von  $3135\text{ cm}^3$  über Wasser aufgefangen und sein Volumen entsprechend der Temperatur des Rezipienten und dem herrschenden Barometerstand auf  $0^\circ$  und 760 mm Hg reduziert.

Das Gas perlte durch eine Kapillare in gleichmässigem Strom in den Rezipienten. Da derselbe nur 5 mm in die Sperrflüssigkeit eintauchte, herrschte während der ganzen Versuchsdauer in der Apparatur Atmosphärendruck. Um eine vollständige Sättigung des Stickstoffs mit den Salzdämpfen zu gewährleisten, wurde nur mit Stromgeschwindigkeiten des Stickstoffs von  $3\text{--}20\text{ cm}^3/\text{min}$  gearbeitet, wobei die Füllung des Rezipienten mit dem Stickstoff Versuchs dauern bis über 24 h beanspruchen konnte.

Die Kondensation der Salzdämpfe erfolgte zur Hauptmenge im oberen Viertel der 2 mm weiten Kapillare, meist in der Form von gut ausgebildeten kubischen Kriställchen.

Das Sublimat wurde mit doppelt destilliertem Wasser aus der Kapillare herausgelöst und der Gehalt durch elektrometrische Titration mit  $0,01\text{-}n$  bzw.

0,001-*n* AgNO<sub>3</sub> in einem Volumen von 1–2 cm<sup>3</sup> bestimmt, wobei die Salzmenge auf 2–3 µg genau ermittelt werden konnte, während die Kondensate meist weit mehr als das Hundertfache betrug.

Zur Bestimmung des Dampfdruckes diente das auf Normalbedingungen reduzierte Volumen des Transportgases, der Barometerdruck und das Gewicht

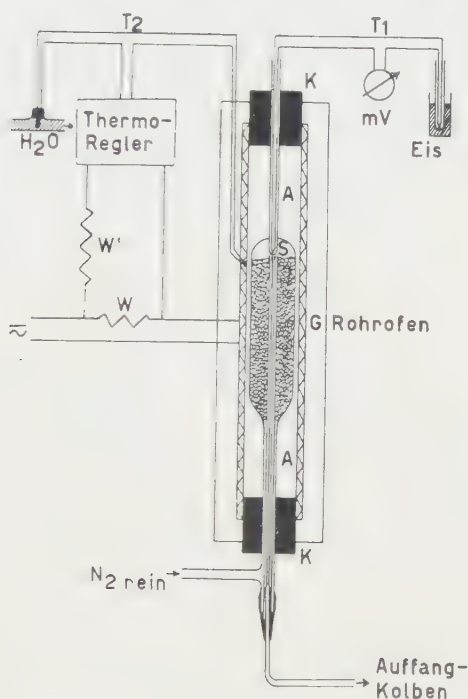


Fig. 1

es Sublimats, von dem wir annehmen, dass es im Gaszustand aus einfachen Alkalihalogenidmolekeln bestand. Von ZIMM und MAYER<sup>1)</sup> ist gezeigt worden, dass CsCl in seinem Dampf bis 800° C weniger als 0,3% Doppelmoleküle enthält. Da der Anteil des Salzdampfes am Gesamtdruck verschwindend klein ist, kann der Druck  $p$  des Salzdampfes durch

$$p = \frac{b \times \text{Mole Sublimat}}{\text{Mole N}_2 \text{ vom Transportgas}} \quad (4)$$

ausgedrückt werden, wobei  $b$  den herrschenden Barometerstand in mm Hg bedeutet.

<sup>1)</sup> B. H. ZIMM und J. E. MAYER, J. chem. Phys. 12, 362 (1944).



*Rubidiumchlorid.* Die Übereinstimmung unserer Tensionswerte mit den Daten von MAYER und HÖLDER-WINTNER<sup>1)</sup> kann als praktisch vollständig bezeichnet werden. Die Extrapolation der Druckwerte in Figur 2 bis zum Schnittpunkt mit der Tensionsgeraden des geschmolzenen Salzes nach den Angaben von KELLEY entspricht dem beobachteten Schmelzpunkt von 988°K.

*Kaliumchlorid.* Unsere Werte halten die Mitte zwischen den Daten von DEITZ<sup>2)</sup> und denjenigen von ZIMM und MAYER<sup>3)</sup> und stimmen mit diesen auch gut überein. Dies erscheint bemerkenswert, da die Messungen nach ganz verschiedenen Methoden erfolgten, nämlich nach einer absoluten Methode und dem Effusionsverfahren von KNUDSEN, ferner nach der Methode der positiven Ionen und nach der Transportgasmethode.

Wesentlich höher liegen die älteren, weniger genauen und nun überholten Werte von COHEN<sup>4)</sup> nach der Transportgasmethode.

Die Tensionsgeraden von Figur 2 werden durch die Gleichung:

$$-\log p \text{ (mm Hg)} = \frac{1}{T} \cdot 10^4 \cdot a - b \quad (5)$$

gut dargestellt, wobei  $a$  und  $b$  die folgenden Werte erhalten:

	CsCl	RbCl	KCl
$a$	0,997	1,020	1,107
$b$	9,942	9,643	10,151

Aus den Tensionsgleichungen (5) werden die folgenden Sublimationswärmen  $\Delta H$  mit Hilfe der Gleichung von CLAUSIUS-CLAPEYRON erhalten:

*Sublimationswärmen*

	CsCl	RbCl	KCl
$\Delta H_{\text{Sub}}$	44,1 kcal	46,4 kcal	50,2 kcal

*Sublimationstrennungen*

Es entstand nun die Frage, ob sich die beobachteten Druckunterschiede der untersuchten Alkalihalogenide zu Sublimationstrennungen im Vakuum ver-

<sup>1)</sup> J. E. MAYER und IRMGARD HÖLDER-WINTNER, J. chem. Phys. 6, 301 (1938).

<sup>2)</sup> V. DEITZ, J. chem. Phys. 4, 578 (1936).

<sup>3)</sup> B. H. ZIMM und J. E. MAYER, J. chem. Phys. 12, 362 (1944).

<sup>4)</sup> A. COHEN, Diss. ETH., Zürich (1938).

werten lassen. Zur Ausführung der Versuche diente die Apparatur von Figur 3. Das Sublimationsrohr aus Pyrexglas hatte einen Durchmesser von 4 cm.

Die Fläche des mit Normalschliff eingesetzten Luftkühlers befand sich 5 mm über der Substanz. Das 25 cm lange Sublimationsrohr wurde in einem elektrischen Tiegelofen auf der gewünschten Temperatur gehalten und die Sublimation in einem Vakuum von  $1-3 \cdot 10^{-5}$  mm Hg durchgeführt.

Der zeitliche Verlauf der Sublimation wurde zunächst mit je 1 g der reinen Chloride bei  $440^{\circ}\text{C}$  geprüft, wobei die Kondensate als zusammenhängende, eisartige Schicht auf dem erweiterten Teil des Kühlers erhalten wurden. Diese wurden mit Wasser weggelöst und nach dem Eindampfen und Trocknen bei  $180^{\circ}\text{C}$  gewogen.

Die Temperatur war so gewählt, dass der Druck des Restgases im Apparat nur von der Tension des CsCl übertroffen wurde:

$$p_{\text{CsCl}} = 6,8 \cdot 10^{-5}; \quad p_{\text{KCl}} = 0,25 \cdot 10^{-5}; \quad \text{Vakuum } 2 \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg.}$$

Figur 4 zeigt den beobachteten zeitlichen Verlauf der Sublimation der reinen Chloride. Danach sollte eine weitgehende Abtrennung des CsCl aus Gemischen mit KCl und RbCl möglich sein, sofern die Sublimation der reinen Komponenten nicht durch Mischkristallbildung beeinträchtigt wird.

Nach HAVIGHURST und Mitarbeitern<sup>1)</sup> sollen bei Zimmertemperatur bis zu 85 Molprozent KCl im Gitter von CsCl gelöst werden, wobei eine Erweiterung des innen zentrierten CsCl-Gitters erfolgt. Bei  $25^{\circ}\text{C}$  vermag RbCl mehr als 15 Molprozent CsCl, CsCl mehr als 11,5 Molprozent RbCl zu lösen. Im Mischkristall von CsCl/RbCl vergrößert sich hierbei die Gitterkonstante von RbCl auf 6,585 Å, während das innen zentrierte CsCl-Gitter zusammenschrumpft.

Nach den röntgenographischen Messungen von THOMAS<sup>2)</sup> tritt vollständige Mischkristallbildung der Alkalichloride ein, wenn die Differenz der Gitterkonstanten der beiden Komponenten kleiner wird als 5% ihres mittleren Atomabstandes. Oberhalb von  $445^{\circ}\text{C}$  geht CsCl von der innen zentrierten in die flächenzentrierte Modifikation über, welche nun ein viel grösseres Bestreben besitzt, mit RbCl und KCl Mischkristalle zu bilden.

Wie kürzlich erneut von DOROTHEA MEIER und TREADWELL<sup>3)</sup> gezeigt worden ist, lassen sich kleine Mengen von CsCl und RbCl von einem sehr grossen Überschuss an KCl trennen durch Fällung des letzteren mit Chlorwasserstoffgas in der Kälte. Es gelang so, das Gewichtsverhältnis (CsCl bzw. RbCl) : KCl von etwa 1 : 5000 auf mindestens 1 : 2 bis 1 : 5 zu verschieben, ohne dass erhebliche Verluste an CsCl oder RbCl durch Mischkristallbildung mit dem ausfallenden KCl entstanden sind.

<sup>1)</sup> R. J. HAVIGHURST, E. MACK und F. C. BLAKE, J. Amer. chem. Soc. **47**, 40 (1925).

<sup>2)</sup> E. B. THOMAS, J. Amer. chem. Soc. **57**, 823 (1935).

<sup>3)</sup> DOROTHEA MEIER und W. D. TREADWELL, Helv. chim. Acta **34**, 805 (1951).

Es war daher zu erwarten, dass sich CsCl aus Eindampfrückständen mit KCl und RbCl teilweise in reinem Zustand absublimieren lässt, sofern das CsCl im Bodenkörper nicht ausschliesslich als Mischkristall vorliegt. Eine möglichst rasche Abtrennung, also Sublimation im Vakuum, sollte hierfür besonders günstig sein.

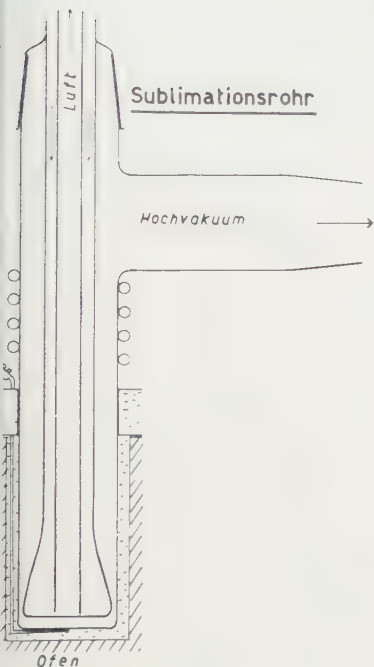


Fig. 3

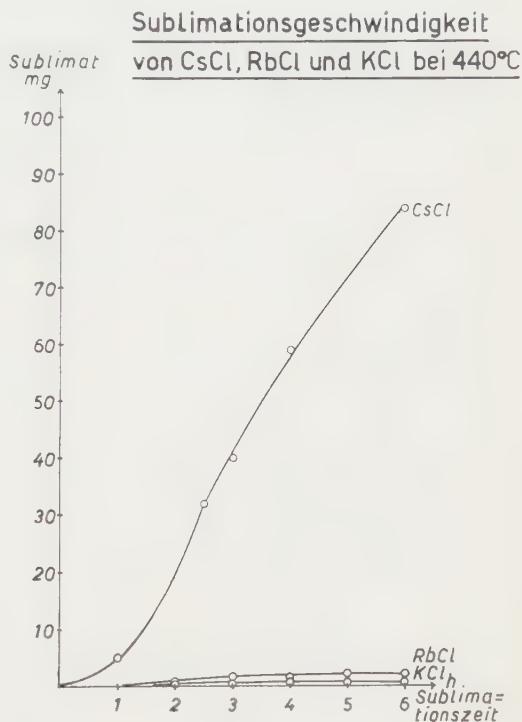


Fig. 4

*Sublimationsversuche mit Mischungen der Chloride.* Äquimolare Mischungen, welche durch vorsichtiges Eindampfen von je 10 cm<sup>3</sup> 1-n CsCl mit je 10 cm<sup>3</sup> 1-n KCl bzw. RbCl erhalten worden waren, dienten als Ausgangsmaterial zu Sublimationsversuchen im Vakuum in dem Apparat von Figur 3. Durch Zerücken der Eindampfrückstände im Achatmörser (nicht Zerreiben) und Sieben wurden die Salzproben auf möglichst gleiche Korngrösse gebracht und je 1 g der Mischungen zu den Versuchen verwendet.

Die während der Sublimation konstant gehaltene Temperatur wurde so gewählt, dass nur der Dampfdruck des CsCl den in der Apparatur herrschenden Restgasdruck übertraf. Es wurden Sublimationsversuche mit CsCl, KCl 1 : 1 bei 430°C, 440°C und 480°C und mit CsCl, RbCl = 1 : 1 bei 430°C, 440°C,



455 °C und 470 °C ausgeführt, wobei ein Vakuum in der Apparatur von  $(2 \pm 1) \cdot 10^{-5}$  mm Hg aufrechterhalten wurde.

Zur Ermittlung der Sublimationskurve wurden Proben von je 2–8% des vorgelegten Bodenkörpers (1 g) absublimiert, die Menge und Zusammensetzung derselben bestimmt und die Werte gegen die Zusammensetzung des Bodenkörpers aufgetragen. Figur 5 zeigt den Verlauf der Fraktionierung von CsCl, KCl 1 : 1 bei 430 °C. Diese ist durch vier scharf getrennte Stufen gekennzeichnet. Auf die beiden Fraktionen mit konstanter Zusammensetzung folgt je eine Stufe mit linear abnehmendem Gehalt an CsCl. Die gewichtsmässigen Anteile der Stufen sind aus der folgenden Tabelle zu ersehen.

	Sublimat		Bodenkörper	
	mg CsCl	mg KCl	mg CsCl	mg KCl
Vorgelegtes Salz . . . . .			690	310
Ende der ersten Stufe:				
Fraktion von 100 Molprozent CsCl . .	92,1	—		
Rückstand . . . . .			597,9	310
Ende der zweiten Stufe:				
Fraktion von 100–81 Molprozent CsCl.	100,5	4,5		
Rückstand . . . . .			497,4	305,5
Ende der dritten Stufe:				
Fraktion von 80 Molprozent CsCl. . .	114,3	13,1		
Rückstand . . . . .			383,1	292,4
Ende der vierten Stufe:				
Fraktion von 71,5–50 Molprozent CsCl	169,8	45,4		
Rückstand . . . . .			213,3	247,0

Durch Erhöhung der Sublimationstemperatur auf 440 °C und 480 °C wurde vorerst das Gebiet des Sublimats mit 100 Molprozent CsCl stark verkürzt und dann weiterhin die Sublimate der Stufe 3 auf einen Gehalt von 76 Molprozent CsCl herabgedrückt, wie aus Figur 6 zu ersehen ist.

Figur 7 zeigt den analogen Verlauf der Sublimationen mit 1 g CsCl RbCl = 1:1 bei den Temperaturen von 430 °C und 440 °C. Infolge der hier leichter eintretenden Mischkristallbildung ist das Gebiet der Sublimate aus reinem CsCl ganz unterdrückt. Der Gehalt der Stufe 3 ist auf 62,5 Molprozent CsCl herabgedrückt.

Ein ähnlicher Verlauf der Sublimation wurde auch bei 455 °C und 470 °C beobachtet. Der Gehalt der Stufe 3 hat sich dabei weiter gesenkt auf 55 bzw. 54 Molprozent CsCl. Nur kleine Unterschiede in der Herstellung und Körnung

des Bodenkörpers können bereits den Verlauf der Sublimationstrennung deutlich beeinflussen.

Um grössere Trenneffekte durch die Sublimation zu erreichen, müsste offenbar die Herstellung der Ausgangsmischungen nicht durch Eindampfen, sondern durch möglichst rasche Fällung bei tiefen Temperaturen erfolgen, um die Bildung von Mischkristallen möglichst zu unterbinden. Nach der Abtrennung der aus reinem CsCl bestehenden Sublimate müsste dann der Bodenkörper zur

### Sublimation von CsCl/KCl-Mischungen

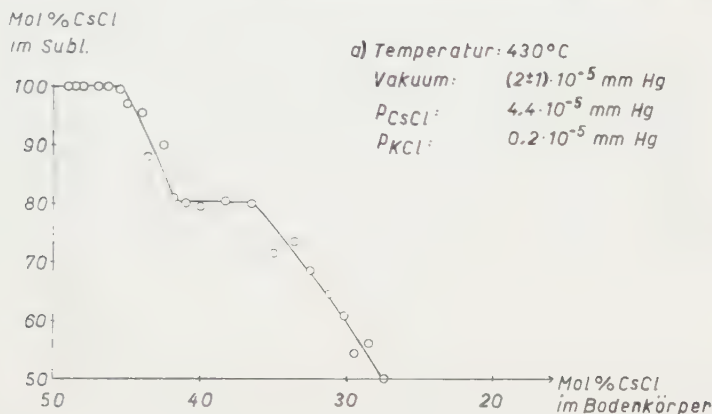


Fig. 5

### Sublimation von CsCl/KCl-Mischungen

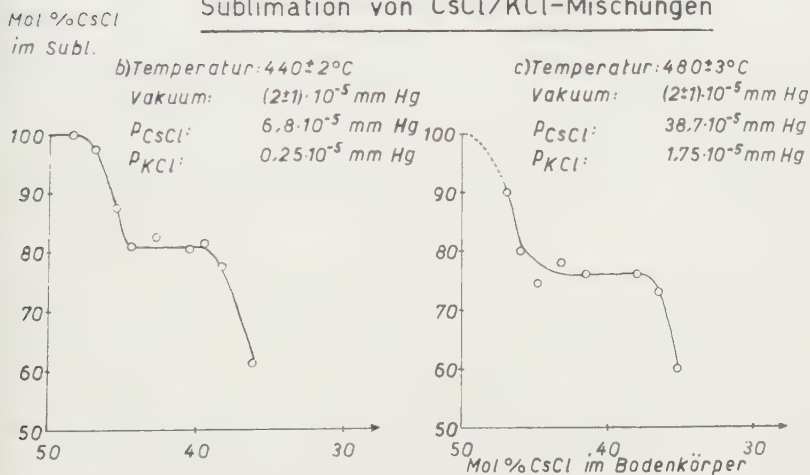


Fig. 6

Zerlegung der inzwischen darin gebildeten Mischkristalle erneut aus wässriger Lösung bei tiefen Temperaturen umkristallisiert werden. Versuche in dieser Richtung sind in Aussicht genommen. Über die angewandten Analysemethoden soll in anderem Zusammenhang berichtet werden.

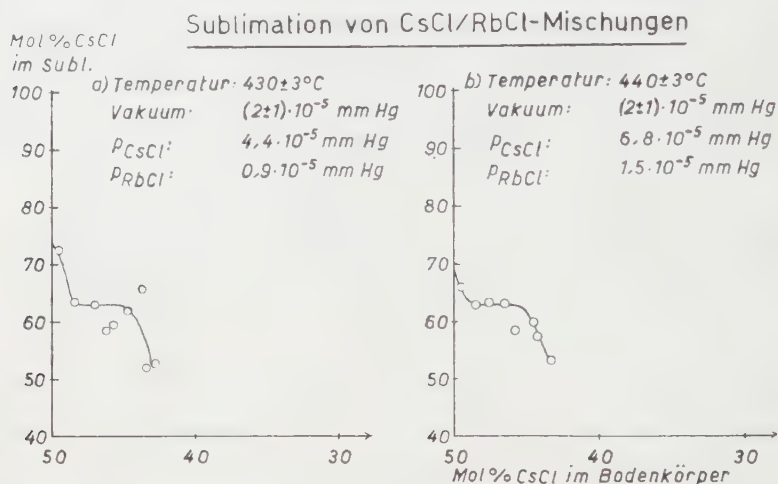


Fig. 7

### Zusammenfassung

Es sind die Dampfdrucke von CsCl, RbCl und KCl nach der Mitführungsmethode, unter Verwendung von Stickstoff als Transportgas, in den respektiven Temperaturbereichen von  $507^\circ\text{C}$ – $635^\circ\text{C}$  für CsCl, von  $558^\circ\text{C}$ – $675^\circ\text{C}$  für RbCl und von  $582^\circ\text{C}$ – $751^\circ\text{C}$  für KCl bestimmt worden.

Mit äquimolaren Gemischen aus CsCl mit KCl bzw. RbCl wurden Versuche zur Abtrennung des CsCl im Vakuum durchgeführt, wobei drei bis vier charakteristische Stufen auftreten, welche durch den Grad der Mischkristallbildung im Bodenkörper bedingt werden.

Ein Teil der benötigten Apparaturen konnte aus Mitteln des *Aluminium-Fonds Neuhausen* angeschafft werden. Der Fondskommission sei hierfür unser Dank ausgesprochen.

### Summary

The vapour pressures of CsCl, RbCl, and KCl have been determined with a transport method, using nitrogen as transport gas, the pressures having been measured in the following ranges of temperature: CsCl from  $507$ – $635^\circ\text{C}$ , RbCl from  $558$ – $675^\circ\text{C}$ , and KCl from  $582$ – $751^\circ\text{C}$ .

Results of fractionated sublimations with equimolar mixtures of CsCl with KCl, resp. RbCl are reported, which show three or four typical steps in the pressure curve, produced by a certain amount of mixed crystal formation in the residue.

(Eingegangen: 4. August 1953.)

## Über die kombinatorische und kontinuumsmässige Definition der Überschneidungszahl zweier geschlossener Kurven auf einer Fläche

Von HERMANN WEYL, Princeton, N. J.<sup>1)</sup>, und Zürich

Auf einer zweiseitigen Fläche bezeichnet man als Charakteristik zweier geschlossener Wege  $\alpha$ ,  $\beta$  die algebraische Summe der Überkreuzungen von  $\alpha$  über  $\beta$ , wobei in dieser Summe eine Überkreuzung von links nach rechts mit  $+1$ , von rechts nach links mit  $-1$  in Ansatz gebracht wird. Die Verkehrsregel des «Vorfahrrechts» beruht auf der Tatsache, dass eine Überkreuzung von  $\alpha$  über  $\beta$  von links nach rechts zugleich eine Überkreuzung von  $\beta$  über  $\alpha$  von rechts nach links ist. Dies besagt, dass die Charakteristik  $ch(\alpha, \beta)$  schiefssymmetrisch ist:

$$ch(\beta, \alpha) = -ch(\alpha, \beta) . \quad (1)$$

Venn man die Möglichkeiten bedenkt, die der allgemeine Begriff der stetigen Kurve offen lässt, so ist es klar, dass die Definition in der obigen Form unbrauchbar ist. Die kombinatorische Topologie ergreift den Ausweg, dass sie sich auf eine *Triangulation* der Fläche stützt, statt beliebiger Wege zunächst nur *Kantenzüge* ins Auge fasst und von da aus durch eine Art Approximation die allgemeine Situation zu meistern sucht. Ihr darin folgend, werden wir zu einer kombinatorischen Definition der Charakteristik für beliebige geschlossene Wege gelangen. Freilich erscheint der Begriff dadurch an eine Triangulation gebunden. Um zu zeigen, dass er in Wahrheit davon unabhängig ist, werde ich dann eine andere kontinuumsmässige Erklärung der Charakteristik aufstellen und zeigen, dass sie mit der kombinatorischen übereinstimmt. Das Verfahren ist eng mit demjenigen verwandt, das ich in meinem 1913 bei Teubner erschienenen Buch *Die Idee der Riemannschen Fläche* zur Einführung des Zusammenhangsgrades mit Hilfe der Integralfunktion benutzte. So wie die Integralfunktionen aus einer «Topologisierung» der Integrale analytischer Funktionen entspringen, ist die hier gegebene Kontinuumsdefinition der Charakteristik durch Topologisierung derjenigen Konstruktion entstanden, mit Hilfe deren ich an dem angegebenen Ort die abelschen Integrale erster Gattung gewann. Zur näheren Ausführung schreitend, muss ich zunächst an die wichtigsten Grundbegriffe der Topologie erinnern.

<sup>1)</sup> Institute for Advanced Study.

## Fläche

Eine *Mannigfaltigkeit* besteht aus Elementen, die Punkte genannt werden. Jedem Punkt  $p$  sind gewisse  $p$  enthaltende Teilmengen der Mannigfaltigkeit als *Umgebungen* von  $p$  zugeordnet, die den zuerst von F. HAUSDORFF vollständig aufgestellten Axiomen genügen müssen:

1. Zu zwei Umgebungen von  $p$  gibt es immer eine Umgebung von  $p$ , die in beiden enthalten ist;
2. liegt  $p$  in der Umgebung  $U_0$  von  $p_0$ , so gibt es eine Umgebung von  $p$ , die ganz in  $U_0$  enthalten ist;
3. zwei verschiedene Punkte besitzen Umgebungen, die zueinander punktfremd sind.

Mit Hilfe der Umgebungen lassen sich alle Stetigkeitsbegriffe definieren, insbesondere der Begriff der topologischen Abbildung (so heisst ein Paar zueinander inverser Abbildungen  $p \rightarrow p'$ ,  $p' \rightarrow p$ , die beide stetig sind). Eine Mannigfaltigkeit wird als zweidimensionale *Fläche* bezeichnet, wenn sich jede Umgebung topologisch auf das Innere  $E$  des Einheitskreises der  $(x, y)$ -Ebene abbilden lässt. Dabei ist  $E$  natürlich selber als Mannigfaltigkeit dadurch definiert, dass als Umgebung eines Punktes  $p_0$  von  $E$  das Innere eines jeden um  $p_0$  beschriebenen, ganz in  $E$  gelegenen Kreises gilt. Eine *Kurve* (Weg) auf der Fläche  $\mathfrak{F}$  ist gegeben, wenn jedem Wert des in den Grenzen  $0 \leq \lambda \leq 1$  variierenden Parameters  $\lambda$  ein Punkt  $p(\lambda)$  von  $\mathfrak{F}$  in stetiger Weise zugeordnet ist. Wir legen der Fläche die Bedingung auf, *zusammenhängend* zu sein; das heisst, wir nehmen an, dass jeder Punkt auf  $\mathfrak{F}$  mit jedem durch eine Kurve verbunden werden kann. Einer der wichtigsten Stetigkeitsbegriffe ist der der *kompakten Menge* (eine Zeitlang, während das Wort kompakt in anderm Sinne verwendet wurde, hiessen sie bikompakt). Eine Punktmenge  $M$  auf  $\mathfrak{F}$  ist kompakt, wenn folgendes der Fall ist: Ist jedem Punkt  $p$  von  $M$  irgendwie eine Umgebung  $U(p)$  von  $p$  zugeordnet, so lassen sich stets endlichviele Punkte  $p$  unter den Punkten von  $M$  auswählen, deren zugeordnete Umgebungen  $U(p)$  ganz  $M$  bedecken. Für Flächen, die selber kompakt sind, ist der Name *geschlossen* in Gebrauch. In diesem Sinne ist zum Beispiel die Kugeloberfläche geschlossen, die Ebene nicht.

## Orientierung

Sei  $A$  ein Punkt der  $(x, y)$ -Ebene,  $\mathfrak{C}$  eine nicht durch  $A$  hindurchgehende Kurve in der Ebene. Wir bezeichnen mit  $2\pi q(p)$  den Winkel, den der Strahl  $Ap$  von  $A$  nach einem variablen Punkt  $p$  auf  $\mathfrak{C}$  mit einer festen, von  $A$  ausgehenden Halbgeraden einschliesst.  $q(p)$  ist nur modulo 1 eindeutig bestimmt. Man kann aber die *stetige* Änderung von  $q(p)$  verfolgen, während  $p$  die Kurve  $\mathfrak{C}$  durchläuft; der Zuwachs, welchen  $q$  dabei erfährt, wird eine ganze Zahl  $n$  sein. Wir werden sagen, dass  $\mathfrak{C}$  den Punkt  $A$  im ganzen  $n$ -mal im positiven Sinn

umschlingt oder dass  $n$  die *Ordnung* von  $A$  in bezug auf  $\mathfrak{C}$  ist. Entscheidend ist das Vorzeichen von  $n$  ist, dass ein bestimmter Drehungssinn in der Ebene als positiver zugrunde gelegt ist. Sind die Punkte  $A$  und  $B$  durch eine stetige, nicht treffende Kurve miteinander verbunden, so hat  $B$  dieselbe Ordnung in bezug auf  $\mathfrak{C}$  wie  $A$ . Es gilt der folgende fundamentale Satz: Es sei ein ebenes Gebiet  $\mathfrak{G}$  auf ein anderes  $\mathfrak{G}'$  topologisch abgebildet. Der Punkt  $A$  in  $\mathfrak{G}$  gehe durch diese Abbildung in  $A'$  über. Zu einem gegebenen Drehsinn  $\partial$  in  $\mathfrak{G}$  gehöre dann ein Bild-Drehsinn  $\partial'$  in  $A'$ , der so zu kennzeichnen ist: Wenn  $\mathfrak{C}$  irgendeine  $A$  nicht passierende geschlossene Kurve ist, die in dem ganz zu  $\mathfrak{G}$  gehörigen Innern  $\mathfrak{R}$  eines Kreises um  $A$  verläuft, so stimmt die auf Grund von  $\partial$  ermittelte Ordnung von  $A'$  in bezug auf die Bildkurve  $\mathfrak{C}'$  von  $\mathfrak{C}$  stets mit der auf Grund von  $\partial$  ermittelten Ordnung von  $A$  in bezug auf  $\mathfrak{C}$  überein.

Hierauf beruht die Möglichkeit, einen Drehsinn  $\partial$  in einem Punkte  $p_0$  einer gegebenen Fläche  $\mathfrak{F}$  festzulegen, indem man ihn in dem topologischen Bild irgendeiner Umgebung von  $p_0$  festlegt. Ein den sämtlichen Punkten  $p$  von  $\mathfrak{F}$  zugewiesener Drehsinn  $\partial(p)$  wird *stetig* in  $p_0$  heissen, wenn er im topologischen ebenen Bild einer hinreichend kleinen Umgebung von  $p_0$  überall als der gleiche Drehsinn erscheint. Eine Fläche heisst *zweiseitig* oder *orientierbar*, wenn sich auf ihr ein einheitlicher Drehsinn festlegen lässt, das heisst, wenn sich jedem Punkt ein solcher Drehsinn zuweisen lässt, dass derselbe überall stetig ist. Durch diese Festlegung wird die Fläche zur *orientierten Fläche*. Indem wir eine Drehung im positiven Sinne als «Wendung linksum» bezeichnen, gelingt es auf einer orientierten Fläche (aber nur auf einer solchen), die Unterscheidung zwischen links und rechts durchzuführen. Die Kugeloberfläche ist zum Beispiel zweiseitig, die projektive Ebene, die aus ihr durch Identifizierung antipodischer Punkte entsteht, ist es nicht. Wir beschäftigen uns fortan nur mit zweiseitigen Flächen.

### Integralfunktion

Eine *Kurvenfunktion*  $F$  ist gegeben, wenn jeder Kurve  $\gamma$  auf der Fläche  $\mathfrak{F}$  eine reelle Zahl  $F(\gamma)$  zugeordnet ist. Aus einer von  $a$  nach  $b$  führenden Kurve  $\gamma'$  und einer von  $b$  nach  $c$  führenden Kurve  $\gamma''$  kann man die von  $a$  nach  $c$  führende Kurve  $\gamma = \gamma' + \gamma''$  zusammensetzen. Die Kurvenfunktion ist *linear*, wenn unter diesen Umständen stets

$$F(\gamma' + \gamma'') = F(\gamma') + F(\gamma'')$$

gilt. Die Kurvenfunktion  $F$  heisst *kohomolog Null*,  $F \sim 0$ , falls  $F(\gamma) = 0$  ist für jede geschlossene Kurve  $\gamma$ . Alsdann existiert eine Punktfunktion  $f(p)$ , so dass für irgendeine von  $a$  nach  $b$  führende Kurve  $\gamma$  die Gleichung

$$F(\gamma) = f(b) - f(a)$$



gilt. Wir beschäftigen uns mit solchen linearen Kurvenfunktionen, die im kleinen überall kohomolog Null sind; das heisst, zu jedem Punkt  $p_0$  soll eine Umgebung existieren, derart dass  $F(\gamma) = 0$  gilt für jede in dieser Umgebung verlaufende geschlossene Kurve  $\gamma$ . Derartige lineare Kurvenfunktionen mögen *Integralfunktionen* heissen. Mehrere Integralfunktionen  $F_1, \dots, F_l$  sind linear abhängig, wenn es nicht sämtlich verschwindende reelle Zahlen  $c_1, \dots, c_l$  gibt, so dass die Relation

$$c_1 F_1 + \dots + c_l F_l \sim 0$$

besteht. Die Maximalzahl der linear unabhängigen Integralfunktionen auf einer Fläche heisst ihr *Zusammenhangsgrad* (derselbe kann natürlich auch unendlich sein). In dieser von mir 1913 aufgestellten, von jeder Triangulation unabhängigen Definition tauchte wohl zum erstenmal der Gedanke auf, die Homologietheorie der geschlossenen Wege auf die «Kohomologietheorie» der Integralfunktionen zu gründen. Zwischen mehreren geschlossenen Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  besteht die Homologie

$$c_1 \gamma_1 + \dots + c_l \gamma_l \simeq 0,$$

wenn für jede Integralfunktion  $F$  die Gleichung

$$c_1 F(\gamma_1) + \dots + c_l F(\gamma_l) = 0$$

besteht. Führt man formal lineare Kombinationen  $c_1 \gamma_1 + \dots + c_l \gamma_l$  geschlossener Wege  $\gamma$ , als «*Ströme*» ein, so bilden die Ströme und die Integralfunktionen zwei zueinander duale Vektorräume. Der Zusammenhangsgrad ist zugleich die Maximalzahl der im Sinne der Homologie linear unabhängigen geschlossenen Wege.

Ich will die Integralfunktion  $F$  *beschränkt* nennen, wenn es eine kompakte Teilmenge  $M$  auf  $\mathfrak{F}$  gibt, so dass  $F(\gamma) = 0$  ist für jede ganz ausserhalb  $M$  verlaufende Kurve  $\gamma$ . Die zwischen geschlossenen Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  bestehende *schwache Homologie*

$$c_1 \gamma_1 + \dots + c_l \gamma_l \sim 0$$

bedeutet, dass

$$c_1 F(\gamma_1) + \dots + c_l F(\gamma_l) = 0$$

ist für jede beschränkte Integralfunktion  $F$ . So kann man denn auch von einem schwachen Zusammenhangsgrad sprechen; er kann niemals grösser sein als der Zusammenhangsgrad. Zum Beispiel hat ein Kreisring in der Ebene den Zusammenhangsgrad 1, aber den schwachen Zusammenhangsgrad 0, indem ein zu den Rändern konzentrischer Kreis im Ring, obschon nicht homolog Null, doch schwach homolog Null ist. – Für geschlossene Flächen besteht natürlich kein Unterschied zwischen Homologie und schwacher Homologie.

# Triangulation

Ich komme jetzt zu dem für die kombinatorische Topologie grundlegenden Begriff der Triangulation und fasse diesen Begriff etwas schärfer als in dem oben zitierten Buch. Ein ebenes Dreieck lässt sich am leichtesten mit Hilfe der an seinen Eckpunkten 1, 2, 3 gehörigen Schwerpunktskoordinaten beschreiben. Darum beginnen wir mit dieser Erklärung: Ein Dreieck  $\Delta$  auf  $\mathfrak{F}$  ist durch eine stetige Funktion  $p = \Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  gegeben, die jedem Tripel von reellen nichtnegativen Zahlen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  von der Summe 1 in stetiger Weise einen Punkt  $p$  auf  $\Delta$  zuordnet, in solcher Weise, dass verschiedenen Tripeln stets verschiedene Punkte  $p$  korrespondieren. Von der Gesamtheit der den angegebenen Bedingungen genügenden reellen Zahlentripel sprechen wir auch als von dem *Zahlendreieck*  $Z = Z_\xi, \xi_1 = 0$  definiert die Kante 1 des Dreiecks,  $(1, 0, 0)$  ist die Ecke 1,  $(1/2, 1/2, 0)$  die Mitte der Kante 1,  $(1/3, 1/3, 1/3)$  der Mittelpunkt des Dreiecks. Da  $Z$  kompakt ist, ist auch sein stetiges Abbild  $\Delta$  kompakt, und nach einem wichtigen Satz über die stetige Abbildung kompakter Mengen ist nicht nur die Abbildung  $Z \rightarrow \Delta$ , sondern auch die inverse  $\Delta \rightarrow Z$  stetig. Man beachte, dass ein Dreieck auf der Fläche nicht als Menge der zu ihm gehörigen Punkte definiert ist, sondern durch die  $Z$  auf  $\Delta$  stetig abbildende Funktion  $\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Zur *Triangulation* einer Fläche gehört, dass auf ihr gewisse Punkte  $e$  als Ecken ausgezeichnet sind, die in gewisser Weise zu Paaren (Kanten)  $(ef)$  und zu Tripeln (Dreiecken)  $(efg)$  zusammengefasst sind. Zu einem Paar  $(ef)$  gibt es genau zwei Ecken  $g$ , so dass  $ef$  mit  $g$  ein Tripel bilden. Zu einer Ecke  $e$  gibt es nur endlichviele von  $e$  verschiedene Ecken  $f = f_1, \dots, f_r$  derart, dass  $(ef)$  als Kante auftritt. Diese bilden einen Zykel, indem  $ef_i$  die gemeinsame Kante der beiden Dreiecke

$$\Delta_{i-1} := (ef_{i-1}f_i) \quad \text{und} \quad \Delta_i := (ef_i f_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, r; f_0 = f_r, f_{r+1} = f_1)$$

2. Zu jedem vorkommenden Tripel  $(efg)$  gehört eine stetige Funktion

$$p = \Delta_{efg}(\xi_e, \xi_f, \xi_g),$$

wo jedem zulässigen, das heisst den Bedingungen

$$\xi_e \geq 0, \quad \xi_f \geq 0, \quad \xi_g \geq 0, \quad \xi_e + \xi_f + \xi_g = 1$$

genügenden Wertetripel  $(\xi_e, \xi_f, \xi_g)$  einen Punkt  $p$  auf der Fläche so zuordnet, dass verschiedenen Tripeln verschiedene Punkte entsprechen. Die Funktion definiert das Dreieck  $\Delta_{efg}$  der Triangulation. Die Bezeichnung ist so zu verstehen, dass, wenn  $efg$  im Index des Funktionszeichens  $\Delta$  und zugleich als Index der Variablen  $\xi_e, \xi_f, \xi_g$  der gleichen Permutation unterworfen werden, der Wert  $p$  der Funktion sich nicht ändert. Auf den beiden Dreiecken  $\Delta_{efg}, \Delta_{efg'}$

mit der gemeinsamen Kante  $ef$  gelte

$$\Delta_{efg}(\xi_e, \xi_f, 0) = \Delta_{efg'}(\xi_e, \xi_f, 0).$$

Damit ist also die die Kante  $(ef)$  definierende Funktion  $p = \delta_{ef}(\xi_e, \xi_f)$  eindeutig erklärt. Für jedes vorkommende Tripel  $(efg)$  mit der Ecke  $e$  gelte  $\Delta_{efg}(1, 0, 0) = 1$ . Jeder Punkt der Fläche erscheint als Wert mindestens einer dieser den Tripeln  $(efg)$  zugehörigen Funktionen  $\Delta_{efg}$ . Die Topologie kommt in den folgenden Formulierungen zum Ausdruck: Zu einem inneren Punkt eines Dreiecks

$$\Delta_{efg}: \xi_e > 0, \xi_f > 0, \xi_g > 0,$$

gibt es eine Umgebung, deren Punkte keinem andern als diesem Dreieck angehören; zu einem innern Punkt einer Kante  $\delta_{ef}: \xi_e > 0, \xi_f > 0$ , gibt es eine Umgebung, in der keine andern Punkte liegen als solche, die den beiden Dreiecken  $\Delta_{efg}, \Delta_{efg'}$  mit der gemeinsamen Kante  $ef$  angehören (Dreieckspaar); zu einem Eckpunkt  $e$  gibt es eine Umgebung, zu der keine andern Punkte als solche gehören, die in dem zyklischen Stern der Dreiecke

$$\Delta_0 = \Delta_{ef_1f_2}, \dots, \Delta_{r-1} = \Delta_{ef_{r-1}f_r}$$

um  $e$  liegen.

Für die Folge nehmen wir an, dass die Fläche  $\mathfrak{F}$  in einer bestimmten Triangulation  $\zeta$  vorliegt.

Der Umstand, dass eine Fläche *zusammenhängend* ist, gibt sich jetzt in der kombinatorischen Eigenschaft kund, dass die Ecken sich in keiner Weise so in zwei Klassen teilen lassen, dass nur Paare und Tripel solcher Ecken vorkommen, die der gleichen Klasse angehören. Eine Fläche ist dann und nur dann *geschlossen*, wenn das Schema der Triangulation nur aus *endlichvielen* Ecken (und darum auch aus nur endlichvielen Kanten und Dreiecken) besteht. Ein einheitlicher, auf der Fläche festgelegter Drehsinn gibt sich in jedem Dreieck  $\Delta_{efg}$  der Triangulation dadurch kund, dass ihm eine bestimmte der beiden *Indikatriz*en (= Ecken-Reihenfolgen)  $efg = fge = gef$  oder  $gfe = feg = egf$  zugewiesen ist; in solcher Weise, dass die Indikatrizen zweier in einer Kante zusammenstossender Dreiecke  $(efg)$  und  $(efg')$  kohärent sind. Die Indikatriz  $ef$  eines Dreiecks induziert auf den begrenzenden Kanten je einen Durchlaufungssinn  $ef, fg, ge$ . *Kohärente* Indikatrizen der in einer Kante  $ef$  zusammenstossenden beiden Dreiecke induzieren auf der gemeinsamen Kante *entgegengesetzte* Durchlaufungssinne. Jedesmal ist hier eine Kontinuumseigenschaft (zusammenhängend, geschlossen, orientierbar) in eine kombinatorische umgesetzt; und es ergibt sich daraus, dass die betreffende kombinatorische Eigenschaft von der Triangulation unabhängig ist.

Aus der Beschreibung geht ferner hervor, dass das Innere des um eine Ecke sich gruppierenden Dreieckssterns  $\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_{r-1}$  sich topologisch auf das

nnere eines ebenen regulären Polygons so abbilden lässt, dass die von  $c$  ausgehenden, in den Dreiecken verlaufenden geradlinigen Strahlen in geradlinige Strahlen in der Ebene übergehen («Strahlabbildung»). Da das Innere eines solchen Polygons einfach zusammenhängend, nämlich dem Inneren eines Kreises topologisch äquivalent ist, gilt  $F(\gamma) = 0$  für eine jede Integralfunktion  $F$  und eine jede geschlossene Kurve  $\gamma$ , die ganz im Innern des Dreieckssterns verläuft.

Ein *Kantenzug*  $e_0 e_1 e_2 \dots e_n$  (der Länge  $n$ ) ist eine Folge von Kanten unserer Triangulation, in welcher der Endpunkt  $e_i$  der ( $i$ -ten) Kante  $e_{i-1} e_i$  zugleich der Anfangspunkt der nächsten Kante  $e_i e_{i+1}$  ist. Der Kantenzug ist *einfach*, wenn alle seine Ecken  $e_0, e_1, \dots, e_n$  voneinander verschieden sind. Er ist *geschlossen*, wenn  $e_n$  mit  $e_0$  zusammenfällt. Statt der Kanten, welche die Ecken miteinander verbinden, kann man auch die *Cokanten* (sit venia verbo!)  $\alpha^*$  betrachten, deren jede die Mittelpunkte  $i, i'$  der beiden Dreiecke  $\Delta, \Delta'$  eines Dreieckspaares miteinander verbindet;  $\alpha^*$  besteht aus der Strecke  $ic$  in  $\Delta$ , die von  $i$  zu der Mitte  $c$  der beiden Dreiecke gemeinsamen Kante  $\alpha$  läuft, und aus der Strecke  $c i'$  in  $\Delta'$ . Da wir annehmen, dass unsere Fläche zweiseitig ist, können wir jedem Dreieck der Triangulation eine positive Indikatrix so erteilen, dass die beiden Dreiecke eines Dreieckspaares stets kohärente Indikatrizien bekommen. Eine Kante  $\alpha = ee'$  sei mit dem durch die Schreibweise angedeuteten Durchlaufungssinn versehen; von den beiden Dreiecken  $\Delta, \Delta'$  mit der gemeinsamen Kante  $ee'$  sei  $\Delta$  dasjenige, dessen positive Indikatrix auf  $\alpha$  den Durchlaufungssinn  $ee'$  induziert. Wir sagen dann, dass die oben beschriebene Cokante  $\alpha^*$ , von  $i$  nach  $i'$  durchlaufen, die Kante  $\alpha$  *von links nach rechts* (oder im positiven Sinne) überkreuzt.

### Ansatz des Problems

Jetzt sind wir in der Lage, anzudeuten, wie wir das Problem der Charakteristik in Angriff nehmen wollen. Wenn  $\beta$  ein geschlossener Cokantenzug und  $\alpha$  ein geschlossener Kantenzug ist, so ist der Begriff der algebraischen Summe der Überkreuzungen von  $\beta$  über  $\alpha$  vollkommen klar. Wir hoffen, dass folgende Tatsachen wahr sind: Jede geschlossene Kurve ist sowohl einem geschlossenen Kantenzug wie einem geschlossenen Cokantenzug homolog. Wenn immer  $\alpha, \alpha'$  zwei zueinander homologe geschlossene Kantenzüge und  $\beta, \beta'$  zwei homologe geschlossene Cokantenzüge sind, besteht die Gleichung

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = \text{ch}(\beta', \alpha').$$

Damit ist es dann möglich,  $\text{ch}(\beta, \alpha)$  für irgend zwei geschlossene Wege  $\alpha, \beta$  dadurch zu definieren, dass man  $\alpha$  durch einen beliebigen zu  $\alpha$  homologen geschlossenen Kantenzug,  $\beta$  durch einen beliebigen zu  $\beta$  homologen geschlossenen Cokantenzug ersetzt. Wir hoffen endlich, dass die so allgemein erklärte

Charakteristik das Gesetz der Antisymmetrie (1) erfüllt. Freilich haben wir uns den Nachweis dieses Faktums dadurch erschwert, dass wir die beiden Argumente  $\alpha, \beta$  ungleichartig behandeln, nämlich für  $\alpha$  Kantenzüge, für  $\beta$  Cokantenzüge einsetzen.

*Der Poincarésche Formalismus.* Man erteile willkürlich jeder Kante  $\kappa$  einen bestimmten «positiven» Durchlaufungssinn und der zugehörigen Cokante  $\kappa^*$  einen solchen, dass sie  $\kappa$  von links nach rechts überkreuzt. Ein geschlossener Kantenzug  $\alpha$  durchläuft jede Kante  $\kappa$  in summa eine bestimmte Anzahl von Malen  $x_\kappa$ , wobei eine positive Durchlaufung mit  $+1$ , eine negative mit  $-1$  in Ansatz gebracht wird. Wir schreiben symbolisch  $\alpha = \sum x_\kappa \kappa$  und sprechen von  $\alpha$  als einem *Zykel* in dem Sinne, dass zwei geschlossene Kantenzüge  $\alpha$  und  $\alpha'$  identifiziert werden, wenn sie gleiche Durchlaufungszahl,  $x_\kappa = x'_\kappa$ , für eine jede Kante  $\kappa$  haben. Von den ganzen Zahlen  $x_\kappa$  verschwinden alle bis auf endlich viele. Sei  $\kappa = \overrightarrow{ee'}$ . Wir setzen für eine beliebige Ecke  $a$ :  $\varepsilon(a \kappa) = +1$ , wenn  $a = e'$ ,  $\varepsilon(a \kappa) = -1$ , wenn  $a = e$ ,  $\varepsilon(a \kappa) = 0$ , wenn  $a$  verschieden von  $e$  und  $e'$  ist. Die Bedingung der Geschlossenheit bedeutet, dass unser Kantenzug  $\alpha$  in irgendeine Ecke  $a$  ebensooft ein- wie ausläuft, und das drückt sich in der Gleichung aus:

$$\sum_\kappa \varepsilon(a \kappa) x_\kappa = 0. \quad (2)$$

Ist  $\Delta$  irgendein Dreieck, so setzen wir  $\varepsilon(\kappa \Delta) = 0$ , ausser wenn  $\Delta$  eines der beiden Dreiecke  $\Delta_1, \Delta_2$  mit der gemeinsamen Kante  $\kappa$  ist. Hingegen setzen wir  $\varepsilon(\kappa \Delta_1) = +1$ ,  $\varepsilon(\kappa \Delta_2) = -1$ , wenn die positive Indikatrix von  $\Delta_1$  auf  $\kappa$  den positiven, die von  $\Delta_2$  den negativen Durchlaufungssinn induziert. Es besteht für jede Ecke  $a$  und jedes Dreieck  $\Delta$  der Triangulation die Gleichung

$$\sum_\kappa \varepsilon(a \kappa) \varepsilon(\kappa \Delta) = 0. \quad (3)$$

Ein geschlossener Cokantenzug kann als ein *Cozykel*  $\sum y_\kappa \kappa^*$  angesprochen werden, indem man angibt, wie oft er,  $y_\kappa$ -mal, in summa die Cokante  $\kappa^*$  im positiven Sinne durchläuft. Die Geschlossenheit des Cozykels findet in den Gleichungen

$$\sum_\kappa y_\kappa \varepsilon(\kappa \Delta) = 0 \quad (4)$$

ihren Ausdruck. Dies ist die Weise, wie H. POINCARÉ uns gelehrt hat, das kombinatorische Schema der Triangulation den Methoden der linearen Algebra zu unterwerfen. Schreibt man die Zahlen  $\varepsilon(a \kappa)$  als eine Matrix  $E$ , in welcher  $a$  der Zeilen-,  $\kappa$  der Spaltenindex ist, die Zahlen  $x_\kappa$  als eine Spalte  $x$ , die Zahlen  $y_\kappa$  als eine Zeile  $y$ , die Grössen  $\varepsilon(\kappa \Delta)$  endlich als eine Matrix  $E^*$  mit  $\kappa$  als Zeilen- und  $\Delta$  als Spaltenindex, so lauten die Gleichungen (2), (3) und (4) in Matrizenkalkül beziehungsweise

$$E x = 0, \quad E E^* = 0, \quad y E^* = 0.$$



Der Cozykel  $\beta = \sum y_{\kappa} \kappa^*$  überschneidet den Zykel  $\alpha = \sum x_{\kappa} \kappa$  so oft, wie die folgende Charakteristik angibt:

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = \sum y_{\kappa} x_{\kappa} = y \cdot x.$$

### Algebraisierung der Integralfunktionen

Eine Integralfunktion  $F$  ordnet jeder Cokante  $\kappa^*$  einen bestimmten Wert  $F(\kappa^*)$  zu. Da der geschlossene Cokantenzug, der die um eine Ecke  $a$  herumliegenden Elementardreiecke

$$\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{r-1} \quad (\Delta_r = \Delta_0)$$

von Mittelpunkt zu Mittelpunkt miteinander verbindet, im Innern des einfach zusammenhängenden Dreieckssterns verläuft, muss der Wert von  $F$  für diesen Zug, das ist

$$\sum \varepsilon(a, \kappa) f_{\kappa} = 0 \quad (5)$$

ein. Der Wert  $F(\beta)$  der Integralfunktion  $F$  für den Cozykel  $\beta = \sum y_{\kappa} \kappa^*$  ist  $\sum y_{\kappa} f_{\kappa}$ . Ich behaupte zweierlei:

1. Durch die Bestimmungszahlen  $f_{\kappa}$  ist die Integralfunktion im Sinne der Kohomologie eindeutig festgelegt.

Unter der Voraussetzung, dass sie den sämtlichen, den Ecken  $a$  entsprechenden Gleichungen (5) genügen, können diese Bestimmungszahlen beliebig vorgegeben werden.

Daraus folgt, dass es zu jedem Zykel  $\alpha = \sum x_{\kappa} \kappa$  eine beschränkte Integralfunktion  $F_{\alpha}$  gibt (mit den Bestimmungszahlen  $f_{\kappa} = x_{\kappa}$ ), so dass für beliebige geschlossene Cozykel  $\beta = \sum y_{\kappa} \kappa^*$  die Gleichung

$$F_{\alpha}(\beta) = \text{ch}(\beta, \alpha)$$

besteht. Da der Wert  $F_{\alpha}(\beta)$  sich nicht ändert, wenn man  $\beta$  durch irgendeinen ihm schwach homologen geschlossenen Weg ersetzt, überträgt sie die Definition der Charakteristik  $\text{ch}$  sofort von Cozykeln auf beliebige geschlossene Wege  $\beta$  und liefert das Gesetz

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = \text{ch}(\beta', \alpha)$$

für irgend zwei geschlossene Wege  $\beta, \beta'$ , die einander schwach homolog sind; insbesondere  $\text{ch}(\beta, \alpha) = 0$ , wenn immer  $\beta \sim 0$ . Jedoch bleibt das Argument  $\alpha$  einstweilen auf Zykeln beschränkt. Da die Gleichungen (5) ganzzahlige Koeffizienten besitzen, ist jede beschränkte Integralfunktion einer linearen Kombination endlichvieler beschränkter Integralfunktionen kohomolog, deren Bestimmungszahlen  $f_{\kappa}$  ganze Zahlen sind. Darum gilt auch die umgekehrte Tatsache:



A. Hat ein geschlossener Weg  $\beta$  die Eigenschaft, dass  $\text{ch}(\beta, \alpha) = 0$  ist für jeden Zykel  $\alpha$ , so ist  $\beta$  schwach homolog Null.

Um die beiden oben erwähnten Tatsachen betreffend die Bestimmungszahlen einer Integralfunktion zu erweisen, haben wir an erster Stelle zu zeigen, dass jeder geschlossene Weg  $\gamma$  einem Cozykel homolog ist. Da jeder Punkt der Fläche im Innern mindestens eines Dreieckssterns liegt, folgt aus den Grundlagen der Analysis, dass sich  $\gamma$  in endlichviele Teilbögen

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \quad (\gamma_{n+1} = \gamma_1)$$

zerlegen lässt, deren jeder ganz im Innern eines Dreieckssterns verläuft. Auf einanderfolgende Bögen, die im gleichen Stern liegen, vereinigen wir zu einem einzigen Teilbogen. Dann hat der Dreiecksstern  $\Sigma_1$ , innerhalb dessen  $\gamma_1$  liegt, ein Dreieckspaar mit demjenigen Stern gemein, in welchem  $\gamma_2$  liegt. Der Endpunkt  $a_2$  von  $\gamma_1$ , welcher zugleich der Anfangspunkt von  $\gamma_2$  ist, liegt in einem  $\Delta$ , der beiden Dreiecke dieses Paares (liegt er in beiden, so nehmen wir für  $\Delta$  eines davon). Wir hängen dann an  $\gamma_1$  die in  $\Delta$  verlaufende Strecke an, die von  $a_2$  nach dem Mittelpunkt  $i$  von  $\Delta$  führt, und bringen dieselbe im umgekehrten Sinne durchlaufene Strecke vor  $\gamma_2$  an. Sei  $F$  eine Integralfunktion. Durch das geschilderte Verfahren verwandeln sich die Bögen  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  durch Hinzufügung je einer Strecke am Anfang und am Ende in Bögen  $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ , die je innerhalb eines Sterns vom Mittelpunkt eines Dreiecks zum Mittelpunkt eines anderen führen. Dabei bleibt die Summe

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$$

ungeändert und damit auch der Wert von  $F(\gamma)$ , da ja die zwischengeschalteten Strecken, zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, sich aufheben. Der im Stern  $\Sigma_1$  vom Mittelpunkt des Dreiecks  $\Delta$  zum Mittelpunkt des Dreiecks  $\Delta'$  führende Weg  $\gamma'_1$  kann durch einen dieselben beiden Punkte verbindenden, im Dreiecksstern im einen oder andern Sinne herumlaufenden Cokantenzug  $\gamma''_1$  ersetzt werden, und wegen des einfachen Zusammenhangs des Sterns ist dabei  $F(\gamma'_1) = F(\gamma''_1)$ . So erhalten wir schliesslich einen geschlossenen Cokantenzug  $\gamma'' = \gamma'_1 + \gamma''_1 + \gamma'_2 + \dots$ , der homolog  $\gamma$  ist; denn er genügt für jede Integralfunktion  $F$  der Gleichung  $F(\gamma) = F(\gamma'')$ . Ebenso ergibt sich, dass jeder geschlossene Weg homolog einem geschlossenen Kantenzug ist.

Die zweite Tatsache, dass die Zahlen  $f_x$  unter Einhaltung der sämtlichen Bedingungen (5) beliebig vorgegeben werden können, ergibt sich etwa so. Für die  $r$  in  $a$  mündenden Kanten  $\kappa_1, \dots, \kappa_r$  setzen wir  $f_i = \varepsilon(a, \kappa_i) f_{\kappa_i}$ . Dann ist die Summe  $f_1 + \dots + f_r = 0$ , und es lassen sich also Zahlen  $g_0, \dots, g_{r-1}$  ( $g_r = g_0$ ) so finden, dass  $f_i = g_i - g_{i-1}$ . Im positiv umlaufenden Zykel der Dreiecke mit der Ecke  $a$  trennt  $\kappa_i$  das Dreieck  $\Delta_{i-1}$  von  $\Delta_i$ . Wir ordnen dann den inneren Punkten  $p$  von  $\Delta_i$  den Funktionswert  $g(p) = g_i$  zu, den inneren Punkten  $p$  der

Kante  $\kappa_i$  den Wert

$$g(\rho) = \frac{1}{2} (\kappa_{i-1} + \kappa_i) ,$$

schliesslich dem Zentrum  $a$  den Wert

$$g(a) = \frac{1}{r} (g_0 + \cdots + g_{r-1}) .$$

Für eine Kurve  $\gamma$ , die innerhalb dieses Sterns vom Punkte  $p$  zum Punkte  $p'$  läuft, setze man

$$F(\gamma) = g(p') - g(p) .$$

In die Definition von  $g(p)$  geht eine willkürliche additive Konstante ein, die aber bei der Bestimmung von  $F(\gamma)$  wieder herausfällt. Liegt der Kurvenbogen  $\gamma$  in zwei Dreieckssternen, die dann ein Dreieckspaar gemein haben, so ist der resultierende Wert  $F(\gamma)$  auch unabhängig davon, welchen dieser beiden Sterne man der Berechnung zugrunde legt. Ist schliesslich  $\gamma$  irgendeine Kurve, geschlossen oder nicht, so teile man sie in endlichviele Bögen  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), deren jeder ganz in einem Dreiecksstern verläuft, und bilde dann

$$F(\gamma) = F(\gamma_1) + \cdots + F(\gamma_n) .$$

Dieser Wert ist von der benutzten Teilung unabhängig, wie man sofort sieht, wenn man zwei Einteilungen in Bögen überlagert. Auf diese Weise erhält man eine Integralfunktion  $F$  mit den Bestimmungszahlen  $f_\kappa$ .

## Berechnung des Zusammenhangsgrades einer geschlossenen Fläche

$F$  ist dann und nur dann homolog Null, wenn sich jedem Elementardreieck  $\Delta$  eine Zahl  $g_\Delta$  so zuordnen lässt, dass allgemein für die von  $\Delta$  nach  $\Delta'$  führende Kante  $\kappa^*$  der Wert  $F(\kappa^*) = f_\kappa$  gleich  $g_{\Delta'} - g_\Delta$  wird; oder

$$f_\kappa = -\sum_{\Delta} \varepsilon(\kappa, \Delta) g_\Delta . \quad (6)$$

Im Falle einer geschlossenen Fläche seien die Anzahlen der Ecken, Kanten und Dreiecke  $e$ ,  $f$  und  $d$ . Alsdann hat man  $f$  Unbekannte  $f_\kappa$ , denen die  $e$  Gleichungen (5) auferlegt sind. Da zwischen ihren linken Seiten nur *eine* Identität besteht, nämlich diejenige mit den Koeffizienten  $\lambda_\kappa = 1$ , so ist die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen  $f - e + 1$ . Auf der andern Seite ist die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen, die aus (6) mittels beliebiger Zahlen  $g_\Delta$  hervorgehen, gleich  $d - 1$ . Der Überschuss

$$(f - e + 1) - (d - 1) = f - e - d + 2$$

ist darum die Maximalzahl  $h$  der linear unabhängigen Integralfunktionen, und daraus folgt, dass diese «Eulersche Charakteristik»  $\chi = c - d - 2$  von der Triangulation der Fläche unabhängig ist.

### Ein Satz über primitive geschlossene Wege

Für geschlossene Flächen kann der Satz A in bemerkenswerter Weise verschärft werden. Wir nennen einen geschlossenen Weg  $\beta$  *primitiv*, wenn er nicht dem Vielfachen  $n\gamma$  ( $n = 2$  oder  $3$  oder  $4$  oder ...) eines geschlossenen Weges  $\gamma$  homolog ist. Ich behaupte:

A'. Zu einem primitiven Weg  $\beta$  gibt es einen Zykel  $\alpha$ , für den  $\text{ch}(\beta, \alpha) = 1$  ist (der also von  $\beta$  in summa genau einmal überkreuzt wird).

*Beweis.* Zykeln  $\alpha$  und Cozykeln  $\beta$  werden durch ihre  $f$  Durchlaufungszahlen  $x_z$  bzw.  $y_z$  gekennzeichnet; die  $x_z$  werden als Spalte  $x$ , die  $y_z$  als Zeile  $y$  geschrieben und  $x$  und  $y$  als Vektoren in zueinander dualen Vektorräumen angesehen, für welche das innere Produkt

$$\sum y_z x_z = y \cdot x$$

eine invariante Bedeutung hat. Die Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten sollen Gittervektoren heißen. Werden die Koordinaten  $x_z$  einer beliebigen unimodularen Transformation unterworfen (das ist einer linearen Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Determinante  $\pm 1$  ist), so bleibt die Kennzeichnung der Gittervektoren als der Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten erhalten. Werden die Koordinaten  $y_z$  des Vektors  $y$  der kontragredienten linearen Transformation unterworfen, so bleibt auch der Ausdruck des inneren Produkts der gleiche:

$$y \cdot x = y_1 x_1 + \cdots + y_f x_f.$$

Man kann nach dem Verfahren, das von MINKOWSKI als Adaptation eines Gitters an ein enthaltenes bezeichnet wurde, eine unimodulare Transformation im  $x$ -Raum so ausführen, dass die den Gleichungen (2) genügenden «geschlossenen» Vektoren  $(x_1, \dots, x_l)$  durch das Verschwinden der  $f - l$  letzten Koordinaten gekennzeichnet sind. Mit andern Worten: Wir bekommen  $l$  Zykel  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  so,

dass jeder Zykel sich in einer und nur einer Weise als eine Summe  $\sum_{i=1}^l x_i \alpha_i$  mit

ganzzahligen Koeffizienten  $x_i$  schreiben lässt. Man führe die kontragrediente Transformation im dualen  $y$ -Raum aus. Wegen der Gleichung  $E E^* = 0$  für die Matrizen  $E$  und  $E^*$  verschwinden nach dieser Transformation in jeder Spalte von  $E^*$  die letzten  $f - l$  Glieder, das heisst die letzten  $k - l$  Zeilen von  $E^*$  sind mit Nullen besetzt. Die die Geschlossenheit eines  $y$ -Vektors zum Ausdruck bringenden Gleichungen (4) im dualen Raum betreffen demnach nur die Koordinaten  $y_1, \dots, y_l$ ; und nach einer geeigneten unimodularen Transformation dieser  $l$  Koordinaten besagen jene Gleichungen, dass die letzten  $l - h$  der

Koordinaten  $y_1, \dots, y_l$  verschwinden. Nachdem  $x_1, \dots, x_l$  der kontragredienten Transformation unterworfen sind, nehmen die geschlossenen Gittervektoren im  $x$ -Raum die Form

$$(x_1, \dots, x_h, x_{h+1}, \dots, x_l, 0, \dots, 0)$$

an, die im  $y$ -Raum die Form

$$(y_1, \dots, y_h, 0, \dots, 0, y_{l+1}, \dots, y_l),$$

und die Charakteristik wird

$$\text{ch}(\beta, \alpha) = y \cdot x = y_1 x_1 + \dots + y_h x_h. \quad (7)$$

Der Cozykel  $\beta$  wird dann und nur dann homolog Null sein, wenn dieser Ausdruck für beliebige ganzzahlige Werte von  $x_1, \dots, x_l$  verschwindet, das heisst, wenn  $y_1 = \dots = y_h = 0$  ist. Wir haben also  $h$  Cozykel  $\beta_1, \dots, \beta_h$  gefunden, so dass jeder geschlossene Weg  $\beta$  homolog einer eindeutig bestimmten ganzzahligen linearen Kombination  $y_1 \beta_1 + \dots + y_h \beta_h$  derselben ist, und damit erweist sich  $\beta$  als der Zusammenhangsgrad.  $\beta$  ist primitiv, falls  $y_1, \dots, y_h$  den grössten gemeinsamen Teiler 1 besitzen. Dann kann man aber ganze Zahlen  $x_1, \dots, x_h$  und damit einen Zykel  $\sum_{i=1}^h x_i \alpha_i$  finden, für welche (7) gleich 1 wird, und damit ist unser Satz bewiesen.

### Das Gesetz der Antisymmetrie

Wir haben die Regel angegeben, nach welcher der Wert der zum Zykel  $\alpha = \sum x_\alpha \alpha$  gehörigen Integralfunktion

$$F_\alpha(\beta) = \text{ch}(\beta, \alpha)$$

für einen beliebigen Weg  $\beta$  zu berechnen ist. Hier spezialisieren wir nun zunächst auch  $\beta$  als einen Zykel  $\sum y_\alpha \alpha$ . Eine Kante  $\alpha$  mit den beiden Endpunkten  $e, e'$  zerlegen wir durch ihre Mitte  $c$  in die zwei Halbkanten  $(\alpha e) = \bar{c}e$  und  $(\alpha e') = c\bar{e}'$ , so dass

$$\alpha = \sum_c \varepsilon(e, \alpha) (\alpha e).$$

Die  $r$  in  $c$  einmündenden Kanten, wie die Halbkanten  $c_i \bar{e}_i$ , numerieren wir in zyklischer Reihenfolge,  $e$  im positiven Sinne umlaufend, mit  $i = 1, \dots, r$ . Es ist zweckmässig, den Index  $i$  als einen solchen zu verstehen, der alle ganzen Zahlen durchläuft, aber so, dass Werte  $i$ , die einander kongruent modulo  $r$  sind, als gleich gelten. Die den in  $c$  einlaufenden Kanten  $\alpha_i$  zugehörigen Zahlen  $x_\alpha$ , genauer also die Zahlen  $\varepsilon(e, \alpha_i) x_{\alpha_i}$  wollen wir, wie schon früher, mit  $x_1, \dots, x_r$  bezeichnen. Ihre Summe ist 0, und wir können darum Zahlen  $g_i$  so bestimmen,

dass  $x_i = g_i - g_{i-1}$ . Der Beitrag zu  $F_\alpha(\beta)$   $\text{ch}(\beta \alpha)$ , der von den in  $e$  mündenden Halbkanten (der «Spinne in  $e$ ») herrührt, ist dann

$$w_e(\beta \alpha) = \sum_i y_i F_\alpha(c_i \bar{e}).$$

Hier ist

$$F_\alpha(c_i \bar{e}) = -\frac{1}{2} (g_i + g_{i-1}) + g_i,$$

wo  $g$  der Mittelwert der  $r$  Zahlen  $g_0, \dots, g_{r-1}$  ist. Da auch die Summe  $\sum y_i = 0$  ist, können wir für diesen Beitrag schreiben:

$$= \frac{1}{2} \sum_i y_i (g_i + g_{i-1}).$$

Eben wegen der Gleichung  $\sum y_i = 0$  kann die in die  $g_i$  eingehende willkürliche additive Konstante irgendwie gewählt werden, etwa gemäss  $g_0 = 0$ . Dann ist

$$\frac{1}{2} (g_i + g_{i-1}) = \sum_{j > i} x_j + \frac{1}{2} x_i = \sum_{j < i} x_j + \frac{1}{2} x_i.$$

Daher kommt

$$w_e(\beta \alpha) = \sum_{1 \leq j < i \leq r} y_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r y_i x_i = - \sum_{1 \leq i < j \leq r} x_j y_i - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq r} x_i y_i. \quad (8)$$

Der von der Spinne in  $e$  herrührende Beitrag zur Charakteristik ist also eine halbganze Zahl. Wenn wir in der zweiten Formel die Indizes  $i$  und  $j$  vertauschen, so folgt ohne weiteres das für die Verkehrsregelung so wichtige *Gesetz der Antisymmetrie*

$$w_e(\beta \alpha) = -w_e(\alpha \beta).$$

Setze einen Augenblick

$$L_m = \sum y_j x_j \quad (m-1 \leq j < i \leq m+r).$$

Aus unserer Berechnung geht hervor, dass  $L_0$  unabhängig davon ist, wo wir im Zykel der Kanten, die in  $e$  hineinlaufen, mit der Numerierung durch die Ziffern 1 bis  $r$  beginnen. Dies ist sofort zu verifizieren. Denn  $L_m$  entsteht aus  $L_{m-1}$  dadurch, dass man

$$(y_{m+1} + \dots + y_{m+r-1}) x_m$$

fortlässt und dafür

$$y_{m+r} (x_{m+1} + \dots + x_{m+r-1})$$

hinzufügt, diese Terme sind aber beide gleich  $-y_m x_m$ . Darum ist  $L_0 = L_1 = L_2 = \dots$ .



Man mache sich klar, dass unsere Formel für die Schnittpunktmultiplizität  $w_e$  der beiden Zykeln  $\beta$  und  $\alpha$  in  $e$  dem entspricht, was man anschaulich erwartet. Ein der Fahrbahn  $\alpha$  folgendes Auto fahre längs der Strasse  $\alpha_i$  in die Kreuzung  $e$  hinein und verlasse sie längs  $\alpha_{i'}$ ; ein zweites Auto  $\beta$  komme zur gleichen Zeit längs der Strasse  $\alpha_j$  auf die Kreuzung zu und verlasse sie längs  $\alpha_{j'}$ . Dann wird man erwarten, dass die Schnittmultiplizität 0 ist, falls in der zyklischen Anordnung der in  $e$  einmündenden Strassen das Paar  $(\alpha_i, \alpha_{i'})$  das Paar  $(\alpha_j, \alpha_{j'})$  nicht trennt; man wird die Multiplizität  $\pm 1$  erwarten, falls die beiden Paare sich trennen, und zwar sollte 1 herauskommen, wenn  $\beta$  den Weg  $\alpha$  in  $e$  von links nach rechts überkreuzt,  $-1$  im entgegengesetzten Falle. Es kann aber auch geschehen, dass die beiden Autos die Kreuzung längs derselben Strasse verlassen. Dann ergibt unsere Formel einen Wert  $\pm 1/2$ . In der Tat bleibt in diesem Falle die Entscheidung, ob die eine Bahn die andere kreuzt, in  $e$  noch suspendiert. Erst wenn die Wege sich später in einer andern Kreuzung trennen, wird durch deren Beitrag  $\pm 1/2$  entschieden werden, ob Kreuzung stattgefunden hat (falls nämlich die Summe der beiden Beiträge nicht 0 ist), und wenn ja, in welchem Sinne. Unsere Formel umfasst in präziser algebraischer Form diese und alle andern Möglichkeiten.

Natürlich muss die über die Ecken  $e$  erstreckte Summe der Beiträge  $w_e(\beta, \alpha)$  eine ganze Zahl sein. Auch dies ist sofort zu verifizieren. Der möglicherweise halbganze Anteil von  $w_e$ ,  $(1/2) \sum y_i x_{i'}$ , ist ja gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \varepsilon(e, \alpha) y_{\alpha} \varepsilon(e, \alpha) x_{\alpha},$$

und darum ist die über alle Ecken  $e$  erstreckte Summe dieser Anteile

$$\frac{1}{2} \sum_{e, \alpha} \varepsilon^2(e, \alpha) y_{\alpha} x_{\alpha} \quad \text{wegen} \quad \sum_e \varepsilon^2(e, \alpha) = 2 \quad \text{gleich} \quad \sum_{\alpha} y_{\alpha} x_{\alpha}.$$

Das für Zykeln  $\alpha, \beta$  nunmehr erwiesene Gesetz der Antisymmetrie (1) ermöglicht es uns, in  $\text{ch}(\beta, \alpha)$  die Beschränkung von  $\alpha$ , und nicht bloss von  $\beta$ , auf geschlossene Kantenzüge aufzuheben. Seien nämlich  $\alpha_1, \alpha'_1$  zwei geschlossene Kantenzüge, welche dem geschlossenen Weg  $\alpha$  schwach homolog sind, und  $\beta_1$  ein Zykel, der schwach homolog dem geschlossenen Weg  $\beta$  ist. Dann gilt  $\alpha_1 \sim \alpha'_1$  und darum

$$\text{ch}(\beta_1, \alpha_1) = -\text{ch}(\alpha_1, \beta_1) = -\text{ch}(\alpha'_1, \beta_1) = \text{ch}(\beta_1, \alpha'_1),$$

folglich  $\text{ch}(\beta, \alpha_1) = \text{ch}(\beta, \alpha'_1)$ . Man kann demnach  $\text{ch}(\beta, \alpha)$  eindeutig dadurch definieren, dass man den geschlossenen Weg  $\alpha$  durch irgendeinen ihm schwach homologen Zykel ( $\alpha_1$  oder  $\alpha'_1$ ) ersetzt. Sind  $\alpha_1, \beta_1$  zwei Zykel, die beziehungsweise den geschlossenen Wegen  $\alpha, \beta$  schwach homolog sind, so gilt dann  $\text{ch}(\beta, \alpha) = \text{ch}(\beta_1, \alpha_1)$ . Das Gesetz der Antisymmetrie bleibt für beliebige  $\alpha, \beta$



erhalten. Das Ziel einer universellen Definition der Charakteristik ist damit erreicht. Immerhin ist zu beachten, dass diese Definition *sich auf eine feste Triangulation  $\mathfrak{T}$  der Fläche  $\mathfrak{F}$  stützt*. Soll dies in Evidenz gesetzt werden, so schreibe man  $ch_{\mathfrak{F}}$  statt  $ch$ .

Ist die Fläche geschlossen und  $h$  ihr Zusammenhangsgrad, so können irgend  $h$  voneinander linear unabhängige geschlossene Wege  $\gamma_1, \dots, \gamma_h$  als eine Wegebasis benutzt werden, indem jeder geschlossene Weg  $\alpha$  homolog einer linearen Kombination  $x_1 \gamma_1 + \dots + x_h \gamma_h$  ist. Für dieses  $\alpha$  und  $\beta \sim y_1 \gamma_1 + \dots + y_h \gamma_h$  ergibt sich

$$ch(\beta, \alpha) = \sum_{i,j=1}^h s_{ij} y_i x_j, \quad s_{ij} = ch(\gamma_i, \gamma_j).$$

Der Satz A besagt, dass diese schiefsymmetrische bilineare «Charakteristikenform» nicht ausgeartet ist und dass somit ihre Determinante  $d = \det s_{ij}$  nicht verschwindet. Dies kann aber für eine schiefsymmetrische Form nur dann stattfinden, wenn die Dimension  $h$  gerade ist. *Darum ist der Zusammenhangsgrad  $h$  einer geschlossenen zweiseitigen Fläche stets eine gerade Zahl*; die ganze Zahl  $h/2$  heisst *Geschlecht*. Die Zahlen  $x_i$  sind nicht notwendig ganz, doch folgt aus den Gleichungen

$$ch(\gamma_i, \alpha) = \sum_{j=1}^h s_{ij} x_j,$$

dass sie ganze Zahlen dividiert durch  $d$  sind. Durch den schärferen Satz A' und seinen Beweis hat sich gezeigt, 1. dass die geschlossenen Wege eine *Integritätsbasis*  $\gamma_1, \dots, \gamma_h$  besitzen, so dass in der Homologie

$$\alpha \sim x_1 \gamma_1 + \dots + x_h \gamma_h$$

für jeden geschlossenen Weg  $\alpha$  die Koeffizienten  $x_i$  ganze Zahlen werden, und 2. dass bei Zugrundelegung einer solchen Basis  $d = 1$  wird. Aus dem letzteren Umstand folgt, dass man die Integritätsbasis so wählen kann, dass die Charakteristikenform die *kanonische* Gestalt

$$(y_1 x_2 - y_2 x_1) + \dots + (y_{h-1} x_h - y_h x_{h-1})$$

annimmt (RIEMANNS «kanonische Rückkehrschnittpaare»).

Wir haben jetzt alle wesentlichen Eigenschaften der Charakteristik beisammen und möglichst einfach kombinatorisch abgeleitet. Um aber nun festzustellen, dass die Charakteristik in Wahrheit von der Triangulation, auf die sich ihre Definition stützte, unabhängig ist, benutze ich eine ganz andere Definition derselben, die für die funktionentheoretischen Anwendungen viel geeigneter ist und mir durch diese Anwendungen nahegelegt wurde. Zur Vorbereitung stellen

Wir zunächst fest, dass die Charakteristik sich nicht ändert, wenn die Triangulation  $\zeta$  in gewisser elementarer Weise einer Unterteilung unterworfen wird.

### Unterteilungen

Sind  $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$  drei (nicht in einer Geraden liegende) Punkte ( $i=1, 2, 3$ ) im Zahlendreieck  $Z_\xi$  mit den Ecken 1, 2, 3, so wird durch die Substitution

$$\xi_j = \sum \alpha_{ij} \eta_j \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0, \eta_3 \geq 0, \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1,$$

ein Zahlendreieck  $Z_\eta$  als das Teildreieck von  $Z_\xi$  mit den Ecken  $a_1, a_2, a_3$  festgelegt. Eine Triangulation  $\zeta'$  ist eine *Unterteilung* der Triangulation  $\zeta$ , wenn die Elementardreiecke von  $\zeta'$  Teile der Elementardreiecke von  $\zeta$  sind. Wir wollen hier aber nur zwei ganz spezielle Typen von Unterteilungen betrachten. Ist  $a$  ein Punkt von  $Z_\xi$ , so zerlegen wir  $Z_\xi$  in die drei Dreiecke  $23a, 31a, 12a$ . Ist  $a$  nicht im Innern von  $Z_\xi$ , sondern etwa auf der Kante 23 gelegen, so fällt hier das erste Dreieck,  $23a$ , fort. Ist  $a$  ein innerer Punkt des Elementardreiecks  $\Delta$  der Triangulation  $\zeta$ , so führen wir die angegebene Teilung nur in diesem Dreieck aus. Ist aber  $a$  ein Kantenpunkt, so muss sie in den beiden an diese Kante angrenzenden Dreiecken bewerkstelligt werden. Diese *«Elementarteilung erster Art»* wird dazu benutzt, um einen Punkt  $a$ , der noch nicht Eckpunkt ist, zu einem Eckpunkt der Triangulation zu machen. Die *«Elementarteilung zweiter Art»* ist die *Normalteilung*, durch welche  $Z_\xi$  in die vier Teildreiecke  $(23c_1), (31c_2), (12c_3), (c_1, c_2, c_3)$  zerlegt wird, wo

$$c_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad c_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad c_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

auf der Fläche wird diese Normalteilung in allen Elementardreiecken  $\Delta$  der gegebenen Triangulation  $\zeta$  gleichzeitig ausgeführt. Durch Iteration dieses Prozesses der Normalteilung erhält man Triangulationen, die schliesslich *«beliebig fein»* werden.

Geht die Triangulation  $\zeta'$  aus  $\zeta$  durch einen der beiden Elementarprozesse hervor, so ist ein  $\zeta$ -Kantenzug zugleich ein  $\zeta'$ -Kantenzug, und aus der Formel (3) für den Beitrag  $w_e$  geht ohne weiteres hervor, dass, wenn  $\alpha, \beta$  irgend zwei geschlossene  $\zeta$ -Kantenzüge sind, die Gleichung

$$\text{ch}_{\zeta'}(\beta, \alpha) = \text{ch}_\zeta(\beta, \alpha) \quad (9)$$

besteht. In der Tat, wird das Strassennetz einer Stadt durch neu angelegte Strassen erweitert, so kann man diese sowie die etwa dadurch neu entstehenden Kreuzungen ignorieren, *solange niemand die neuen Strassen benutzt*. Die Gleichung

chung (9) überträgt sich dann aber durch Homologie auf beliebige geschlossene Wege  $\alpha, \beta$ ; und in derselben Allgemeinheit gilt sogar die Regel

$$\text{ch}_{\mathbb{Z}^*}(\beta, \alpha) = \text{ch}_{\mathbb{Z}}(\beta, \alpha) \quad (10)$$

für eine Triangulation  $\mathbb{Z}^*$ , die durch *wiederholte* elementare Unterteilungen auf  $\mathbb{Z}$  entsteht.

### Die «Kontinuumsdefinition» der Charakteristik

zu welcher wir jetzt übergehen, benutzt keine Triangulation, sondern die Bedeckung einer Fläche mit Umgebungen und die topologische Abbildung der Umgebungen auf das Innere von Kreisen. Es sei  $\alpha$  eine gegebene geschlossene Kurve auf  $\mathfrak{F}$ . Durch endlichviele Teilpunkte

$$0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (n \geq 0)$$

werde sie so in Bögen

$$\alpha_1 = 01, \quad \alpha_2 = 12, \quad \dots, \quad \alpha_n = n-1, 0$$

geteilt, dass der Bogen  $\alpha_i$  in der Umgebung  $U_i$  eines Flächenpunktes liegt, und diese Umgebung sei durch die topologische Abbildung  $A_i$  auf das Innere  $E$  des Einheitskreises der  $(x, y)$ -Ebene bezogen. Wir nehmen zunächst  $i = 1$ . Es sei  $K$  das Innere eines zu  $E$  konzentrischen Kreises von einem Radius  $\varrho$ , der kleiner als 1, aber doch so gross ist, dass die beiden Punkte 0, 1, oder vielmehr ihr Bild durch die Abbildung  $A = A_1$  erzeugten Bilder noch in  $K$  liegen. Wir sprechen von  $K$  als der «geschrumpften Umgebung  $U = U_1$ ». Für einen von 0 und 1 verschiedenen Punkt  $p$  in  $E$  sei  $2\pi q(p)$  der Winkel, um den man den Strahl  $\vec{p}$  im positiven Sinne drehen muss, damit er in die Lage  $\vec{p1}$  kommt. ( $q$  ist gleich  $q_1 - q_0$ , wenn  $2\pi q_0, 2\pi q_1$  die Winkel bedeuten, welche die Strahlen  $\vec{p0}, \vec{p1}$  mit der positiven  $x$ -Achse bilden.)  $q(p)$  ist nur mod 1 bestimmt. Doch auf der Peripherie  $k$  von  $K$  ist  $q(p)$  eine eindeutige stetige Funktion (deren Werte absolut kleiner als  $1/2$  sind). Diese kann man leicht als eine eindeutige stetige Funktion  $u(p)$  auf die ganze gelochte Fläche  $\mathfrak{F} - K$  so ausdehnen, dass sie ausserhalb einer kompakten Teilmenge von  $\mathfrak{F}$  verschwindet (zum Beispiel ausserhalb einer konzentrischen Kreisscheibe  $K_1$ , deren Radius  $> \varrho$ , aber  $< 1$  ist). Wir haben dann auf ganz  $\mathfrak{F}$  eine mehrdeutige stetige Funktion  $v(p)$ , die in  $K$  gleich  $q(p)$  ist und deren Werte für irgendeinen nicht in  $K$  gelegenen Punkt  $p$  von  $\mathfrak{F}$  die Zahlen sind, die sich von  $u(p)$  um eine ganze Zahl unterscheiden<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Für die funktionentheoretischen Anwendungen ist es zweckmässig, dass zu  $v(p)$  noch irgendeine ausserhalb einer kompakten Menge verschwindende eindeutige stetige Funktion hinzugefügt wird.

Ist  $\beta$  irgendeine nicht durch  $0$  und  $1$  hindurchgehende Kurve, so kann man die stetige Änderung von  $v(\beta)$  längs dieses Weges verfolgen und erhält einen eindeutig durch  $\beta$  bestimmten Zuwachs  $s_1(\beta)$ . Dies liefert eine (beschränkte) Integralfunktion  $s_1$  auf  $\mathfrak{F}$  mit den *singulären Punkten*  $0$  und  $1$ ; das heisst eine Integralfunktion auf der «punktierten Fläche», die aus  $\mathfrak{F}$  entsteht, wenn man die beiden Punkte  $0$  und  $1$  heraussticht. Da  $v(\beta)$  mod  $1$  eindeutig ist, ist  $s_1(\beta)$  für eine geschlossene (nicht durch  $0$  und  $1$  hindurchgehende) Kurve  $\beta$  eine ganze Zahl  $v$ ; diese gibt an, «wie oft der Weg  $\beta$  in summa im positiven Sinne zwischen  $0$  und  $1$  hindurchgeht». Von der besonderen Konstruktion der Funktion  $u(\beta)$  ist  $v$  unabhängig, da ja die Differenz der beiden, aus zwei verschiedenen Wahlen von  $u(\beta)$  entspringenden mehrdeutigen Funktionen  $v(\beta)$  eindeutig ist.

Indem wir dieselbe Konstruktion für jeden der Teilbögen  $\alpha_1 = 01$ ,  $\alpha_2 = 12$ , ..., von  $\alpha$  ausführen, erhalten wir eine beschränkte Integralfunktion

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

mit den Singularitäten  $0, 1, 2, \dots$ . Nach dem, was am Anfang bei Einführung des Drehsinns über die Invarianz der Ordnung gegenüber topologischen Abbildungen gesagt wurde, sind diese Singularitäten aber jetzt zu *hebba*ren Singularitäten geworden. Dies bedeutet, dass sich zum Beispiel um  $1$  eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $1$  verschiedenen Singularitäten enthaltende  $\epsilon$ -Umgebung  $u_1$  abgrenzen lässt, derart, dass für jede in  $u_1$  verlaufende und  $1$  nicht passierende geschlossene Kurve  $\gamma$  die Integralfunktion  $s$  den Wert  $0$  hat<sup>1)</sup>. Daher existiert eine in allen Punkten  $\beta$  von  $u_1$  ausser in  $1$  definierte Punktfunktion  $\psi(\beta)$ , so dass für eine jede zwei Punkte  $\beta$  und  $\beta'$  verbindende, in  $u_1$  verlaufende Linie  $\gamma$ , die nicht durch  $0$  und  $1$  hindurchgeht,

$$s(\gamma) = \psi(\beta') - \psi(\beta)$$

gilt. Der Umstand, dass wir an die Integralfunktionen keine Stetigkeitsforderungen gestellt haben, ermöglicht es uns, die Singularität im Punkte  $1$  einfach dadurch zu beseitigen, dass wir der Punktfunktion  $\psi$  daselbst irgendeinen bestimmten Wert geben, zum Beispiel  $\psi(1) = 0$ . Dann ist die Integralfunktion  $s(\beta)$  für beliebige Wege  $\beta$  definiert; ihr Wert für eine *geschlossene* Kurve  $\beta$  aber ist stets eine ganze Zahl. Diese ganze Zahl  $s_\alpha(\beta) = s(\beta, \alpha)$  bezeichnen wir jetzt als die *Charakteristik*  $s$ . Sie hängt von  $\alpha$  und  $\beta$  ab. In ihre Berechnung geht aber ausser der Kurve  $\alpha$  noch eine bestimmte Einteilung der Kurve  $\alpha$  in Teilbögen  $\alpha_i$  ein, ferner die Einbettung jedes Teilbogens  $\alpha_i$  in eine Umgebung  $U_i$  und deren topologische Abbildung  $A_i$  auf  $E$ . Es bleibt zu zeigen, dass das Resultat von diesen Hilfskonstruktionen unabhängig ist.

<sup>1)</sup> Denn  $1$  hat in beiden Abbildern  $A_1$  und  $A_2$  in bezug auf jede solche Kurve dieselbe Ordnung.

## Gleichheit der Charakteristiken $ch$ und $s$

Die Schritte, welche nötig sind, um die Übereinstimmung der Charakteristik  $s$  mit der früher auf Grund einer Triangulation  $\zeta$  definierten  $ch_\zeta$  zu erweisen, sind die folgenden.

1. Durch mehrere Elementarteilungen erster Art verwandelt man  $\zeta$  in eine feinere Triangulation, in welcher die Teilpunkte  $0, 1, 2, \dots$  zu Eckpunkten geworden sind. Indem man darauf den Prozess der Normalteilung hinreichend oft ausführt, bekommt man eine Triangulation  $\zeta^*$  von solcher Art, dass sich  $0$  und  $1$  innerhalb der geschrumpften Umgebung  $K$  durch einen einfachen  $\zeta$ -Kantenzug  $\alpha'_1 = 0ab \dots c1$  verbinden lassen und Entsprechendes auch für die andern Teilbögen gilt. Da  $\alpha_1 - \alpha'_1$  eine in  $K$  verlaufende geschlossene Kurve ist, gilt  $\alpha_1 - \alpha'_1 \simeq 0$ , und darum ist der geschlossene Kantenzug

$$\alpha' = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_n$$

homolog  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Wir operieren weiter mit dieser Triangulation  $\zeta^*$ .

2. Ein einfacher Kantenzug wie  $\alpha'_1$  zerlegt die Fläche  $\mathfrak{F}$  nicht; das heisst, je zwei nicht auf  $\alpha'_1$  gelegene Punkte können durch eine  $\alpha'_1$  nicht treffende Kurve miteinander verbunden werden. Es folgt daraus auch, dass in der abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  (die aus  $K$  durch Hinzufügung seiner Peripherie  $k$  entsteht) jeder nicht auf  $\alpha'_1$  gelegene Punkt  $p$  von der Peripherie aus auf einem  $\alpha'_1$  nicht treffenden Wege erreicht werden kann. Durch stetige Fortsetzung längs dieses Weges erhält man von den auf  $k$  herrschenden Werten von  $q$  aus einen bestimmten Wert  $q(p)$  in  $p$ . Dieser ist unabhängig von dem Weg in  $\overline{K}$ , der von  $k$  aus zu  $p$  führt. In der Tat, sind  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Wege, die von den Punkten  $q_1$  bzw.  $q_2$  auf  $k$  zu  $p$  führen, so durchlaufe man  $\gamma_1$  rückwärts von  $p$  nach  $q_1$ , darauf den Bogen  $q_1 q_2$  auf  $k$  und schliesslich den Weg  $\gamma_2$  von  $q_2$  nach  $p$ . So entsteht eine geschlossene Kurve  $\mathfrak{C}$  in  $E$ , und unsere Behauptung ist, dass  $q = q_1 = q_2$  stetig längs  $\mathfrak{C}$  fortgesetzt, zu seinem Ausgangswert zurückkehrt oder dass  $0$  und  $1$  dieselbe Ordnung in bezug auf  $\mathfrak{C}$  haben. Das ergibt sich aber daraus, dass  $0$  und  $1$  durch die  $\mathfrak{C}$  nicht treffende Kurve  $\alpha'_1$  verbunden sind. Man erhält also in der längs  $\alpha'_1$  aufgeschnittenen Fläche  $\mathfrak{F}$  eine eindeutige stetige Funktion  $v(p)$ .

3. Den «Sprung» von  $v$  über eine Kante  $\varkappa$  der Triangulation  $\zeta^*$  kann man dadurch bestimmen, dass man je einen inneren Punkt  $p, p'$  im Innern der beiden längs  $\varkappa$  zusammenhängenden Dreiecke  $\Delta, \Delta'$  der Triangulation wählt, diese innerhalb  $\Delta + \Delta'$  durch eine Linie  $\gamma$  verbindet, und dann

$$s_1(\gamma) = \{v(p') - v(p)\}$$

bildet. Der Sprung über eine jede nicht zu  $\alpha'_1$  gehörige Kante ist 0. Indem man den Dreiecksstern um  $1$  herum betrachtet, findet man mit Hilfe der Strahlabbildung dieses Sterns, dass der Sprung über die letzte zu  $\alpha'_1$  gehörige Kante  $c$



gleich 1 ist; darauf, mittels des Dreieckssterns um  $c$ , dass der Sprung über die vorletzte Kante gleich dem über die letzte Kante, also auch  $-1$  ist; und so fort. Ist daher  $\beta^*$  ein geschlossener Kokantenzug, so ergibt sich als Wert  $s_1(\beta^*)$  die Anzahl von Malen, die  $\beta^*$  in summa die Kanten des Kantenzugs  $\alpha'_1$  im positiven Sinne überschreitet.

4. Durch Addition über  $i = 1, 2, \dots, n$  findet man daraus die Gleichung

$$s_x(\beta^*) = \text{ch}(\beta^*, \alpha'),$$

wo die Berechnung der Charakteristik  $\text{ch}$  sich natürlich auf die Triangulation  $\zeta^*$  stützt. Ist jetzt  $\beta$  eine beliebige geschlossene Kurve und  $\beta^*$  ein  $\zeta^*$ -Cozykel, der homolog  $\beta$  ist, so folgt, da  $s_x$  auf der linken Seite eine Integralfunktion ist und  $\alpha' \simeq \alpha$ ,

$$s_x(\beta) = \text{ch}_{\zeta^*}(\beta, \alpha).$$

5. Endlich macht es die Gleichung (10) möglich, von der Triangulation  $\zeta^*$  auf die ursprüngliche  $\zeta$  zurückzugreifen:

$$s(\beta, \alpha) = \text{ch}_{\zeta}(\beta, \alpha).$$

Von links nach rechts gelesen, lehrt diese Gleichung, dass  $s(\beta, \alpha)$  von den an der Kurve  $\alpha$  anschliessenden Hilfskonstruktionen, die bei der Definition von  $s(\beta, \alpha)$  benutzt wurden, unabhängig ist; darauf lehrt sie, von rechts nach links gelesen, dass die Charakteristik  $\text{ch}_{\zeta}$  von der Triangulation  $\zeta$  unabhängig ist. Alle Eigenschaften von  $\text{ch}_{\zeta}$ , vor allem die schiefe Symmetrie, übertragen sich vermöge dieser Gleichung auf  $s(\beta, \alpha)$ .

Zur Bestimmung der Charakteristik stehen somit zwei Wege offen: der eine, kombinatorische, benutzt eine Triangulation und approximiert die geschlossenen Kurven im Sinne der Homologie durch Zykeln (Kantenzüge) der triangulierten Fläche. Der andere, «kontinuumsmäßige», fragt, wie oft eine geschlossene Kurve zwischen zwei «nahe gelegenen» Punkten 0 und 1 hindurchgeht, und bestimmt diese Anzahl, indem sie die beiden Punkte in eine Umgebung einschliesst und diese topologisch auf das Innere eines ebenen Kreises abbildet. Auf Grund der zweiten Definition erkennt man übrigens leicht, dass die Charakteristik immer dann Null ist, wenn die beiden Wege  $\alpha, \beta$  sich nicht schneiden. Es fragt sich, ob sich nicht aus der zweiten Definition die wesentlichen Eigenschaften der Charakteristik direkt ableiten lassen, ohne den Durchgang durch eine Triangulation. Dies ist in der Tat, wenigstens wenn man die Mannigfaltigkeit als differenzierbar annimmt, leicht möglich; durch die Ausführung dieses Gedankens bin ich zu der Überzeugung gekommen, dass für die Theorie der Riemannschen Flächen und der Funktionen und Integrale auf ihnen das Heranziehen der kombinatorischen Topologie ein Umweg ist, der sich nicht



lohnt. In einer in Vorbereitung begriffenen neuen Auflage meines alten Buches über Riemannsche Flächen wird dieser Erkenntnis Rechnung getragen werden.

Es lag mir daran, an diesem einfachen Begriff der algebraischen Schnittpunktzahl zweier geschlossener Kurven auf einer zweiseitigen Fläche zu zeigen, welche Schwierigkeiten der Mathematiker bei der präzisen Fassung solcher Begriffe antrifft und durch welche Methoden er sie überwindet. Ich hoffe, diese Ausführungen sind nicht ganz fehl am Platze in einem Heft, das dem Andenken PAUL NIGGLIS gewidmet ist, des Mannes, der so viel für die saubere Fassung der kristallographischen Grundbegriffe getan hat.

### Summary

The characteristic of two closed curves on an oriented surface is, roughly speaking, the algebraic sum of their intersections, counting a crossing from left to right as  $+1$ , a crossing in the opposite sense as  $-1$ . To make this definition precise, combinatorial topology replaces the surface by an aggregate of 0-, 1- and 2-cells and first assumes one curve to be a chain (joining the 0-cells), the other to be a co-chain (joining the 2-cells). The idea of homology (as defined by means of 'integral functions') and the law of antisymmetry then serve to pass from these specialized to arbitrary curves. This definition is here contrasted with another that arose from 'topologizing' the procedure by which the author in his *Idee der Riemannschen Fläche* (1913) constructed the Abelian integrals of the first kind: it makes no use of triangulation, but instead of the coverage of the surface by neighborhoods and their topological mapping onto circular disks. Finally the paper indicates the steps by which one proves the coincidence of both definitions.

(Eingegangen: 2. September 1953.)

---

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

### Zur Struktur von Hagelkörnern

Von R. LIST und M. DE QUERVAIN, Weissfluhjoch, Davos<sup>1)</sup>

Bei einem Gewitter mit Hagelschlag (24. Juni 1953) wurden auf dem Weissfluhjoch Hagelkörner aufgefangen und verschiedene Typen davon untersucht.

Der Hagelschauer war durch folgende meteorologische Daten gekennzeichnet:

Ort: Weissfluhjoch (2670 m ü. M.) ob Davos.

Allgemeine Wetterlage: Feuchtlabilität, Kaltluft in der Höhe, allgemein gewitterhaft; nachfolgende Frontgewitter. Vorliegender Hagelschlag gehörte der abschliessenden Kaltfront mit Gewittern an.

Temperatur: Absinkend von 13.20 h bis 21.30 h von  $6,1^{\circ}$  auf  $0,2^{\circ}\text{C}$ .

<sup>1)</sup> Eidgenössische Kommission zum Studium der Hagelbildung und Hagelabwehr (Forschungsstelle Weissfluhjoch).

Wölkung: Cumulonimbus mit Altostratus 8–10/10. Bald nach dem Hagelschlag Station im Nebel.

Wind: Um 15.30 h aus Nordwesten mit 4 m/s, bis 17.20 h bis 11 m/s anwachsend und auf Norden drehend; nach kurzer Flaute böige Winde aus Süden mit bis 22 m/s (17.23 h bis 17.35 h), mit Hagelschlag, dann Drehung nach West bis Nordwest und Abklingen des Windes auf 5 m/s (18.40 h).

Niederschlag: 10.50 h bis 16.02 h: Regen 0,9 mm

17.23 h bis 17.35 h: Hagel ohne Regen, dann etwas mit Regen vermischt

17.35 h bis 04.10 h: Regen mit Schnee

} 31 mm

Die aufgefundenen Körner, die zum Teil in den Figuren 1 bis 3 abgebildet sind, lassen sich morphologisch wie folgt klassieren:

Kugelige Körner aus transparentem Eis (Figur 1, Korn 3).

Kugelige bis eiförmige Körner mit opakem Kern und (dünner) transparenter Schale (Figur 1, Korn 5).

Kugelige Formen, in stumpfen Kegel auslaufend (Figur 1, Korn 1).

Kugelige, opake Körner mit transparenter Kalotte (Figur 2, Körner 7 und 9).

Opake traubige, «nierenartige» Formen (Figur 2, Körner 6 und 8).

Unregelmässige, teils ebenflächig begrenzte, durchsichtige Körner (Figur 1, Korn 4).

Kugelkalotten (Körner 10 und 12) und Schnitzformen (Körner 11 und 13), transparent bis teilweise opak (Figur 3).

Um über den innern Aufbau der gesammelten Hagelkörner nähere Aufschlüsse erhalten, wurden nach folgendem Verfahren von einzelnen Haupttypen Dünnschnitte hergestellt.

Das zu untersuchende Hagelkorn wird in eine gegenüber  $H_2O$  indifferente Flüssigkeit (Phthalsäurediäthylester), deren Erstarrungstemperatur einige Grade unter dem Gefrierpunkt von Wasser liegt, eingebettet. Bei einer Temperatur von  $20^\circ C$  wird dann mittels einer Kreissäge eine Scheibe von 0,2–0,4 mm Dicke aus dem Korn geschnitten. Durch Verflüssigen und Lösen des Einbettungsmaterials wird ein transparentes Präparat für die mikroskopische Analyse gewonnen.

Die Dünnschnitte wurden so gut wie möglich durch das geometrische Zentrum wie durch eventuell vorhandene Symmetrieachsen der Hagelkörner gelegt. Sie liegen in durchfallendem weissem Licht, abgesehen von der Anordnung der Luftfäschen, keine auffallenden Strukturmerkmale; im polarisierten Licht jedoch werden, ähnlich dem Formenreichtum des äussern Aufbaues, verschiedene Strukturtypen sichtbar. Die Körner erweisen sich dabei als polykristallines Gefüge. Nach der Grössenverteilung der Kristallite lassen sich folgende Unterscheidungen machen (siehe die Figuren 5, 7, 9, 11, 13 und 15):

Dünnschnitt, ein einziges grosses Korn enthaltend, dem zwei kleinere an- bzw. eingelagert sind (Figur 9).

Dünnschnitte mit zwei Gruppen von Gefügebestandteilen von deutlich verschiedener Korngrösse:

- a) mit fächerartigem Aufbau, die kleinen Gefügebestandteile zusammengeballt im Fächerursprung, die grossen daran angelagert (Figuren 5 und 15);
- b) mit radialsymmetrischer Anordnung der beiden Gruppen, im Zentrum kleine Gefügebestandteile (0,1–1,5 mm  $\varnothing$ ), daran angelagert grössere (1,5–4,0 mm  $\varnothing$ ), zum Beispiel Korn 8;
- c) Übergangsformen von a zu b;
- d) Dünnschnitte, bei denen ein deutliches Zentrum kleiner Gefügebestandteile im obigen Sinne fehlt (Figuren 7 und 13).

*Hagelkörner des Hagelschlages vom 24. Juni 1953 auf dem Weissfluhjoch*

Maßstab 1,3:1

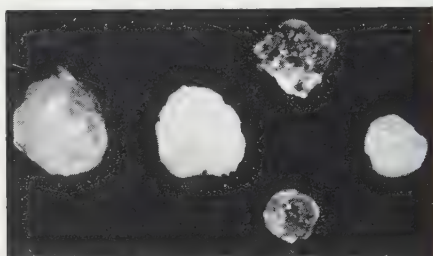


Fig. 1, Körner 1 bis 5



Fig. 2, Körner 6 bis 9



Fig. 3, Körner 10 bis 13



Fig. 4, Korn 1

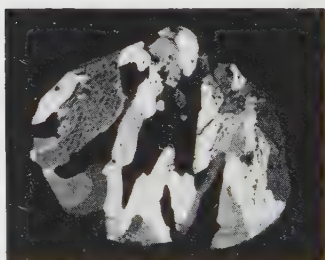


Fig. 5, Korn 1

*Dünnschnitte von Hagelkörnern in durchfallendem bzw. polarisiertem Licht*

Maßstab 3,6:1

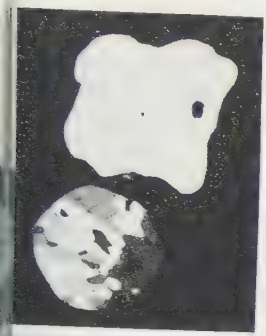


Fig. 9, Körner 3 und 4

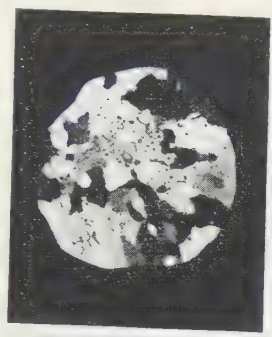


Fig. 13, Korn 14

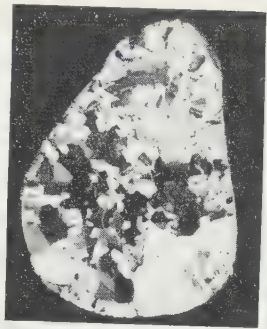


Fig. 17, Korn 16

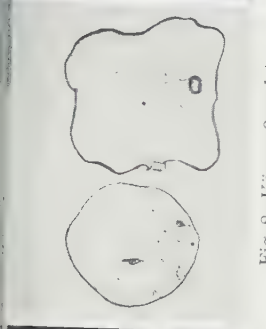


Fig. 8, Körner 3 und 4



Fig. 12, Korn 14

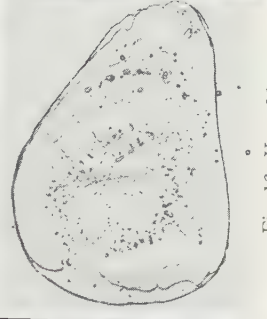


Fig. 16, Korn 16

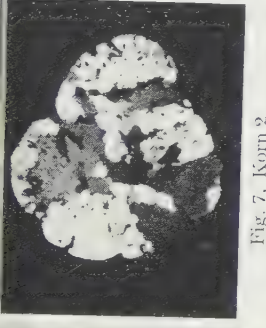


Fig. 7, Korn 2

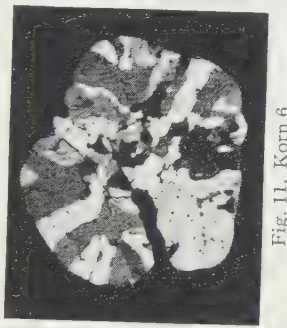


Fig. 11, Korn 6

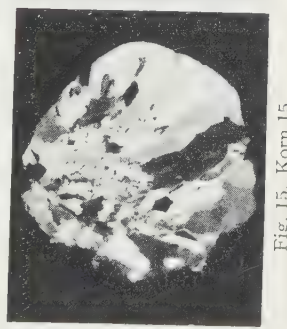


Fig. 15, Korn 15



Fig. 6, Korn 2



Fig. 10, Korn 6

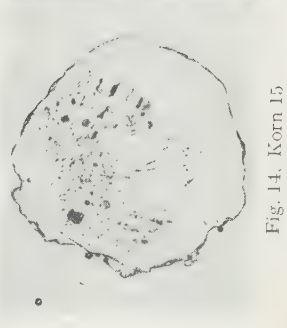


Fig. 14, Korn 15



Die Kategorie 2d dürfte davon herrühren, dass der Schnitt neben dem verhältnismässig kleinen Gefügekern vorbeiführt. Bei Hagelkörnern, die keine äussere Symmetrie aufweisen (Kugelgestalt oder ausgezeichnete Achse), wird die Anhäufung kleiner Kristalle nur zufällig vom Schnitt getroffen.

Zur gleichen Folgerung führt auch die Betrachtung der Bläschenstrukturen, insbesondere wenn wir von den Dünnschnitten der Hagelkörner 1 und 14 (Figuren 4 und 12) ausgehen. – Diese lassen vermuten, dass sich die Bläschen auf einem Kegel anhäufen, dessen Spitze im Bereich der kleinen Gefügebestandteile liegt. Figur 4 würde dabei einen Schnitt parallel zur Kegellachse (Hyperbelast) und Figur 12 einen solchen senkrecht zur Achse darstellen (Kreis). Andere untersuchte Schnitte mit ellipsenförmiger Anordnung der Bläschen erhärten diese Annahme. Bei den Körnern mit radialsymmetrischer Anordnung der Gefügebestandteilgruppen (Typus 2b) sind solche Bläschenreihen nicht wahrscheinlich, da bevorzugte Häufungsorte dafür fehlen.

Ausgehend von bekannten Wachstumserscheinungen an Eis kann vermutet werden, dass die Bläschenreihen, die ohne sichtbare Beziehung zu den einzelnen Kristallen angeordnet sind, Wachstumsrichtungen innerhalb des Hagelkornes angeben. Die beiden Gruppen von Gefügebestandteilen können somit als zwei Generationen angesprochen werden. Ausgesprochen schalig angeordnete Bläschen haben eine andere Bedeutung, wie folgender Versuch nahelegt: Verschiedene natürliche Hagelkörner wurden, an einem Faden hängend, durch wiederholtes Eintauchen in Wasser künstlich vereist. Die tiefe Temperatur der Körner und deren Umgebung ( $-35^{\circ}\text{C}$ ) hatte zur Folge, dass der Gefrierprozess von der Korn- und der Wasseroberfläche zugleich ausging, wobei die Bläschen an die Stelle des Zusammentreffens der gegeneinandervachsenden Eisschichten geschoben wurden, wie aus den Figuren 16 und 17 hervorgeht.

Aussagen über die Bildung der untersuchten Hagelkörner zu machen, dürfte schwierig sein, besonders bleibt die Entstehungsgeschichte des «Einkristalls» (Korn 4) im dunkeln. Bei den Körnern 6 und 8, die, äusserlich betrachtet, aus kleineren Körnern zusammengewachsen erscheinen (Figur 2), deutet ihr kristalliner Aufbau (zum Beispiel Figur 11) eher auf einheitliches Wachstum. (Die Linie, die in Figur 10 von der Einschnürung nach rechts oben verläuft, rührt von einem Bruch des Präparates her). Ob die Körner 10 bis 13 Splitterformen darstellen oder ob sie so gewachsen sind, lässt sich den entsprechenden Dünnschnitten nicht entnehmen. Die Körner mit kegelförmiger Anordnung der Bläschen sind möglicherweise aus konischen Graupeln entstanden, was die Ansicht von H. ISRAEL<sup>1)</sup> bestätigt.

Diese Bemerkungen zeigen, dass auf alle Fälle noch grössere und weitgehendere Untersuchungen notwendig sind, um sichere Angaben über Entstehung und Wachstum von Hagelkörnern zu machen.

### Summary

During a thunderstorm in the area of Weissfluhjoch hail stones have been collected for crystallographic investigation. Thin sections cut out of several specimens and inspected in polarized light reveal in all cases but one a polycrystalline structure of the hail stones. The normal pattern of the sections consists in a number of small crystals forming likely the centre of growth and in an adjacent or surrounding group of larger crystals.

(Eingegangen: 14. September 1953.)

<sup>1)</sup> H. ISRAEL, *Neuere Anschauungen und Versuche zur Erklärung der Hagelbildung*, Die Umschau in Wissenschaft und Forschung, 13. Heft (Juli 1953).

## Eine praktische Methode zur Transformation von Kristallstereogrammen in gnomonische Projektion

VON ROBERT L. PARKER, Zürich<sup>1)</sup>

Kugelprojektionen sind in der Kristallographie und Kristalloptik ein vielverwendetes Hilfsmittel zur Veranschaulichung räumlicher Lagenbeziehungen und zur graphischen Lösung rechnerischer Aufgaben. Als besonders wertvoll erweisen sich in diesem Zusammenhang die stereographische, gnomonische, orthographische und flächentreue azimutale Projektion. Auch wurde gelegentlich auf die Möglichkeit hingewiesen, gewisse Zylinderprojektionen zu verwenden. Während die stereographische Projektion heute ganz vorwiegend mit Hilfe eines äquatorialen Netzes (sogenanntes Wulffsches Netz) ausgeführt wird, sind die Methoden zum Entwerfen gnomonischer Projektionen weniger einheitlich. Das geht auch aus der Vielseitigkeit der von Zeit zu Zeit vorgeschlagenen Hilfsmittel hervor, wie Netze diverser Orientierung, Spezialmaßstäbe, Transporteure, Tabellen usw. Von den genannten Projektionsarten erweist sich die stereographische als die für kristallographische Zwecke im allgemeinen vielseitigste, doch bleiben die Zusammenhänge zwischen gnomonischer Projektion und dem die Kristallflächenentwicklung beherrschenden Rationalitätsgesetz von unübertroffener Einfachheit. So stellt sich denn bei der Bearbeitung eingemessener Kristallflächenkomplexe öfters das Bedürfnis ein, von einer angefertigten stereographischen Projektion zu einer gnomonischen zwecks Indizierung der Flächenlagen überzugehen. Dieser Schritt geschieht üblicherweise so, dass jedem stereographischen Punkt [mit Azimut  $\varphi$  und Zentralabstand  $d = R \operatorname{tg} (\varphi/2)$ ] ein gnomonischer Punkt (mit Azimut  $\varphi$  und Zentralabstand  $d' = R' \operatorname{tg} \varphi$ ) zugeordnet wird. Ein von F. RINNE<sup>2)</sup> veröffentlichtes stereognomonisches Netz kann zur Erleichterung dieser Konstruktion herangezogen werden.

Die hier zu erläuternde Methode zur Ausführung dieser Transformation beruht auf folgender Überlegung: Bringt man auf eine stereographische Projektion (mit Radius =  $R$ ) eine gnomonische (mit Radius =  $R'$ ) so zu liegen, dass die Zentren beider übereinstimmen, so wird jeder Pol des ersten Entwurfes, für welchen die Beziehung gilt

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{R'}{R} \operatorname{tg} \varphi,$$

mit seinem äquivalenten Pol im zweiten Entwurf zusammenfallen. Derartige Punkte liegen offenbar in beiden Projektionen auf einem Kleinkreis um das Zentrum, so dass gesagt werden kann, die aufeinandergelegten Projektionen haben einen Kleinkreis gemeinsam. Wird der stereographische Radius konstant gleich 10 gehalten, so entsprechen sich zum Beispiel folgende Werte von  $R'$  dem gnomonischen Radius und von  $\varphi$  dem Winkelradius des korrespondierenden Kleinkreises:

$R'$ :	3,33. .	3,00	2,00 usw.
$\varphi$ :	60,00°	64,42°	75,52° usw.

<sup>1)</sup> Mineralogische Sammlung ETH.

<sup>2)</sup> F. RINNE, Z. Krist. 65, 83 (1927).



Ist aber der korrespondierende Kleinkreis beider Projektionen festgelegt, so erfolgt die Transformation eines beliebigen Pols  $P$  der stereographischen Projektion in den entsprechenden Pol  $P'$  der gnomonischen Projektion (oder umgekehrt) gemäss der in Figur 1 angedeuteten Konstruktion, die sich folgendermassen begründen lässt: Der Pol  $P$  und der zu suchende Pol  $P'$  liegen auf dem gleichen Durchmesser des Entwurfes, weil dieser in beiden Projektionen in gleicher Weise vom Azimut der Fläche bestimmt wird. Punkt  $P$  liegt ausserdem auf einem bestimmten Grosskreis der stereographischen Projektion, der den korrespondierenden Kleinkreis in  $a$  und  $b$  schneidet. Diese Punkte gehören aber als solche auch der gnomonischen Projektion an, und in letzterer wird der Grosskreis durch  $a$  und  $b$  durch

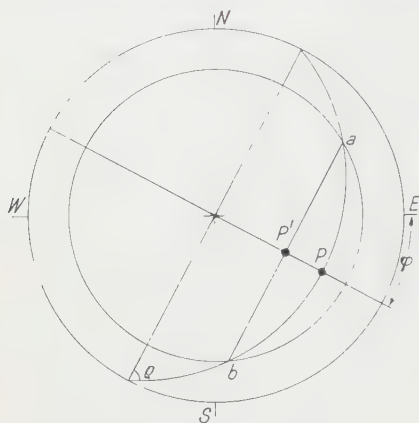


Fig. 1

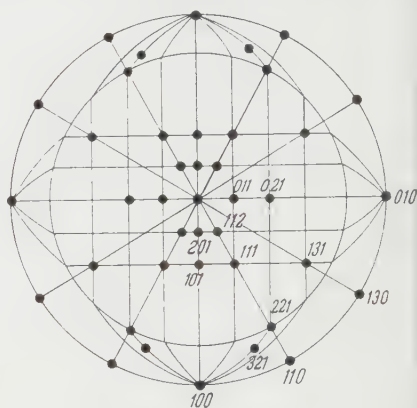


Fig. 2

die Gerade  $ab$  ersetzt. Der Schnittpunkt dieser Linie und des erwähnten Durchmessers ist also die Lage des gnomonischen Punktes  $P'$ .

Aus der Geometrie von Figur 1 geht hervor, dass die für die darzustellende Fläche geltenden Positionswinkel  $\varphi$  und  $\rho$  an den angedeuteten Stellen abgelesen werden können. Daraus folgt, dass der Punkt  $P'$  auf Grund vorgegebener Positionswinkel leicht gefunden werden kann, ohne dass  $P$  vorher eingetragen werden muss. Die Konstruktion kann also ausser zur Transformation der stereographischen in die gnomonische Projektion auch zur selbständigen Konstruktion einer gnomonischen Projektion mit Hilfe des stereographischen Netzes verwendet werden.

Aus den beschriebenen Beziehungen leitet sich die Möglichkeit ab, sämtliche Flächen eines Kristalls in einer kombinierten Projektionsfigur zur Darstellung zu bringen. Bis zu und mit einem frei wählbaren Grenzkreis (dem korrespondierenden Kleinkreis von oben) erfolgt die Darstellung gnomonisch, ausserhalb dieses Kreises und bis zum Grundkreis stereographisch. Figur 2, die die Flächenentwicklung eines Topaskristalls wiedergibt, zeigt den Aspekt einer solchen Darstellung.

Ogleich die Pole im äusseren (stereographischen) Gebiet einer nach Art und Maßstab von der inneren abweichenden Darstellungsweise angehören, so lassen sie sich mehrheitlich ebenfalls auf Grund des gnomonischen Maschenetzes indizieren. Das Verfahren hierzu zeigt Figur 3. Aus dieser geht hervor, dass im Gebiet der stereographischen Projektion die Teilgebiete  $a, b, c, d$  in bezug auf ihre

Stellung zum Grenzkreis unterschieden werden können. Für *a* gilt, dass jeder Punkt auf zwei Grosskreisen liegt, die Fortsetzungen des gnomonischen Maschen- systems darstellen. Daraus ergibt sich die Stellung des Punktes im Maschen- system und folglich auch das Symbol. Punkte in den Gebieten *b* und *c* liegen je auf einem Grosskreis wie unter *a*, und ausserdem auf einer Diagonalen des Maschen- systems. Sie sind somit ebenfalls indizierbar. Im Gebiet *d* liegen die Punkte nur auf einer solchen Diagonalen und sind somit nicht voll indizierbar. Auch für Pole auf dem Grundkreis liegenden gilt, dass sie nur von einer solchen Diagonalen getroffen werden. Weil aber der letzte Index in diesem Fall Null ist, kann für alle solche Lagen das Symbol voll aufgestellt werden.

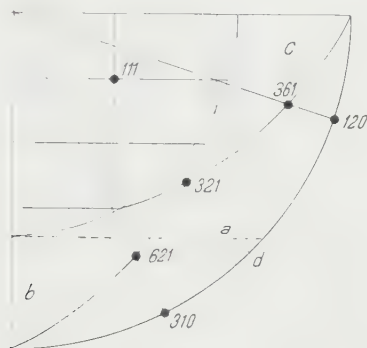


Fig. 3

Im praktischen Gebrauch hat sich diese Konstruktion sehr gut bewährt. Die kombinierten Darstellungen von der Art der Figur 2 bieten den entschiedenen Vorteil gegenüber gewöhnlichen gnomonischen Diagrammen, dass sie alle Flächenpole eines Kristalls in miteinander koordinierten Lagen zur Wiedergabe bringen.

### Summary

A method is described for transforming crystal stereograms into gnomonic projection. It is based on the fact that both projections have a small circle in common. The construction can also be used for the direct construction of gnomonograms if the positional angles of the faces are known. Combined gnomonostereograms connected by the common small circle may also be drawn.

(Eingegangen: 6. Juli 1953.)

## Kammeis, eine anomale Wachstumsform der Eiskristalle

Von SAMUEL STEINEMANN, Weissfluhjoch, Davos<sup>1)</sup>

Mit der Eindringung des Frostes in den Boden ist oft die bekannte Erscheinung des Kamm- oder Stengeleises verbunden [1] bis [6]<sup>2)</sup>. Die Bedingungen sind übereinstimmend die, dass durch die vorangehende Witterungsperiode (in unserem Falle waren es zwei Tage mit andauerndem Nebelregen bei Temperaturen knapp über 0°C) der Boden vollkommen durchnässt wird oder dass die Wasser



Fig. 1

Kammeis in der Natur (1:2 verkleinert).

zufuhr in die obersten Erdschichten durch Grundwasser ausgiebig geschieht. Die Lufttemperaturen liegen knapp unter dem Nullpunkt, aber nicht tiefer als  $-5^{\circ}\text{C}$ , ansonst die wasserliefernden Poren an den Basen der Stengel, die anderweitig nicht in Kontakt mit der Schmelze kommen, geschlossen werden und das Wachstum aufhört. Am Morgen, an dem die Beobachtung gemacht wurde, herrschte auf dem Weissfluhjoch eine Lufttemperatur von  $-1,5^{\circ}\text{C}$ ; die mittlere Temperatur der vorhergehenden Nacht, in der das Kammeis entstand, mag etwa  $-2^{\circ}\text{C}$  gewesen sein. Die damals herrschende, sehr niedrige Feuchtigkeit von nur  $\sim 15\%$  ist sicher nicht von Bedeutung gewesen. Das Wachstum geschieht offenbar periodisch während der Nächte; am Tage tritt eine Schmelzung ein, oder das Wachstum schreitet bei höheren Temperaturen nicht weiter fort. In diesen Fällen resultiert dann eine sichtbar stufenweise Ausbildung. Das Wachstum einer Periode beträgt bis zu 4 cm.

Kammeis ist oft von einer gefrorenen Erdschicht bis zu einer Mächtigkeit von einigen Zentimetern überdeckt, die von den unterliegenden Kristallen abgehoben wird. Das Gewicht einer solchen Schicht betrug in unserer Beobachtung  $5\text{ g/cm}^2$ , was bei der allerdings etwas gewagten Annahme, dass die Hälfte dieser Fläche al-

<sup>1)</sup> Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung, jetzt: Laboratoire suisse de Recherches horlogères, Neuenburg.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 506.

Querschnitt des Kammeises auftritt, zu einer Kraft von 10 g pro Quadratcentimeter effektive Fläche führt. Die Arbeitsleistung einer während der Nacht um 1 cm vordringenden Kammeisschicht berechnet sich so zu 20 000 erg pro Quadratcentimeter effektiven Eisquerschnitt. Andere Beobachter sprechen sogar von gehobenen Steinen bis zu 2 kg.



Fig. 2

Grobe Bündel des Kammeises in polarisiertem Licht (natürliche Grösse).

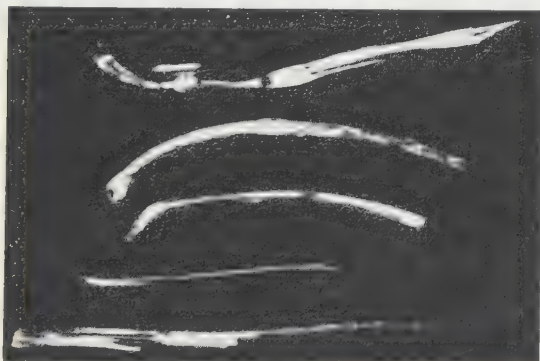


Fig. 3

Feine Fibern des Kammeises in polarisiertem Licht (natürliche Grösse).

Es ist natürlich nicht zu erwarten, dass die einzelnen Fibern, die teilweise gekrümmt und vielfach stufenförmig gebaut sind (Figuren 2 und 3), aus Einkristallen bestehen, wie auch DOENITZ [3] beobachtet. Dünnschliffe (Figuren 4 und 5) und auch die strenge Formregelung der prismatisch-stengeligen Kristallite mit einem Verhältnis der Quer- zur Längsdimension von im Mittel rund 0,2 zeigen dies sehr deutlich, indem sich die grössere Dimension in die Längsrichtung legt. Die Beobachtungen von KENNGOTT [1] und DOENITZ [3] beschreiben die Fibern als hexagonale Prismen. Damit würde sich die Längsachse der Kristallite mit der Lage der optischen Achse identifizieren. Wenn auch an einzelnen Stengeln hier durchaus scharfe Begrenzungen auftraten, die aber nicht als von hexagonalem



Habitus bezeichnet wurden, so ist die Mehrzahl der Kristallite doch allotriomorph befunden worden. Es gibt wohl eine Form von stengeligem Eis, das in einem evakuierten Gefäß aus der mit einer dünnen Eisschicht bedeckten Wasseroberfläche herauswächst, einkristallin ist und hexagonalen Habitus hat [7]. Das Wachstum ist aber als solches aus der Dampfphase dort genügend erklärt.

Plastische Deformation kann die Krümmungen der Eisstengel (Figuren 2 und 3) sicher erzeugen, wie ROSSMANN [6] meint. Die in solchen Krümmungen liegenden Kristallite zeigen aber keine undulösen Auslöschungen, was die Folge einer nachträglichen plastischen Deformation ist. Die Krümmungen scheinen so nur einer Wachstumsbehinderung zu folgen.



Fig. 4

Querschnitt eines Bündels des Kammeises zwischen Polaroiden (2fach vergrössert).



Fig. 5

Längsschnitt eines Bündels des Kammeises zwischen Polaroiden (2fach vergrössert).

Der *modus operandi* der Entstehung des Kammeises muss analog sein wie bei den faserigen Formen an Gips, Kochsalz, Alaunen usw. Für diese findet SCHMIDT [8], dass die Fibern an ihren Basen wachsen und so aufgestossen werden; denn durch Einhüllen der oberen Enden zur Verhinderung einer kapillaren Aktion von Hohlräumen und Oberfläche kann das Wachstum nicht gestoppt werden. Für das Wachstum aus der Schmelze, die der Boden ständig nachliefert, sprechen die Formregelung, die Querdimensionen der Kristallite, die ungefähr den Porenabständen entsprechen, und intrakristalline Luft einschüsse (es bestehen auch interkristalline) der Mikroaufnahme Figur 6. Nur GABRAN [9] meint, dass es über die Dampfphase geschieht.

Während der Entstehung des Kammeises besteht ein Temperaturgradient, der die Lage der Stengelachsen einnimmt. Das gilt natürlich nur makroskopisch, denn bei diesem Gemisch von Komponenten ungleicher Wärmeleitfähigkeit (Wasser, Luft, Erdteilchen, Eis) scheint von Fall zu Fall auch eine windschiefe Richtung in Frage zu kommen.

Innerhalb der grossen Variationsbreite der Eiskristalle kennt man die Zusammenhänge zwischen der Lage des Temperaturgradienten und der optischen Achse. Das Eis einer Seeoberfläche hat die optischen Achsen seiner Kristallite als rationale Kristallrichtung normal zur Oberfläche, die auch die Richtung des Temperaturgradienten ist. Auch in einem Rohr, das in eine Kältelösung getaucht wird, liegen die optischen Achsen der entstandenen Kristallite bevorzugt radial, ob das Bad nun eine höhere oder tiefere Temperatur hat, das heisst, der Effekt ist we-

ntlich unabhängig von der Kristallisationsgeschwindigkeit. Die Fensterblumen, ren gekrümmte Form durch einen eigentümlichen Verzweigungsprozess wäh- nd des Wachstums entsteht, sind in ihren Teilen ebenso orientiert, dass die tische Achse in die Lage der Normalen zur Unterlage und also des Temperatur- adienten einregelt. Auch in der Kristallisation über die Dampfphase bei der nstruktiven Metamorphose des Schnees, die zu den hochmetamorphen Formen echerkristall, Prisma usw. führt, geht die Selektion in der Richtung einer Paral- stellung der optischen Achsen der Kristalle und des Temperaturgradienten [10].



Fig. 6

roaufnahme eines Längsschnittes von Fibern zwischen Polaroiden, mit Einschlüssen von Luft in der Längsrichtung und einem grösseren Partikel Erde (Vergrösserung 20fach).

Für Eis ist die optische Achse die Richtung der grössten Wärmeleitung [11]. nach der Regel, die für die Synthetisierung von Kristallen aus der Schmelze all- mein gilt und die für gute Resultate zu beachten ist [12], besteht die Wechsel- rkung zwischen dem kristallographischen System des entstehenden Kristalls (icht isotrop) und der Lage des Wärmeflusses darin (Blaseneinschlüsse erlauben en im Falle des Eises zu identifizieren), dass die Achse grösster Wärmeleitung t der Richtung des letzteren zusammenfällt. Der Temperaturgradient ist natür- h zu diesem parallel.

Für die Dünnschliffe waren die Proben nach einem Anschliff durch eine ichte Schmelzung auf Objektträgern angefroren worden und auf eine Dicke von 5–0,2 mm im Kühlraum bei  $-30^{\circ}\text{C}$  von Hand abgeschliffen worden. Die Ana- e zur Strukturregelung mit dem Universaldrehtisch verlangt einerseits nicht dicke Proben, da Interferenzfarben stören und sich die Korngrenzen über- eken; andererseits macht sich bei dünnen Proben die schwache Doppelbrechung merkbare. Wenn die Anschmelzung nicht mit besonderer Sorgfalt durchgeführt rd, kann direkt auf dem Objektträger eine sekundäre Schicht entstehen, die Täuschungen führt, da sich die optischen Achsen ihrer Kristallite in die Nor- le stellen.

An zwei Schnitttrichtungen wurde die Analyse ausgeführt. Der eine Schnitt lag er zur Wachstumsrichtung, für den andern spannen die Längsrichtung und die sste Querdimension der vielfach wie Bänder aussehenden Bündel die Schnitt-



ebene auf. Die Azimutgrößen der Achsenlage sind immer exakt, Poldistanzen werden mit fallender Neigung gegen die Schnittebene sehr unexakt. Diese Tatsache ist für die Beurteilung der beiden Schnittrichtungen wichtig, indem der Längsschnitt vorteilhafter ist, da das Azimut für diesen Fall mehr Gewicht hat. Für beide Fälle wurden je zirka 150 Kristallite ausgemessen und aufgetragen. Von den Längsschnitten sind die Resultate in Figur 7 zusammengestellt und nach SCHMIDT aus-

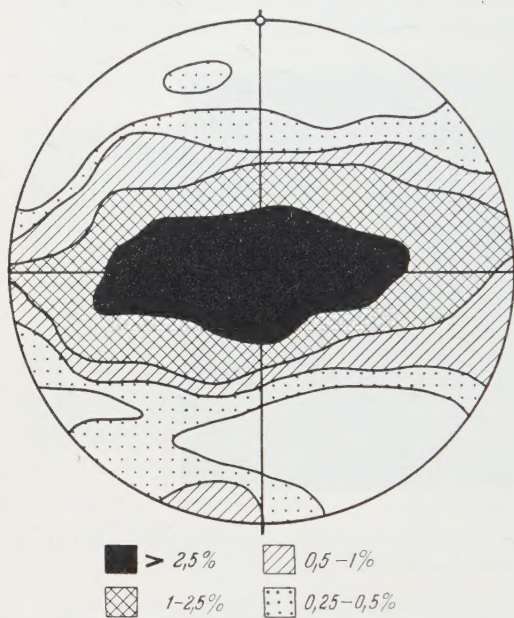


Fig. 7  
Lage der Polausstiche in stereographischer Projektion, ausgezählt nach SCHMIDT.  
○ (Nordpol): Pol der Wachstumsrichtung.

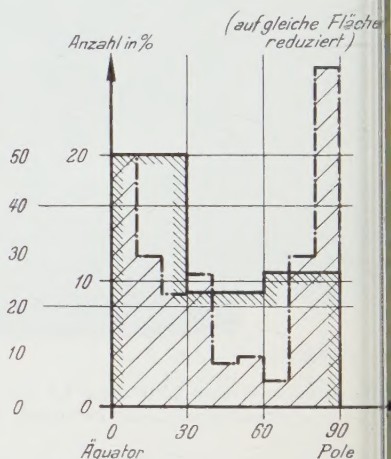


Fig. 8  
Mittelwert der Verteilung der Polausstiche in Breitenzonen.

--- 10°-Zonen, Abszissenmaßstab rechts  
— 30°-Zonen, Abszissenmaßstab links

gezählt, wobei, um eine bessere Mittelung zu erhalten, auf eine Fläche von 4% bezogen wurde. Die Resultate der Querschnitte sind etwas weniger deutlich; es wird vermutet, dass dort die besprochene sekundäre Schicht, die bei der Anschmelzung entstehen kann, sich stärker auswirkt. Der Längsschnitt ist stabiler und kann so leichter angepresst werden. Die Häufung nahe des Pols der Schnittebene in der Figur 7 ist wahrscheinlich auch eher dem zuzuschreiben als einer Ausrichtung der optischen Achsen senkrecht zur grösseren Querdimension der Bündel.

Das Resultat ist eine, allerdings nicht ausgeprägte, Gürtelregelung. Die optischen Achsen der Kristallite bevorzugen nicht die Richtung der Stengelachsen. Die Auszählung nach Breitenkreisen in Prozent, wobei auf Flächengleichheit reduziert ist, stellt den Sachverhalt klar dar (Figur 8).

Für die feinere Auszählung liegt die Schwankungswahrscheinlichkeit nur für die unmittelbare Nähe des Äquators innerhalb der Messungen, für die gröbere Auszählung von 30°-Bereichen ist die letzte Summe gegen die Pole zu vollkommen

unbestimmt. Ein sekundäres Maximum ist nicht zu bemerken, wobei die kleine Anzahl der ausgemessenen Kristallite in Betracht zu ziehen ist.

Die sukzessive Verfolgung der Polausstiche aneinandergrenzender Kristallite zeigt, dass zwischen diesen vielfach eine Verbindung besteht, indem sich diese in Sprüngen von unter  $15^\circ$  als gut verfolgbare Linien darstellen. Die Sprünge sind aber selten so klein, dass man von einem Verzweigungsprozess sprechen könnte, wie er an Eiskristallen oft auftritt [13]. Die Unterscheidung einer bodennahen Schicht und einer oberen Partie des Kammeises – letztere entspricht der ersten Zeit des Wachstums – gibt im wesentlichen dasselbe Ergebnis. Ein Bruch der Kristallite während ihres Vordringens ist ausser acht zu lassen, da die Beobachtungen nicht Kristallite in ihrer Längsrichtung erfassten. Man kann sich mit dieser Tatsache vielleicht an die häufigen Beobachtungen an den atmosphärischen Eisteilchen halten, die von schiefen Aufwachsungen an die basalen Platten sprechen.

Bemerkenswert im Zusammenhange mit den Entstehungsbedingungen des Kammeises ist die Tatsache, dass im Temperaturbereich von  $0^\circ$  bis  $-2,5^\circ\text{C}$  praktisch keine anderen Keime als Eisteilchen selbst existieren [14] [15]; an denen kann aber nur eine Unterkühlung von sicher unter  $0,1^\circ\text{C}$  auftreten [15]. Von  $-2,5^\circ$  bis  $-5^\circ\text{C}$  existieren nur wenige Stoffe, die als Keime für eine spontane Kristallisation dienen können [14] [15]. Da das Kammeis in diesem Bereiche entsteht, kann die Beobachtung der Zusammenhänge der Polausstiche durchaus zweifellos sein. Die Bedingungen, die im Falle der Schmelze zu einem Verzweigungsorgang führen, sind unbekannt; für die Fensterblumen aber können sie für die Unterlage angegeben werden [16].

Mit der ausgeführten Untersuchung ist man nicht in der Lage, über die Nebeneilchen, die röntgenographisch bestimmt werden müssten, etwas auszusagen. Einzelne, ganz feine flachstengelige Fibern waren wohl öfters so, dass man sie als Hauptäste eines Dendriten erkennen konnte, eine Verallgemeinerung dieser Einzelbeobachtungen geht doch nicht an. Es kann nur gesagt werden, dass die Wachstumsrichtung nicht mit der optischen Achse der Kristallite zusammenfällt, dass sogar eine Selektion in dem Sinne zu bemerken ist, dass die optischen Achsen die Senkrechte zur Wachstumsrichtung einnehmen. Eine Formregel besteht darin, dass prismatisch-stengelige Kristallite sich in die Faserachse richten. Die Regel für Schmelzen, dass der Temperaturgradient mit der Achse der grössten Wärmeleitung, also der optischen Achse, zusammenfällt, ist nicht erfüllt.

In der Mineralogie sind viele stengelige Formen bekannt, deren Gesetzmässigkeiten sich ordnen. NIGGLI [17] beschreibt den Komplex: «... Mit innertexturellen, durch die morphologischen Verhältnisse des Minerals weitgehend bedingten Erscheinungen machen die Begriffe: stengelige bis faserige, blätterige und körnige bis dichte Aggregatstruktur bekannt. In ihnen kommt noch die Wachstumstendenz des Einzelindividuums zur Geltung. Durch besondere Umstände bei der Bildung ergibt sich im einzelnen eine verschiedene gegenseitige Orientierung der Individuen zueinander, ...». Oder auch über orientierte Aufwachsungen [18]: «Oft beruht die orientierte Aufwachsung in offene, von Lösungen erfüllte Hohlräume (zum Beispiel Drusen, offene Spalten) auf einer für den Stoffansatz günstigen Keimauslese (MOELLER). Einzelne oder in lockerer (schütterer) Verteilung aufgewachsene Kristalle weisen meist in bezug auf die Ansatzfläche keine bevorzugte Stellung auf; erst bei starker Besetzung durch Kristalle macht sich für die grösseren, weitergewachsenen Kristalle eine deutliche, durch Selektion zustande gekommene Regelung bemerkbar. In manchen Fällen, jedoch nicht durchgehend, ist als sogenannte Drusenregel beobachtbar, dass die im Wachstum begünstigten Kristalle die Richtung grösster Wachstumsgeschwindigkeit steil bzw. senkrecht zur Ansatzfläche orientiert haben (HOLZNER). Nicht selten ragen auch schärfste Kanten oder Ecken



in den freien Hohlraum hinein. Es sind also oft rationale Kristallrichtungen senkrecht zur Ansatzfläche zu finden (KALB)...».

CORRENS [19] [20] erklärt die Kraftwirkungen wachsender Kristalle, die verschiedentlich als mystische Kristallisationskraft (NIGGLI) auftritt, damit, dass es die Bilanz der Grenzflächenenergien zwischen Kristall–Unterlage und der Summe von Unterlage–Lösung und Lösung–Kristall betrachtet. Ist letztere Summe kleiner als die Grenzflächenenergie fest–fest, so kann Lösung bzw. Schmelzen zwischen die festen Teile eindringen und der Kristall gegen eine Kraft wachsen. Die Grenzflächenenergie gegen einen bestimmten Stoff ist eine anisotrope Eigenschaft des Kristalls, so dass eine Möglichkeit des anomalen Eiswachstums unter Umständen darin zu suchen ist, dass für Prismenflächen die Energiebilanz positiv für basale Null oder negativ ist. Dass Prismenflächen energiereicher sind, bestätigen die Resultate aus der Rekristallisation von verformten Eisproben, indem Korngrenzenverschiebungen an Prismenflächen am häufigsten sind [21].

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. KENNGOTT, Sitz.-Ber. kgl. Akad. Wiss. 76, 157 (1855).
- [2] C. ABBE, U. S. Dept. Agric., Monthly Weather Rev. 33, 157 (1905).
- [3] DOENITZ, Mitt. dtsch. Ges. Nat. Völkerkde. Ostasiens.
- [4] Sir NAPIER SHAW, *The Drama of Weather* (Cambridge 1933).
- [5] S. TABER, Amer. J. Sci. [4. Ser.], 41, 532 (1916).
- [6] F. ROSSMAN, Meteorol. Z. 54, 64 (1937).
- [7] J. MEYER und W. PFAFF, Z. anorg. allg. Chemie 224, 305 (1935).
- [8] R. SCHMIDT, Z. Gewinn, Verarb. Verwertung Kalisalze 8, 21 (1914).
- [9] O. GABRAN, Meteorol. Z. 54, 427 (1937).
- [10] H. P. EUGSTER, Beitr. Geol. Schweiz, Geotechnische Serie, Hydrologie 5. Lieferung (Bern 1952).
- [11] N. E. DORSEY, *Properties of Ordinary Water Substances* (Reinhold Publ. New York 1940).
- [12] A. C. MENZIES und J. SKINNER, *The Growing of Crystals*, Crystal Growth, Disc. at the Faraday Soc., S. 306 (1949).
- [13] P. OWSTON und K. LONSDALE, J. Glaciol. 1, 118 (1948).
- [14] G. TAMMANN und A. BÜCHNER, Z. anorg. allg. Chem. 222, 371 (1935).
- [15] R. G. WYLIE, Proc. Phys. Soc. [B] 66, 241 (1953).
- [16] U. NAKAYA und M. HANAJIMA, *Frost* (japanisch).
- [17] P. NIGGLI, *Lehrbuch der Mineralogie und Kristallchemie* (Bornträger, Berlin 1941), S. 395.
- [18] P. NIGGLI, *Gesteine und Minerallagerstätten* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 209.
- [19] C. W. CORRENS, Sitz.-Ber. preuss. Akad. Wiss., Phys. Kl. (Berlin 1926), S. 81.
- [20] C. W. CORRENS, *Growth and Dissolution of Crystals under linear pressure*, Crystal Growth, Disc. at the Faraday Soc., S. 267 (1949).
- [21] G. TAMMANN und K. L. DREYER, Z. anorg. allg. Chemie 182, 289 (1929).

### Summary

Fibrous ice is a form of frost in soils. The fibers grow in the underlying melt and are pushed upward. The habit is sometimes described as hexagonal prisms. This could in general not be verified, and an analysis with the universal stage showed that the optical axis of the crystallites lie preferentially perpendicular to the direction of growth and so to the temperature gradient. This is an anomaly in the growth of crystals from a melt.

(Eingegangen: 5. September 1953.)